МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра Комп'ютерних наук

ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни
«**Дослідження операцій**»
для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Мелітополь
2017

Двоїстий симплекс-метод. Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни «Дослідження операцій» для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» – Таврійський державний агротехнологічний університет, 2017 – 20 с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов'єва О.Г.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри
«_24_» _травня__2017_р. Протокол № __16___

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_25_» _травня_ 2017_р. Протокол № _10____

ЗМІСТ

Введення

Дані методичні вказівки є керівництвом для проведення практичного заняття за темою "Двоїстий симплекс-метод" в курсі "Дослідження операцій".

Метою методичних вказівок є закріплення студентами вивченого теоретичного матеріалу та здобуття практичних навичок для розв'язання задач лінійного програмування.

Методичні вказівки складені з урахуванням того, що студент попередньо освоїв теоретичний матеріал та приклади, що були розглянуті на лекції.

У результаті студент повинен навчитися знаходити розв'язок задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом.

Практичне заняття містить основні теоретичні відомості, контрольний приклад, задачі для самостійної роботи та контрольні питання.

Дані методичні вказівки призначені для студентів факультету інженерії та комп'ютерних технологій денної форми навчання.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

Тема: **Двоїстий симплекс-метод**

Мета: 1) Навчити розв’язувати задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом.

2) Навчити перевіряти псевдоплан задачі на оптимальність.

3) Навчити переходити до нового псевдоплану задачі.

Час: 2 год.

1.1 Теоретичні відомості

Двоїстий симплекс-метод використовується для знаходженні розв’язку задач лінійного програмування (ЗЛП), що записана у формі основної задачі, для якої серед векторів P_j маємо m одиничних та довільних b_i.

Розглянемо ЗЛП. Необхідно визначити максимальне значення цільової функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

при заданій системі обмежень

$$\begin{cases} x_1 + a_{11}x_{m+1} + a_{12}x_{m+2} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{21}x_{m+1} + a_{22}x_{m+2} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_m + a_{m1}x_{m+1} + a_{m2}x_{m+2} + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2}$$

де одиничними є вектора $P_1, P_2, ..., P_m$ і серед b_i є від'ємні.

Розв’язок системи рівнянь (2) має вигляд $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$. Серед b_i є від'ємні. Тому X не є планом задачі.

Розв’язок $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ називається **псевдопланом** задачі (1)-(2), якщо усі $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \, (j = \overline{1, n})$ додатні.

Теорема 1 Якщо в псевдоплані $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ є хоча б одне від'ємне значення b_i, таке що всі $a_{ij} \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$, то задача (1)-(2) взагалі не має планів.

Теорема 2 Якщо в пседоплані $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ є від'ємні значення b_i такі, що для кожного з них існує хоча б одне $a_{ij} < 0$, то можна перейти до нового псевдоплану, при якому значення цільової функції задачі (1)-(2) не зменшується.

Алгоритм розв'язку ЗЛП двоїстим симплекс-методом

1) Складаємо симплекс-таблицю. У стовпці b_i є від'ємні значення. Якщо таких значень немає і всі $\Delta_j \geq 0$, то такий план є оптимальним.
2) Оптимальний план визначаємо переходом від однієї симплекс-таблиці до іншої, поки значення стовпця b_i будуть додатними. При цьому завжди всі $\Delta_j \geq 0$.
3) Вибираємо $\max\limits_{b_i < 0} |b_i|$ (наприклад, це b_l). Відповідно x_l виключаємо з базису.
4) Знаходимо $\theta = -\Delta_j / a_{lj}$ $(a_{lj} < 0)$для визначення нової базисної змінної. Тоді $\min\limits_{a_{lj} < 0} \left(-\Delta_j / a_{lj}\right)$відповідає змінній, яку вводимо в базис (наприклад, це r-е значення).

5) Здійснюємо перехід до нової симплекс-таблиці за загальним правилом, де a_{lr} є дозвільним елементом.

1.2 Практична частина

1.2.1 Контрольний приклад

Задача

Раціон годівлі худоби містить суміш мінеральних речовин A, B, C. У добу тварина повинна отримати суміш до складу якої входить не менше 4 од. речовини A, 6 од. - речовини B і 6 од. - речовини C. Речовини знаходяться в сировині чотирьох видів С-1, С-2, С-3, С-4. Кількість одиниць речовини, що знаходиться в 1 кг сировини кожного виду, вказано в таблиці 6.1.

Таблиця 1.1 - Вміст речовин в 1 кг сировини

Речовина	Кількість одиниць речовини, що утримується в 1 кг сировини виду			
	С-1	С-2	С-3	С-4
A	1	1	-	2
B	2	1	2	-
C	1	1	2	-
Ціна 1 кг сировини	4	7	8	5

Скласти математичну модель для одержання необхідної суміші з мінімальною вартістю витраченої сировини. Розв'язати побудовану задачу двоїстим симплекс-методом.

Розв'язання

Припустимо, що для одержання суміші необхідно витратити сировини С-1 - x_1 кг, сировини С-2 - x_2 кг, сировини С-3 - x_3 і сировини С-4 - x_4 кг.

Таким чином, маємо наступну математичну задачу: серед усіх розв’язків системи обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

знайти такий, при якому цільова функція $F = 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4$ приймає мінімальне значення.

Приводимо задачу до вигляду (1)-(2).

1) Для цього помножимо на -1 коефіцієнти цільової функції та нерівності системи обмежень.

$$F' = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_4 \le -4, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 \le -6, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \le -6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2) Приводимо задачу до канонічного вигляду. Одержимо задачу знаходження максимального значення цільової функції

$$F' = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max$$

при системі обмежень:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = -4, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -6, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_7 = -6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Заповнюємо першу симплекс-таблицю.

1) У стовпець базис заносимо базисні змінні x_5, x_6, x_7.

2) У стовпець $C_{бi}$ заносимо коефіцієнти цільової функції при базисних змінних.

3) У стовпець b_i заносимо праві частини рівнянь системи обмежень, а в стовпці $x_1,\ldots x_7$ - матрицю системи обмежень.

4) В $(m+1)$-ому рядку заносимо значення цільової функції $F_0' = \sum_{i=1}^{3} c_{b_i} b_i$ і

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} c_i a_{ij} - c_j \ (j = \overline{1,7}).$$

5) Значення останнього рядка, $\theta_j = -\Delta_j / a_{ij}, (j = \overline{1,7})$ для $a_{ij} < 0$ напрямного рядка. Напрямний рядок вибираємо по максимальному за модулем від'ємному b_i.

6) Проводимо розрахунки:

$$F' = 0 \cdot (-4) + 0 \cdot (-6) + 0 \cdot (-6) = 0,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) - (-4) = 4,$$
$$\Delta_2 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) - (-7) = 7,$$
$$\Delta_3 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) - (-8) = 8,$$
$$\Delta_4 = 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - (-5) = 5,$$
$$\Delta_5 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_7 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

$$\theta_1 = \frac{-4}{-2}, \quad \theta_2 = \frac{-7}{-1}, \quad \theta_3 = \frac{-8}{-2}$$

7) Для визначення напрямного стовпця вибираємо $\min\limits_{j=\overline{1,7}}(\theta_j)$.

Таблиця 1.2 – Перша симплекс-таблиця

				-4	-7	-8	-5	0	0	0
	базис	$c_{бi}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_5	0	-4	-1	-1	0	-2	1	0	0
2	x_6	0	-6	-2	-1	-2	0	0	1	0
3	x_7	0	-6	-1	-1	-2	0	0	0	1
4			0	4	7	8	5	0	0	0
θ				$\frac{-4}{-2}$	$\frac{-7}{-1}$	$\frac{-8}{-2}$	-	-	-	-

Початковий псевдоплан задачі $X_0 = (0;0;0;0;-4;-6;-6)$, значення цільової функції $F'(X_0) = 0$.

Перевіримо план на оптимальність. План не є оптимальним, тому що стовпець b_i містить від'ємні елементи.

Для визначення напрямного рядка знаходимо $\max\limits_{b_i<0} |b_i|$. Напрямним рядком є рядок x_6.

Для визначення напрямного стовпця вибираємо $\min\limits_{j=\overline{1,7}}(\theta_j)$. Напрямним стовпцем є стовпець x_1.

Заповнимо другу симплекс-таблицю.

1) Змінну x_1 вводимо до базису, зміну x_6 виводимо з базису.

2) Всі елементи напрямного рядка ділимо на дозвільний елемент.

3) Всі елементи напрямного стовпця заміняємо нулями, а напрямний елемент одиницею.

4) Інші елементи таблиці перераховуємо за правилом прямокутника.

Наприклад, $a'_{23} = -1 - \frac{(-1)(-1)}{-2} = -\frac{1}{2}$; $a'_{32} = -2 - \frac{(-1)(-2)}{-2} = -1$ і т.п.

Таблиця 1.3 – Друга симплекс-таблиця

				-4	-7	-8	-5	0	0	0
	базис	$c_{б\,i}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_5	0	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	-2	1	$-\frac{1}{2}$	0
2	x_1	-4	3	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0
3	x_7	0	-3	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
4			-12	0	5	4	5	0	2	0
θ					$\frac{-5}{-1/2}$	$\frac{-4}{-1}$	-	-	$\frac{-2}{-1/2}$	-

План $X_1 = (3;0;0;0;-1;0;-3)$, значення цільової функції $F'(X_1) = -12$.

Перевіримо план на оптимальність. План не є оптимальним, тому що стовпець b_i містить від’ємні елементи.

Для визначення напрямного рядка знаходимо $\max\limits_{b_i<0}|b_i|$. Напрямним рядком є рядок x_7.

Для визначення напрямного стовпця вибираємо $\min\limits_{j=\overline{1,7}}(\theta_j)$. Напрямним стовпцем є стовпець x_3.

Заповнимо третю симплекс-таблицю.

Таблиця 1.4 – Третя симплекс-таблиця

				-4	-7	-8	-5	0	0	0
	базис	$c_{б\,i}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_5	0	-4	0	-1	0	-2	1	-1	1
2	x_1	-4	0	1	0	0	0	0	-1	1
3	x_3	-8	3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	-1
4			-24	0	3	0	5	0	0	4
θ				-	$\frac{-3}{-10}$	-	$\frac{-5}{-2}$	-	$\frac{-1}{-1}$	-

План $X_2 = (0; 0;3;0;-4;0;0)$, значення цільової функції $F'(X_2) = -24$

.

Перевіримо план на оптимальність. План не є оптимальним, тому що стовпець b_i містить від'ємні елементи.

Для визначення напрямного рядка знаходимо $\max\limits_{b_i<0} |b_i|$. Напрямним рядком є рядок x_5.

Для визначення напрямного стовпця вибираємо $\min\limits_{j=\overline{1,7}} (\theta_j)$. Напрямним стовпцем є стовпець x_6.

Заповнимо четверту симплекс-таблицю.

Таблиця 1.5 – Четверта симплекс-таблиця

				-4	-7	-8	-5	0	0	0
	$x_{б_i}$	$c_{б\,i}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_6	0	4	0	1	0	2	-1	1	-1
2	x_1	-4	4	1	1	0	2	-1	0	0
3	x_3	-8	1	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
4			-24	0	3	0	5	0	0	4

Отриманий план $X_3 = (4; 0;1;0;0;4;0)$ є оптимальним. Максимальне значення цільової функції $F'(X_3) = -24$. Функція $F = -F'$ приймає мінімальне значення рівне 24.

Висновок: При даному плані мінімальні витрати на приготування необхідної суміші складатимуть 24 грн. При цьому використовується 4 од. сировини С-1 та 1 од. сировини С-3.

1.2.2 Самостійна робота

1. $F=\frac{1}{3}x_1+x_4\to\min$ $\begin{cases}-12x_1-6x_2+18x_4\ge 1\\-12x_1-6x_3+18x_4\ge 1\\-3x_1+6x_4-3x_5\ge 1\\x_i\ge 0,\ i=1,5\end{cases}$	**2.** $F=\frac{1}{2}x_1+x_5\to\min$ $\begin{cases}-28x_1-7x_3+28x_5\ge 1\\-28x_1-7x_2+49x_5\ge 2\\-14x_1-28x_4+49x_5\ge 5\end{cases}$
3. $F=\frac{1}{2}x_2+3x_4\to\min$ $\begin{cases}-5x_1+5x_2+4x_4\ge 1\\-5x_2-x_3+2x_4\ge 1\\10x_2-x_4-x_5\ge 1\end{cases}$	**4.** $F=x_1+\frac{1}{4}x_4\to\min$ $\begin{cases}-4x_1+32x_4-4x_5\ge 3\\4x_1-4x_2-4x_4\ge 2\\8x_1-4x_3-4x_4\ge 5\end{cases}$
5. $F=x_1+5x_4\to\min$ $\begin{cases}12x_1-3x_4-3x_5\ge 8\\-3x_1-3x_3+9x_4\ge 8\\-x_1-3x_2+3x_4\ge 3\end{cases}$	**6.** $F=\frac{1}{2}x_2+2x_5\to\min$ $\begin{cases}x_2-x_3+x_5\ge 3\\-x_1-2x_2+4x_5\ge 1\\x_2-x_4-x_5\ge 1\end{cases}$
7. $F=\frac{1}{2}x_1+\frac{7}{2}x_4\to\min$ $\begin{cases}4x_2-2x_3+2x_4\ge 7\\-2x_1-2x_2+2x_4\ge 1\\6x_1-2x_4-2x_5\ge 5\end{cases}$	**8.** $F=x_2+\frac{1}{6}x_3\to\min$ $\begin{cases}6x_2-3x_3-3x_4\ge 1\\6x_2+6x_3-6x_5\ge 7\\-3x_1-3x_2+9x_3\ge 1\end{cases}$

9. $F=5x_1+\frac{3}{2}x_4\to\min$ $\begin{cases}-3x_1-3x_3+3x_4\ge 1\\ 2x_1+2x_4-2x_5\ge 1\\ 4x_1-2x_2-2x_4\ge 1\end{cases}$	**10.** $F=\frac{1}{6}x_1+\frac{2}{7}x_3\to\min$ $\begin{cases}7x_1-5x_3-x_5\ge 1\\ -3x_1-x_2+14x_3\ge 10\\ x_1+8x_3-x_4\ge 8\end{cases}$
11. $F=2x_4+\frac{1}{3}x_5\to\min$ $\begin{cases}-x_3+5x_4+4x_5\ge 18\\ -x_1-3x_4+4x_5\ge 9\\ -x_2+20x_4-x_5\ge 14\end{cases}$	**12.** $F=3x_3+8x_5\to\min$ $\begin{cases}-x_2-2x_3+10x_5\ge 4\\ -x_1+3x_3+5x_5\ge 10\\ 2x_3-x_4-x_5\ge 2\end{cases}$
13. $F=3x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases}-x_1+6x_2+2x_3\ge 9\\ 11x_2-x_3-x_5\ge 6\\ -10x_2+14x_3-x_4\ge 13\end{cases}$	**14.** $F=10x_1+7x_5\to\min$ $\begin{cases}-2x_1-x_4+12x_5\ge 9\\ x_1-x_3+4x_5\ge 10\\ 4x_1-x_2-2x_5\ge 14\end{cases}$
15. $F=5x_3+3x_5\to\min$ $\begin{cases}-x_2-2x_3+4x_5\ge 11\\ 5x_3-x_4-x_5\ge 14\\ -x_1-x_3+3x_5\ge 7\end{cases}$	**16.** $F=3x_2+x_5\to\min$ $\begin{cases}2x_2-x_3+18x_5\ge 20\\ -x_1-x_2+15x_5\ge 7\\ 5x_2-x_4-x_5\ge 9\end{cases}$
17. $F=12x_1+\frac{1}{13}x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3\ge 7\\ -x_1+3x_3-x_5\ge 3\\ -2x_1+3x_3-x_4\ge 1\end{cases}$	**18.** $F=7x_1+10x_5\to\min$ $\begin{cases}x_1-x_3+17x_5\ge 19\\ 2x_1-x_2+28x_5\ge 17\\ x_1-x_4+2x_5\ge 3\end{cases}$

19. $F = 2x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 + 2x_4 \ge 1 \\ -4x_2 + 32x_3 - 4x_4 \ge 7 \\ -8x_3 + 16x_4 - 4x_5 \ge 1 \end{cases}$	**20.** $F = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \to \min$ $\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 + 5x_4 \ge 2 \\ -20x_2 - 5x_3 + 25x_4 \ge 1 \\ -15x_2 + 30x_4 - 10x_5 \ge 1 \end{cases}$
21. $F = \frac{2}{3}x_2 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} -4x_2 - 4x_3 + 8x_4 \ge 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 6x_4 \ge 1 \\ 8x_2 - 2x_4 - 4x_5 \ge 7 \end{cases}$	**22.** $F = x_2 + \frac{1}{2}x_5 \to \min$ $\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 + 20x_5 \ge 2 \\ 5x_2 - 10x_3 - 5x_5 \ge 3 \\ -5x_2 - 15x_4 + 15x_5 \ge 1 \end{cases}$
23. $F = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_4 \ge 5 \\ -x_2 + 3x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_2 - x_3 - x_4 \ge 2 \end{cases}$	**24.** $F = \frac{1}{7}x_2 + 10x_5 \to \min$ $\begin{cases} 5x_2 - x_4 - 4x_5 \ge 20 \\ 4x_2 - x_3 - 2x_5 \ge 9 \\ -x_1 + 6x_2 - x_5 \ge 18 \end{cases}$
25. $F = \frac{1}{9}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 \ge 5 \\ -x_1 + 4x_2 - x_5 \ge 18 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \ge 13 \end{cases}$	**26.** $F = 5x_2 + 7x_4 \to \min$ $\begin{cases} 10x_2 - x_3 - x_4 \ge 16 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_4 \ge 12 \\ 6x_2 + 2x_4 - x_5 \ge 17 \end{cases}$
27. $F = 7x_1 + 10x_5 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_3 + 17x_5 \ge 19 \\ 2x_1 - x_2 + 28x_5 \ge 17 \\ x_1 - x_4 + 2x_5 \ge 3 \end{cases}$	**28.** $F = \frac{1}{2}x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} -2x_3 - 8x_4 - 2x_5 \ge 1 \\ -6x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 3 \\ -2x_1 - 2x_3 + 6x_4 \ge 1 \end{cases}$

29.	**30.**
$F=\frac{2}{3}x_1+5x_3\to\min$ $\begin{cases}-6x_1-6x_3-6x_4\ge 1\\ -12x_1-6x_2+18x_3\ge 11\\ 24x_1-6x_3-6x_5\ge 7\end{cases}$	$F=\frac{1}{7}x_1+x_3\to\min$ $\begin{cases}7x_1+7x_3-7x_5\ge 4\\ -x_1-x_2-x_3\ge 1\\ -63x_1-7x_4\ge 9\end{cases}$

1.2.4 Контрольні питання

1) Описати алгоритм двоїстого симплекс-методу.
2) Що називається псевдопланом задачі?
3) Як визначити напрямний рядок у двоїстому симплекс-методі?
4) Як визначити напрямний стовпець у двоїстому симплекс-методі?
5) Сформулюєте критерій оптимальності плану розв'язку ЗЛП.
6) В якому випадку ЗЛП взагалі не має планів?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. Вузов/И.Л. Акулич.- М.: Высш. шк., 1986.- 319 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України/О.В. Боровик, Л.В. Боровик.- К.:Центр учбової літератури,2007
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
4. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник/І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури,2007 – 232 с.
5. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"/Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.