МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра Комп'ютерних наук

ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни
«**Дослідження операцій**»
для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Мелітополь
2017

Двоїста задача лінійного програмування. Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни «Дослідження операцій» для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології» – Таврійський державний агротехнологічний університет, 2017 – 20 с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов’єва О.Г.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри
«_24_» _травня__2017___р. Протокол № _16____

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_25_» __травня_____ 2017__р. Протокол № __10___
_____

ЗМІСТ

Введення

Дані методичні вказівки є керівництвом для проведення практичного заняття за темою “Двоїста задача лінійного програмування” в курсі “Дослідження операцій”.

Метою методичних вказівок є закріплення студентами вивченого теоретичного матеріалу та здобуття практичних навичок для розв’язання задач лінійного програмування.

Методичні вказівки складені з урахуванням того, що студент попередньо розібрав теоретичний матеріал та приклади, що були розглянуті на лекції.

У результаті студент повинен навчитися складати двоїсту задачу, знаходити розв’язок двоїстої задачі за розв’язком прямої і навпаки.

Практичне заняття містить основні теоретичні відомості, контрольний приклад, задачі для самостійної роботи, домашнє завдання та контрольні питання.

Дані методичні вказівки призначені для студентів економічного факультету та факультету обліку і аудиту денної форми навчання.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Тема: **Двоїста задача лінійного програмування**

Мета:
1) Навчити складати двоїсту задачу.
2) Навчити знаходити розв’язок двоїстої задачі за розв’язком прямої і навпаки.

Час: 2 год.

1.1 Теоретичні відомості

Для кожної задачі лінійного програмування (ЗЛП) можливо певним чином побудувати іншу ЗЛП, яка буде двоїстою відповідно до вихідної задачі.

Розглянемо задачу. Необхідно визначити максимальне значення цільової функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

при заданій системі обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + ... + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,l}, l \le n\right). \end{cases} \tag{2}$$

Двоїстою задачею відповідно до вихідної задачі (1)-(2) називається задача, що складається у визначенні мінімального значення функції

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min \tag{3}$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + ... + a_{ml}x_m \leq c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + ... + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m = c_m, \\ y_i \geq 0, \left(i = \overline{1,k}, k \leq m\right). \end{cases} \tag{4}$$

Задачі (1)-(2) і (3)-(4) утворюють пару, яка називається **двоїстою парою**.

Алгоритм побудови двоїстої задачі:

1) Якщо цільовій функції F вихідної задачі, що складається в визначенні максимального значення, то цільова функція F^* двоїстої задачі складатиметься в визначенні мінімального значення і навпаки.

2) Матриця A коефіцієнтів при невідомих у системі (2) і матриця A* коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень (4) пов'язанні співвідношенням

$$A^* = A^T.$$

3) Число змінних у двоїстій задачі дорівнює числу обмежень системи (2), а число обмежень у системі (4) двоїстої задачі дорівнює числу змінних вихідної задачі (2).

4) Коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції (3) є вільні члени в системі (2), а правими частинами в обмеженнях системи (4) є коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (1) вихідної задачі.

5) Нерівності в системах обмежень (2) і (4) спрямовані в різні сторони. Якщо в системі (2) присутнє рівняння, то воно переходить у нерівність "≥" в системі (4) за умови невід'ємності всіх змінних.

6) Якщо у вихідної задачі змінна $x_j \geq 0$, то j-а умова задачі (3)-(4) є нерівністю виду "≥". Якщо змінна x_j>0 або $x_j \leq 0$, то в системі (3)-(4) j-е співвідношення є рівнянням.

Кожна з задач двоїстої пари (1)-(2) і (3)-(4) є самостійною ЗЛП і може бути розв'язана незалежно одна від іншої. Слід зазначити що, при визначенні симплекс-методом оптимального плану однієї задачі, одночасно знаходять розв'язок й для іншої.

Перша (основна) теорема двоїстості. Якщо одна із взаємно двоїстих задач має оптимальний розв`язок, то його має й інша, причому оптимальні значення їх цільових функцій рівні: $F_{\max} = F^*{}_{\min}$.

Якщо кожну із взаємно двоїстих задач розв`язувати симплекс-методом, то необхідно привести їх до канонічної форми. При цьому системи обмежень цих задач будуть мати вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, (i=1,...,m); \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_i + y_{m+j} = c_j, (j=1,...,n),$$

де $x_{n+i}, \left(i=1,...,m\right), \ y_{m+j}, \left(j=1,...,n\right)$ – невід`ємні додаткові змінні вихідної та двоїстої задачі відповідно.

В таблиці 1.1 відображена відповідність між змінними взаємно двоїстих задач.

Таблиця 1.1 – Відповідність між змінними вихідної і двоїстої задач

<table>
<tr><td colspan="10" align="center">Змінні вихідної задачі</td></tr>
<tr><td colspan="5" align="center">Основні</td><td colspan="5" align="center">Додаткові</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_j</td><td>…</td><td>x_n</td><td>x_{n+1}</td><td>x_{n+2}</td><td>…</td><td>x_{n+i}</td><td>…</td><td>x_{n+m}</td></tr>
<tr><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td></td><td>$\updownarrow$</td><td></td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td></td><td>$\updownarrow$</td><td></td><td>$\updownarrow$</td></tr>
<tr><td>y_{m+1}</td><td>y_{m+2}</td><td>…</td><td>y_{m+j}</td><td>…</td><td>y_{m+n}</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>…</td><td>y_i</td><td>…</td><td>y_m</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Додаткові</td><td colspan="6" align="center">Основні</td></tr>
<tr><td colspan="12" align="center">Змінні двоїстої задачі</td></tr>
</table>

Друга теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв`язку двоїстої задачі дорівнюють абсолютним значенням оцінок оптимальності, що відповідають додатковим змінним вихідної задачі у підсумковій симплекс-таблиці.

1.2 Практична частина

1.2.1 Контрольний приклад

Задача 1

Визначити максимальне значення функції

$$F = 6x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 4x_4 - 20x_5 - 10x_6 - 7x_7$$

при заданій системі обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 \le -8, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 + x_7 \ge 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Скласти двоїсту задачу і розв'язати її геометричним методом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок вихідної задачі.

Розв'язання

Цільова функція складається у пошуку максимального значення, тому система обмежень повинна мати вигляд (2). Помножимо другу нерівність на –1, отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 \le -8, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 - x_7 \le -6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Складемо двоїсту задачу для вихідної. Для цього запишемо матрицю коефіцієнтів А вихідної задачі

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Визначимо матрицю A^T, яка є транспонованою до А

$$A^{\text{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Кількість змінних у двоїстій задачі дорівнює кількості обмежень системи вихідної задачі – двом. Тобто це змінні $y_1,\ y_2$.

Коефіцієнти при невідомих у цільовій функції двоїстої задачі дорівнюють вільним членам в системі обмежень вихідної задачі, тобто –8 і –6.

Цільова функція вихідної задачі складається в визначені максимального значення, тому цільова функція двоїстої задачі складається в визначенні мінімального значення.

Змінні $x_j, \left(j = \overline{1,7}\right)$ вихідної задачі приймають лише невід'ємні значення, тому в системі умов двоїстої задачі повинно бути сім нерівностей виду “$\ge$”.

Таким чином, двоїста задача відповідно до вихідної задачі полягає в визначенні мінімального значення функції

$$F^* = -8y_1 - 6y_2$$

при умовах

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \ge 6, \\ y_1 - y_2 \ge -4, \\ y_1 - 2y_2 \ge -10, \\ -y_1 + 2y_2 \ge -4, \\ -y_1 - 2y_2 \ge -20, \\ -y_1 \ge -10, \\ -y_2 \ge -7, \\ y_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,2}). \end{cases}$$

Розв'яжемо двоїсту задачу геометричним методом.

Побудуємо багатокутник розв'язків. Для цього будуємо напівплощини відповідно кожної нерівності, їх межи визначені відповідними прямими

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 = 6, & (1) \\ y_1 - y_2 = -4, & (2) \\ y_1 - 2y_2 = -10, & (3) \\ -y_1 + 2y_2 = -4, & (4) \\ -y_1 - 2y_2 = -20, & (5) \\ -y_1 = -10, & (6) \\ -y_2 = -7, & (7) \\ y_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,2}). \end{cases}$$

Графіком отриманих рівнянь є прямі, які проходять відповідно крізь точки

(0; 3) і (2; 0); (1)
(0;4) і (-4; 0); (2)
(0; 5) і (-10; 0); (3)
(0; -2) і (4; 0); (4)
(0; 10) і (10; 5); (5)
(10; 0) і (10; 5); (6)
(0;7) і (10; 7). (7)

Визначаємо напівплощини, які задані кожною нерівністю. Багатокутник розв'язків ABDFKLMNO зображено на рис. 5.2. Будуємо вектор $\vec{c} = \{-8;-6\}$ та пряму рівня $-8x_1 - 6x_2 = h$, перпендикулярно до $\vec{c}$.

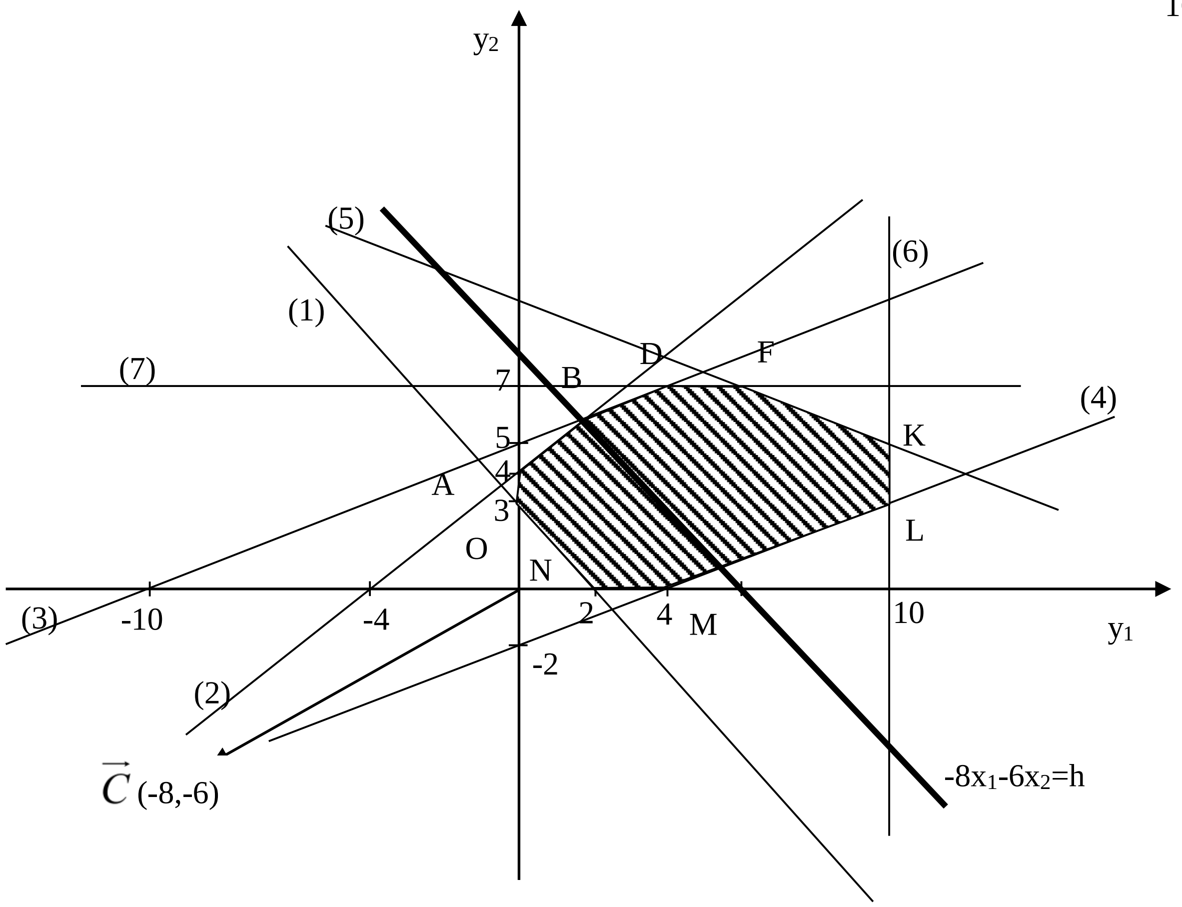

Рисунок 1.2 – Багатокутник розв'язків задачі.

Пересуваємо пряму $-8x_1 - 6x_2 = h$ в напрямку протилежному напрямкові вектора $\vec{c}$. Остання загальна точка з багатокутником розв'язку (точка K) є точкою, у якій цільова функція досягає свого мінімального значення. Точка K є точкою перетину п'ятої і шостої прямих. Координати точки К задовольняють рівнянням цих прямих.

$$\begin{cases} -y_1 = -10, \\ -y_1 - 2y_2 = -20; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 10, \\ y_2 = 5. \end{cases}$$

Таким чином, $K(10;5)$ і цільова функція F^* досягає свого мінімального значення

$$F^*_{\min} = F^*(10;5) = -110.$$

За розв'язком двоїстої задачі визначимо розв'язок прямої.

Точка K є точкою перетину п'ятої і шостої прямих. Як відомо, обмеження двоїстої задачі відповідають змінним прямої задачі. Тобто п'яте і шосте обмеження відповідають змінним x_5 і x_6, тому змінні x_5, x_6 є ненульовими, а $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Таким чином розв'язуємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} -x_5 - x_6 = -8, \\ 2x_5 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = 5, \\ x_5 = 3. \end{cases}$$

Отримані значення підставляємо в цільову функцію, одержуємо максимальне значення цільової функції, а саме

$$F_{\max} = F(0;0;0;0;3;5;0) = -110$$

Висновок

Цільова функція F вихідної задачі досягає свого максимального значення $F_{\max} = -110$ при $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 3$; $x_6 = 5$; $x_7 = 0$.

Цільова функція F^* двоїстої задачі досягає свого мінімального значення $F^*_{\min} = -110$ при $y_1 = 10$, $y_2 = 5$.

Задача 2

Раціон годівлі худоби містить харчові добавки А, В, С. У добу тварина повинна з'їдати не менш 200 г добавки А, 150 г добавки В, 100 г добавки С. Харчові добавки містяться в концентратах трьох видів К-1, К-2, К-3. Ціна концентратів за 1 кг відповідно складає 5, 4 і 10 грн. Вміст добавок в одному кг концентрату зазначено в таблиці 5.3.

Таблиця 5.3 – Вміст добавок в одному кг концентрату

Добавки	Концентрати		
	К-1	К-2	К-3
A	15	10	10
B	10	17	5
C	0	14	10

Скласти математичну модель для визначення мінімальної вартості концентратів. Відповідно до вихідної задачі скласти двоїсту задачу та розв'язати її симплекс-методом. За розв'язком двоїстої задачі визначити розв'язок вихідної.

Розв'язання

Припустимо, що необхідно x_1 кг концентрату К-1, x_2 кг концентрату К-2, x_3 кг концентрату К-3.

Для визначення оптимального раціону годівлі худоби треба розв'язати задачу, яка полягає в мінімізації собівартості

$$F = 5x_1 + 4x_2 + 10x_3$$

при наступних обмеженнях

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 200, \\ 10x_1 + 17x_2 + 5x_3 \geq 150, \\ 14x_2 + 10x_3 \geq 100, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Згідно з загальними правилами задача, яка є двоїстою по відношенню до даної, формулюється наступним чином.

Визначити максимальне значення функції

$$F^* = 200y_1 + 150y_2 + 100y_3$$

при системі обмежень

$$\begin{cases} 15y_1 + 10y_2 \le 5, \\ 10y_1 + 17y_2 + 14y_3 \le 4, \\ 10y_1 + 5y_2 + 10y_3 \le 10, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Економічна інтерпретація двоїстої задачі полягає в визначенні такого набору цін (оцінок) харчових добавок $y^* = (y_1, y_2, y_3)$, при якому загальні потреби F^* на харчові добавки будуть максимальними за умови, що витрати на харчові добавки будуть не більшими за вартість концентратів.

Розв'яжемо двоїсту задачу симплекс-методом. Приведемо задачу до канонічного виду

$$F^* = 200y_1 + 150y_2 + 100y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 15y_1 + 10y_2 + y_4 = 5, \\ 10y_1 + 17y_2 + 14y_3 + y_5 = 4, \\ 10y_1 + 5y_2 + 10y_3 + y_6 = 10, \\ y_j \ge 0, \ (j = \overline{1,6}). \end{cases}$$

Заповнюємо першу симплекс-таблицю:

1) У стовпець базис виписуємо базисні змінні y_4, y_5, y_6.

2) У стовпець $C_{бi}$ виписуємо коефіцієнти цільової функції F^* при базисних змінних.

3) У стовпець b_i виписуємо праві частини рівнянь системи обмежень, а в стовпці $y_1, \ldots y_6$ – матрицю системи.

4) В $(m+1)$-ому рядку виписуємо значення цільової функції $F_0^* = \sum_{i=1}^{3} c_{\sigma_i} \cdot b_i$ і $\Delta = \sum_{i=1}^{3} c_{\sigma_i} \cdot y_{ij} - c_j = -c_j$ для $j = 1,2 \ldots 6$.

Таким чином,

$$F^* = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0,$$

$$\Delta_1 = 0\cdot 15 + 0\cdot 10 + 0\cdot 10 - 200 = -200,$$
$$\Delta_2 = 0\cdot 10 + 0\cdot 17 + 0\cdot 5 - 150 = -150,$$
$$\Delta_3 = 0\cdot 0 + 0\cdot 14 + 0\cdot 10 - 100 = -100,$$
$$\Delta_4 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_5 = 0,$$
$$\Delta_6 = 0.$$

Таблиця 1.4 – Перша симплекс-таблиця

				200	150	100	0	0	0	
	$c_{бi}$	Базис	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	θ
1	0	y_4	5	15	10	0	1	0	0	5/15
2	0	y_5	4	10	17	14	0	1	0	4/10
3	0	y_6	10	10	5	10	0	0	1	10/10
4			0	-200	-150	-100	0	0	0	

Початковий опорний план задачі має вигляд $Y_0 = (0;0;0;5;4;10)$, $F^*(Y_0) = 200\cdot 0 + 150\cdot 0 + 100\cdot 0 = 0$. Перевіримо план на оптимальність. Тому що рядок Δ_j містить від'ємні елементи, то отриманий план не є оптимальним.

Для визначення напрямного стовпця вибираємо максимальне за модулем від'ємне значення серед Δ_j. Це $\Delta_1 = -200$. Отже напрямним є відповідний стовпець (стовпець y_1).

Для визначення напрямного рядка обчислюємо $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{i2}}$ (для $a_{i2} > 0$, $i = \overline{1,3}$). Значення $\theta_1 = \dfrac{1}{3}$ є мінімальним серед усіх значень θ_i, тому відповідний рядок (рядок y_4) є напрямним.

Заповнимо другу симплекс-таблицю.

Змінну y_1 вводимо до базису, зміну y_4 виводимо з базису. Всі елементи напрямного рядка ділимо на дозвільний елемент. Всі елементи напрямного стовпця зміняємо нулями, а дозвільний елемент – одиницею. Інші елементи таблиці перераховуємо за правилом прямокутника.

Наприклад,

$$a'_{23} = 14 - \frac{0 \cdot 10}{15} = 14;$$

$$a'_{32} = 5 - \frac{10 \cdot 10}{15} = -\frac{5}{3} \text{ і т.ін.}$$

Таблиця 1.5 – Друга симплекс-таблиця

				200	150	100	0	0	0	
	$c_{бi}$	Базис	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	θ
1	200	y_1	1/3	1	2/3	0	1/15	0	0	-
2	0	y_5	2/3	0	31/3	14	-2/3	1	0	1/21
3	0	y_6	20/3	0	-5/3	10	-2/3	0	1	2/3
4			200/3	0	-50/3	-100	40/3	0	0	

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3};0;0;0;\frac{2}{3};\frac{20}{3}\right),\ F^*(Y_1) = 200 \cdot \frac{1}{3} + 150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = \frac{200}{3}.$$

Серед значень Δ_j рядка є від'ємні, тому отриманий план Y_1 не є оптимальним. Напрямним стовпцем у другій симплекс-таблиці є стовпець y_3, тому що $\Delta_3 = -100$, а напрямним рядком – рядок y_5.

Заповнюємо третю симплекс-таблицю.

Таблиця 1.6 – Третя симплекс-таблиця

				200	150	100	0	0	0
I	$c_{бi}$	Базис	b_i	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
1	200	y_1	1/3	1	2/3	0	1/15	0	0
2	100	y_3	1/21	0	31/42	1	-1/21	1/14	0
3	0	y_6	130/21	0	-190/21	0	-4/21	-5/7	1
4			500/7	0	400/7	0	60/7	50/7	0

План $Y_2 = \left(\frac{1}{3};0;\frac{1}{21};0;0;1;\frac{30}{21}\right)$ є оптимальним, тому що в рядку Δ_j немає від\`ємних значень. При даному плані

$$F^*(Y_2) = 200 \cdot \frac{1}{3} + 150 \cdot 0 + 100 \cdot \frac{1}{21} = \frac{500}{7}.$$

Розв'язком двоїстої задачі є $y_1 = \frac{1}{3} = 0{,}67;$ $y_2 = 0;$ $y_3 = \frac{1}{21} = 0{,}048;$ $y_4 = 0;$ $y_5 = 0;$ $y_6 = \frac{130}{21} = 6{,}19;$ $F^* = \frac{500}{7} = 71{,}4.$

Визначимо оптимальний розв'язок вихідної задачі за допомогою теореми двоїстості. На підставі першої теореми двоїстості

$F = F^* = \dfrac{500}{7} = 71{,}4$. На підставі другої теореми двоїстості компоненти x_1, x_2, x_3 оптимального розв'язку прямої задачі дорівнює відповідно змінним y_4, y_5, y_6 у підсумковій симплекс таблиці, тобто $x_1 = \dfrac{60}{7} = 8{,}571; x_2 = \dfrac{50}{7} = 7{,}143; x_3 = 0$. Таким чином, мінімальна вартість концентратів складає 71,4 грн.

Висновок

Для забезпечення необхідної потреби змісту добавок у раціоні необхідно придбати з мінімальною вартістю, що дорівнює 71,4 грн., 8,571 кг концентрату К-1 і 7,143 кг концентрату К-2. Споживання добавки виду В поверх норми складає 57,143 кг.

1.3 Самостійна робота

Задача 1

Визначити максимальне значення функції

$F = 6x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 20x_4 - 10x_5 \to \max$ при заданій системі обмежень:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 11, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq -16. \end{cases}$$

Скласти двоїсту задачу і розв'язати її геометричним способом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок вихідної задачі.

Висновок

Пряма задача

Цільова функція F досягає свого максимального значення $F_{\max} = -190$ при $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 8;\ x_5 = 3.$

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого мінімального значення $F^*_{\min} = -190$ при $y_1 = 10,\ y_2 = 5.$

Задача 2

Визначити максимальне значення функції

$F = 6x_1 - 4x_2 - 20x_3 - 10x_4 - 7x_5 \to \max$ при заданій системі обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 \geq 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq -6. \end{cases}$$

Скласти двоїсту задачу і розв'язати її геометричним способом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої задачі.

Висновок

Пряма задача

Цільова функція F досягає свого максимального значення $F_{\max} = -90$ при $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$; $x_4 = 3$; $x_5 = 0$.

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого мінімального значення $F^*_{\min} = -90$ при $y_1 = 5$, $y_2 = 10$.

Задача 3

Визначити мінімальне значення функції

$F = -6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 20x_4 + 7x_5 \to \min$ при заданій системі обмежень:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 \leq -6. \end{cases}$$

Скласти двоїсту задачу і розв'язати її геометричним способом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої задачі.

Висновок

Пряма задача

Цільова функція F досягає свого мінімального значення $F_{\min} = -168$ при $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4{,}5$; $x_4 = 7{,}5$; $x_5 = 0$.

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого максимального значення $F^*_{\max} = -168$ при $y_1 = 12$, $y_2 = 4$.

Задача 4

Визначити мінімальне значення функції

$F = -12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 20x_5 \to \min$ при заданій системі обмежень:

$$\begin{cases} -6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq 1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq -6. \end{cases}$$

Скласти двоїсту задачу і розв'язати її геометричним способом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої задачі.

Висновок

Пряма задача

Цільова функція F досягає свого мінімального значення $F_{\min} = 38$ при $x_1 = 0$; $x_2 = $-8; $x_3 = 7$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$.

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого максимального значення $F^*_{\max} = 38$ при $y_1 = 2$, $y_2 = 6$.

Задача 5

Визначити мінімальне значення функції
$F = 12x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 4x_4 - 20x_5 \rightarrow \max$ при заданій системі обмежень:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 \ge 3. \end{cases}$$

Скласти двоїсту задачу і розв'язати її геометричним способом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої задачі.

Висновок

Пряма задача

Цільова функція F досягає свого максимального значення $F_{\max} = 12$ при $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1{,}75$; $x_5 = -0{,}25$.

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого мінімального значення $F^*_{\min} = 12$ при $y_1 = 12$, $y_2 = 4$.

Задача 6

Раціон годівлі худоби містить харчові добавки A, B, C. У добу тварина повинна з'їдати не менш 200 г добавки A, 350 г добавки B, 90 г добавки C. Харчові добавки містяться в концентратах трьох видів К-1, К-2, К-3. Ціна концентратів за 1 кг відповідно 10, 5, 12 грн. Вміст добавок в одному кг концентратів зазначено в таблиці 5.7:

Таблиця 5.7 – Вміст добавок в одному кг концентратів

Добавки	Концентрати		
	К-1	К-2	К-3
A	17	5	0
B	14	10	10
C	10	15	25

Скласти математичну модель для одержання мінімальної вартості концентратів. Скласти пряму і двоїсту задачі. Розв'язати двоїсту симплекс-методом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої.

Висновок

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого максимального значення $F^*_{\max} = 182{,}5$ при $y_1 = 0{,}3$; $y_2 = 3{,}5$; $y_3 = 0$; $y_4 = 0$; $y_5 = 0$; $y_6 = 8{,}5$.

Пряма задача

Для забезпечення необхідної потреби змісту добавок у раціоні необхідно придбати з мінімальною вартістю, що дорівнює 182,5 грн., 2,5 кг концентрату К-1 і 31,5 кг концентрату К-2. Споживання добавки виду C поверх норми складає 407,5 кг.

Задача 7

Раціон годівлі худоби містить харчові добавки А, В, С. У добу тварина повинна з'їдати не менш 400 г добавки А, 250 г добавки В, 300 г добавки С. Харчові добавки містяться в концентратах трьох видів К-1, К-2, К-3. Ціна концентратів за 1 кг відповідно 10, 6, 8 грн. Вміст добавок в одному кг концентратів зазначено в таблиці 5.8:

Таблиця 5.8 – Вміст добавок в одному кг концентратів

Добавки	Концентрати		
	К-1	К-2	К-3
А	35	50	15
В	17	20	10
С	0	30	45

Скласти математичну модель для одержання мінімальної вартості концентратів. Скласти пряму і двоїсту задачі. Розв'язати двоїсту симплекс-методом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої.

Висновок

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого максимального значення $F^*_{\max} = 75$ при $y_1 = 0$; $y_2 = 0{,}3$; $y_3 = 0$; $y_4 = 4{,}9$; $y_5 = 0$; $y_6 = 0$.

Пряма задача

Для забезпечення необхідної потреби змісту добавок у раціоні необхідно придбати з мінімальною вартістю, що дорівнює 75 грн., 12,5 кг концентрату К-2 . Споживання добавки виду А поверх норми складає 225 кг, добавки виду С – 75 кг.

Задача 8

Раціон годівлі худоби містить харчові добавки А, В, С. У добу тварина повинна з'їдати не менш 300 г добавки А, 160 г добавки В, 320 г добавки С. Харчові добавки містяться в концентратах трьох видів К-1, К-2, К-3. Ціна концентратів за 1 кг відповідно 10, 8, 12 грн. Вміст добавок в одному кг концентратів зазначено в таблиці 5.9:

Таблиця 5.9 – Вміст добавок в одному кг концентратів

Добавки	Концентрати		
	К-1	К-2	К-3
А	35	10	15
В	20	0	4
С	15	10	28

Скласти математичну модель для одержання мінімальної вартості концентратів. Скласти пряму і двоїсту задачі. Розв'язати двоїсту симплекс-методом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої.

Висновок

Двоїста задача

Цільова функція досягає свого максимального значення $F^{*}_{\max} = 160$ при $y_1 = 0{,}3$; $y_2 = 0{,}2$; $y_3 = 0{,}4$; $y_4 = 0$; $y_5 = 4$; $y_6 = 0$.

Пряма задача

Для забезпечення необхідної потреби змісту добавок у раціоні необхідно придбати з мінімальною вартістю, що дорівнює 160 грн., 6,4 кг концентрату К-1 і 8 кг концентрату К-2. Споживання добавки виду А поверх норми складає 44 кг.

Задача 9

Раціон годівлі худоби містить харчові добавки А, В, С. У добу тварина повинна з'їдати не менш 300 г добавки А, 100 г добавки В, 250 г добавки С. Харчові добавки містяться в концентратах трьох видів К-1, К-2, К-3. Ціна концентратів за 1 кг відповідно 12, 10, 5 грн. Вміст добавок в одному кг концентратів зазначено в таблиці 5.10:

Таблиця 5.10 – Вміст добавок в одному кг концентратів

Добавки	Концентрати		
	К-1	К-2	К-3
А	12	8	16
В	0	12	14
С	15	30	10

Скласти математичну модель для одержання мінімальної вартості концентратів. Скласти пряму і двоїсту задачі. Розв'язати двоїсту симплекс-методом. За розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої.

Висновок

Двоїста задача

Цільова функція F^{*} досягає свого максимального значення $F^{*}_{\max} = 112{,}5$ при $y_1 = 0{,}125$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0{,}3$; $y_4 = 6$; $y_5 = 0$; $y_6 = 0$.

Пряма задача

Для забезпечення необхідної потреби змісту добавок у раціоні необхідно придбати з мінімальною вартістю, що дорівнює 112,5 грн., 2,5 кг концентрату К-2 і 17,5 кг концентрату К-3. Споживання добавки виду В поверх норми складає 145 кг.

Задача 10

Раціон годівлі худоби містить харчові добавки А, В, С. У добу тварина повинна з'їдати не менш 270 г добавки А, 150 г добавки В, 250 г добавки С. Харчові добавки містяться в концентратах трьох видів К-1, К-2, К-3. Ціна концентратів за 1 кг відповідно 10, 8, 7 грн. Вміст добавок в одному кг концентратів зазначено в таблиці 5.11:

Таблиця 5.11 – Вміст добавок в одному кг концентратів

Добавки	Концентрати		
	К-1	К-2	К-3
A	17	5	0
B	14	10	10
C	10	15	25

Скласти математичну модель для одержання мінімальної вартості концентратів. Скласти пряму і двоїсту задачі. Розв’язати двоїсту симплекс-методом. За розв’язком двоїстої задачі знайти розв’язок прямої.

Висновок

Двоїста задача

Цільова функція F^* досягає свого максимального значення $F^*_{\max} = 253{,}5$ при $y_1 = 0{,}8$; $y_2 = 0{,}25$; $y_3 = 0$; $0\,y_4 = 0{,}2$; $y_5 = 0$; $y_6 = 0$.

Пряма задача

Для забезпечення необхідної потреби змісту добавок у раціоні необхідно придбати з мінімальною вартістю, що дорівнює 253,5 грн., 8,25 кг концентрату К-2 і 37,5 кг концентрату К-3. Споживання добавки виду С поверх норми складає 749 кг.

5.2 Контрольні питання

1) Яка задача називається двоїстою?
2) Як скласти двоїсту задачу стосовно наданої?
3) Яка матриця називається транспонованою?
4) Сформулювати теореми двоїстості.
5) Як знайти розв’язок двоїстої задачі, якщо вихідна задача розв’язана симплекс-методом?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. Вузов/И.Л. Акулич.- М.: Высш. шк., 1986.- 319 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України/О.В. Боровик, Л.В. Боровик.- К.:Центр учбової літератури,2007
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
4. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник/І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури,2007 – 232 с.
5. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"/Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с..