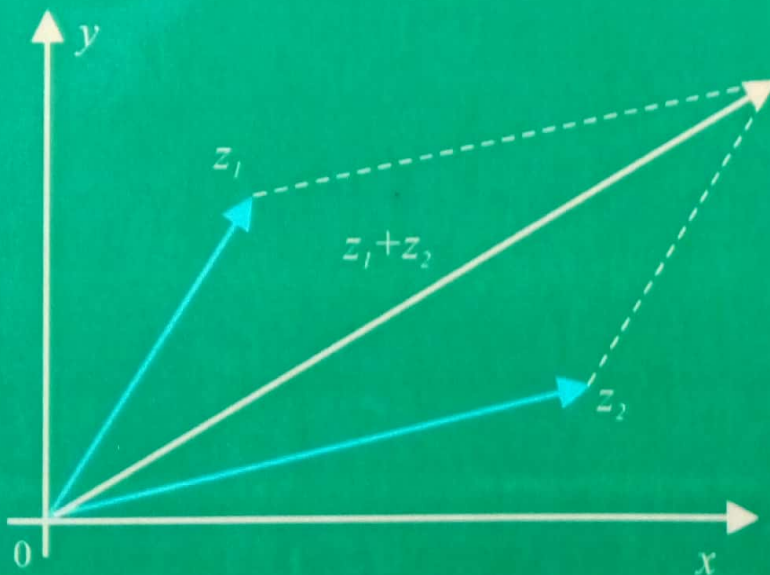


Рубцов М.О.,
Кравець В.І.,
Назарова О.П.

Вища математика

Навчальний посібник

Частина 2



**МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ
ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ**

**Рубцов М.О.,
Кравець В.І.,
Назарова О.П.**

**ВИЩА
МАТЕМАТИКА**

Навчальний посібник

У 2-х частинах

Частина 2

**Рекомендовано
Міністерством аграрної політики та продовольства України**

Мелітополь 2015

УДК 517
ББК 22.11
Р 82

Розповсюджувати та тиражувати без офіційного дозволу авторів заборонено

*Затверджено Міністерством аграрної політики та продовольства
України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних за-
кладів (Лист № 37-18-1-13/19626 від 25.12.14 р)*

Рецензенти:

Тіман М.П., д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпропетровськ, ДАУ, зав. ка-
федри вищої математики)

Міхлін Ю.В., д-р фіз.-мат. наук, проф. (Харків, ХП, кафедра приклад-
ної математики)

Конет І.М., д-р фіз.-мат. наук, проф. (Кам'янець-Подільський, КПНУ
ім. І. Огієнка, каф. диференціальних рівнянь і прикладної
математики)

Р 82 Рубцов М.О.

Вища математика: навч. посіб.: у 2-х ч., ч 2. / М.О. Рубцов, В.І. Кра-
вець, О.П. Назарова – Мелітополь: Видавництво МДПУ
ім. Б. Хмельницького – 2015. – 222 с.

ISBN 978-617-7055-84-5 (повне видання)

ISBN 978-617-7055-86-9 (частина 2)

Другу частину посібника написано відповідно до діючих програм курсу вищої математики для студентів всіх спеціальностей вищого на-
вчального закладу. Посібник містить матеріал з невизначеного та ви-
значеного інтегралів, застосувань визначеного інтегралу, елементів фу-
нкції комплексного змінного, диференціальних рівнянь першого та
другого порядків та систем диференціальних рівнянь, числових та фун-
кціональних рядів та їх застосуванні, рядів Фур'є. Теоретичний матері-
ал подано з великою кількістю розв'язаних прикладів, рисунків, за-
вдань для самостійної роботи та контрольних питань для кожної теми,
які перевіряють засвоєння матеріалу.

Цей посібник призначений для студентів технічних та економіч-
них спеціальностей вищих навчальних закладів денної та заочної форм
навчання.

ISBN 978-617-7055-84-5 (повне видання)

ISBN 978-617-7055-86-9 (частина 2)

УДК 517

ББК 22.11

© Рубцов М.О., Кравець В.І.,
Назарова О.П., 2015

© Видавництво МДПУ
ім. Б. Хмельницького, 2015

ЗМІСТ

Вступ	11
Розділ 8. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	13
8.1. Первісна і невизначений інтеграл	13
8.1.1. Первісна і невизначений інтеграл.....	13
8.1.2. Властивості невизначеного інтегралу	15
8.1.3. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування.....	16
8.2. Методи інтегрування	17
8.2.1. Метод компенсуючого множника і метод розкладання.....	17
8.2.2. Інтегрування методом заміни змінної або способом підстановки. Метод підведення під знак диференціалу	18
8.2.3. Метод інтегрування частинами.....	20
8.2.4. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен в знаменнику.....	21
8.3. Раціональні дроби. Елементарні раціональні дроби та їх інтегрування	24
8.3.1. Дробово-раціональні функції. Елементарні раціональні дроби I, II, III і IV видів. Інтегрування раціональних дробів I - III видів	24
8.4. Розкладання правильних раціональних дробів на елементарні I, II, III випадки. Інтегрування раціональних дробів	25
8.4.1. Розкладання правильних раціональних дробів на елементарні. Метод невизначених коефіцієнтів. Інтегрування раціональних дробів	25
8.5. Інтегрування тригонометричних функцій.....	31
8.5.1. Інтегрування функцій раціонально залежних від тригонометричних функцій: $\int R(\sin x, \cos x) dx$	31

8.5.2. Обчислення інтегралів виду: $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$	33
8.5.3. Обчислення інтегралів виду: $\int R(\sin x) \cos x dx$, $\int R(\cos x) \sin x dx$, $\int R(\operatorname{tg} x) dx$	33
8.5.4. Обчислення інтегралів виду: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$	35
8.5.5. Обчислення інтегралів виду: $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$	36
8.6. Інтегрування ірраціональних функцій	37
8.6.1. Інтегрування простих алгебраїчних ірраціональностей	37
8.6.2. Інтегрування біноміальних диференціалів	40
8.6.3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок	42
Питання для самоконтролю	43
Тести до розділу 8	44
Розділ 9. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ	47
9.1. <i>Визначений інтеграл</i>	47
9.1.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу	47
9.1.2. Означення визначеного інтегралу і його геометричний зміст	50
9.2. <i>Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення. Теорема про похідну від визначеного інтеграла із змінною верхньою межею</i>	52
9.2.1. Основні властивості визначеного інтегралу	52
9.2.2. Теорема про середнє значення	54
9.2.3. Теорема про похідну від визначеного інтеграла із змінною верхньою межею	55
9.3. <i>Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної і інтегрування частинами</i>	56

9.3.1. Обчислення визначеного інтегралу. Теорема та формула Ньютона-Лейбніца	56
9.3.2. Методи обчислення визначених інтегралів. Заміна змінної в визначенім інтегралі і інтегрування частинами	58
9.4. Невласні інтеграли. Загальна схема застосування визначених інтегралів	60
9.4.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування і від розривних функцій.....	60
9.4.2. Загальна схема застосування визначених інтегралів. Метод інтегральних сум і метод диференціалу.....	65
9.5. Обчислення площ і об'ємів за допомогою визначених інтегралів.....	67
9.5.1. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла в прямокутній системі координат	67
9.5.2. Обчислення площ плоских фігур, які обмежені кривими заданими параметрично	69
9.5.3. Обчислення площ плоских фігур в полярних координатах ..	70
9.5.4. Обчислення об'ємів тіл за площами паралельних перерізів .	72
9.5.5. Обчислення об'ємів тіл обертання відносно осей Ox і Oy	74
9.6. Обчислення довжини дуги і площі поверхні обертання за допомогою визначеного інтеграла	74
9.6.1. Обчислення довжини дуги в прямокутних координатах	74
9.6.2. Обчислення довжини дуги заданої параметричними рівняннями і в полярних координатах	76
9.6.3. Обчислення площі поверхні тіла обертання.....	77
9.7. Обчислення координат центрів мас і моментів інерції матеріальної дуги і матеріальної пластини за допомогою визначеного інтеграла	79
9.7.1. Обчислення координат центра мас та момент інерції матеріальної дуги.....	79

9.7.2. Обчислення координат центра мас та момент інерції матеріальної пластинки.....	82
9.8. Застосування визначеного інтеграла для розв'язання задач фізики й механіки	86
9.8.1. Обчислення тиску.....	86
9.8.2. Робота змінної сили.....	87
9.9. Наближене обчислення визначених інтегралів	88
9.9.1. Формула прямокутників.....	88
9.9.2. Метод трапецій	89
9.9.3. Метод Сімпсона.....	90
Питання для самоконтролю	94
Тести до розділу 9.....	95
Розділ 10. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА	98
10.1. Комплексні числа	98
10.1.1. Поняття комплексного числа. Різні форми запису комплексного числа. Формули Ейлера.....	98
10.1.2. Дії над комплексними числами.....	101
Питання для самоконтролю	105
Тести до розділу 10.....	105
Розділ 11. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	108
11.1. Диференціальні рівняння першого порядку	108
11.1.1. Диференціальні рівняння. Основні поняття.....	108
11.1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача і теорема Коші	108
11.1.3. Загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння першого порядку.....	109
11.1.4. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними.....	110
11.2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку	113

11.2.1. Поняття однорідної функції, однорідного рівняння. Однорідні диференціальні рівняння.....	113
11.2.2. Задача про параболічний прожектор	115
11.3. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Я. Бернуллі.....	117
11.3.1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод І.Бернуллі їх розв'язання	117
11.3.2. Метод варіації розв'язання лінійного диференціальні рівняння першого порядку.....	119
11.3.3. Диференціальне рівняння Я.Бернуллі і методи його розв'язання.....	120
11.4. Диференціальні рівняння другого порядку	122
11.4.1. Диференціальні рівняння другого порядку. Загальні поняття.....	122
11.4.2. Диференціальні рівняння другого порядку, які розв'язуються в квадратурах	123
11.4.3. Деякі типи диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають пониження порядку	126
11.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами	129
11.5.1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Лінійна залежність і незалежність розв'язків. Визначник Вронського	129
11.5.2. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку	132
11.5.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами	133
11.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.....	137
11.6.1. Теорема про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння другого порядку	137

11.6.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами (1-й випадок).....	137
11.6.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами (2-й випадок).....	141
11.7. <i>Метод варіації довільних сталих розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами</i>	143
11.7.1. Метод варіації довільних сталих розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.....	143
11.8. <i>Застосування диференціальних рівнянь для дослідження механічних коливань</i>	146
11.8.1. Диференціальні рівняння механічних коливань.....	146
11.8.2. Вільні коливання.....	148
11.8.3. Вимушені коливання	150
11.9. <i>Системи звичайних диференціальних рівнянь</i>	152
11.9.1. Системи звичайних диференціальних рівнянь.....	152
11.10. <i>Наближений розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку методом Ейлера</i>	156
11.10.1. Наближений розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку методом Ейлера.....	156
Питання для самоконтролю	160
Тести до розділу 11	162
Розділ 12. РЯДИ	166
12.1. <i>Числові ряди</i>	166
12.1.1. Поняття збіжності ряду. Необхідні умови збіжності. Необхідна ознака збіжності	166
12.1.2. Достатні ознаки збіжності: ознаки порівняння.....	169

12.1.3. Ознака Д'Аламбера.....	171
12.2. Достатні ознаки збіжності знакочередуваних рядів.	
Знакопозереджені ряди.....	172
12.2.1. Радикальна ознака Коші збіжності числового ряду.....	172
12.2.2. Інтегральна ознака Коші збіжності числового ряду.....	173
12.2.3. Знакопозереджені ряди. Ознака Лейбніца. Ознака залишку ряду. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність.....	174
12.3. Степеневі ряди.....	176
12.3.1. Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.....	176
12.4. Функціональні ряди.....	180
12.4.1. Мажоровні і рівномірно збіжні функціональні ряди.....	180
12.5. Ознаки збіжності функціональних рядів.....	182
12.5.1. Ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності ряду.....	182
12.5.2. Ознака Абеля рівномірної збіжності ряду.....	184
12.5.3. Ознака Діріхле рівномірної збіжності ряду.....	185
12.5.4. Властивості рівномірно збіжних рядів.....	186
12.5.5. Теорема Діні.....	187
12.5.6. Теорема про рівномірну збіжність степеневого ряду на проміжку збіжності.....	189
12.6. Ряди Тейлора й Маклорена. Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди.....	191
12.6.1. Ряди Тейлора й Маклорена.....	191
12.6.2. Розкладання функцій в степеневі ряди	
а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = e^x$;	
г) $f(x) = (1+x)^m$	192
12.6.3. Розкладання функцій в степеневі ряди	
а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = \operatorname{arcsin} x$; в) $f(x) = \ln(1 \pm x)$;	
г) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$	195

12.7. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень	197
12.7.1. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень	197
12.8. Ряди Фур'є	197
12.8.1. Ряди Фур'є. Ряди Фур'є для періодичних функцій періоду 2π . Коефіцієнти ряду Фур'є	202
12.8.2. Умови Діріхле розкладання періодичних функцій періоду 2π в ряд Фур'є	205
12.9. Розкладання функцій в ряди Фур'є	206
12.9.1. Розкладання в ряд Фур'є неперіодичних функцій. Розкладання в ряд Фур'є функцій, заданих на інтервалі $[0; \pi]$	206
12.9.2. Розкладання в ряд Фур'є періодичних функцій періоду $2l$. Зауваження	209
12.9.3. Зсув основного періоду	211
12.9.4. Розкладання в ряд Фур'є парних і непарних періодичних функцій періоду 2π	212
Питання для самоконтролю	215
Тести до розділу 12	216
Література	220

Вступ

Цей посібник з курсу вищої математики для студентів всіх спеціальностей агротехнологічного університету створений з огляду на підвищення рівня фахової підготовки при безпосередньому застосуванні фундаментальної математичної підготовки, для покращення прикладної її спрямованості.

Актуальність математики в сучасних умовах визначається в технічних, агротехнологічних, гуманітарних дослідженнях. Для більшості галузей знань вона стала не лише інструментом кількісних розрахунків, а й методом точних висновків, засобом чіткого визначення понять і постановки проблем.

Навчальний посібник написано відповідно до діючих програм курсу вищої математики для студентів всіх спеціальностей вищого технічного навчального закладу.

Посібник ставить своєю метою допомогти студенту самостійно оволодіти теоретичною базою основних математичних понять, він дає змогу майбутнім фахівцям здобути ґрунтовну математичну освіту, що відповідає найвищим запитам сучасності. Це й визначило структуру посібника. Він складений на основі лекційного курсу, який формувався на протязі декількох останніх років на кафедрі математики і фізики Мелітопольського Державного педагогічного університету та кафедри вищої математики та фізики Таврійського Державного Агротехнологічного Університету. Навчальний посібник складається з двох частин. Запропонована до Вашої уваги друга частина містить п'ять розділів. Ці розділи охоплюють: невизначений інтеграл, визначений інтеграл і його застосування, комплексні числа, диференціальні рівняння, ряди. В кожному розділі після теоретичних відомостей приведені питання для самоконтролю та тестові завдання, що дозволить перевірити якість вивченого матеріалу.

Метою авторів було подати матеріал в доступній для студентів формі та заохотити їх до самостійного осмислення вивченого. Для більшої доступності та зрозумілості матеріалу широко викори-

стовувалася геометрична та фізична інтерпретація, розв'язки типових задач наводяться з короткими поясненнями теоретичних положень; надто складні чи громіздкі доведення, а також доведення, що ґрунтуються на поняттях які не входять в рамки програми, не приводяться. При написанні посібника були використані деякі матеріали та приклади, взяті з відомих навчальних посібників та задачників, які звичайно розглядаються на заняттях зі студентами.

Посібник призначається для студентів різних форм навчання вищих технічних закладів.

Автори висловлюють щире подяку професорам, докторам наук Тіману М.П., Міхліну Ю.В., Конету І.М. за рецензування рукопису та зроблені зауваження.

ВИДАВНИЦТВО
МЕЛІТОПОЛЬСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО
ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО

