

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЙНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

Кафедра Комп'ютерних наук

**ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО
ПРОГРАМУВАННЯ**

Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни
«Дослідження операцій»
для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Мелітополь
2017

Задачі динамічного програмування. Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни «Дослідження операцій» для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» – Таврійський державний агротехнологічний університет, 2017 – 29с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов'єва О.Г.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри
«_24_» листопада_2017__р. Протокол №_06_____

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_30_» листопада 2017 р. Протокол № 4

ЗМІСТ

Введення.....	5
Лабораторна робота № 12.....	5
1.1 Порядок виконання роботи	5
1.2 Завдання для самостійної підготовки.....	5
1.3 Теоретичні відомості.....	5
1.4 Практична частина	6
1.5 Самостійна робота.....	18
1.6 Контрольні питання	28
Список літератури	29

ВВЕДЕННЯ

Дані методичні вказівки є керівництвом для проведення практичного заняття за темою «Задачі динамічного програмування» в курсі “Дослідження операцій”.

Метою методичних вказівок є закріплення студентами вивченого теоретичного матеріалу та здобуття практичних навичок для розв’язання задач лінійного програмування.

Методичні вказівки складені з урахуванням того, що студент попередньо освоїв теоретичний матеріал та приклади, що були розглянуті на лекції.

У результаті студент повинен навчитися знаходити розв’язок задач нелінійного програмування.

Практичне заняття містить основні теоретичні відомості, контрольний приклад, задачі для самостійної роботи та контрольні питання.

Дані методичні вказівки призначені для студентів факультету інженерії та комп’ютерних технологій денної форми навчання

12 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №12

Тема: Задачі динамічного програмування

Мета: 1) Навчити розв'язувати задачі динамічного програмування.
2) Навчити знаходити оптимальний план розподілу ресурсів.

Час: 2 год.

1.1 Порядок виконання роботи

- Представити викладачу виконане домашнє завдання.
- Проробити практичну частину.
- Виконати домашнє завдання.

1.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- вивчити конспект лекцій;
- опрацювати рекомендовану літературу: [2] с. 120-154.

1.3 Теоретичні відомості

Математична постановка задачі складається у визначенні найбільшого значення функції

$$F = \sum_{i=1}^n f_1(x_i) \quad (1)$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^n x_i = S \quad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Для розв'язання задачі необхідно скласти основне функціональне рівняння Беллмана

$$F_n(X^0) = \max[W_1(X^{(0)}, u_1) + \dots + W_n(X^{(n-1)}, u_n)], \quad (4)$$

$$F_{n-k}(X^{(k)}) = \max_{u_{k+1}}[W_{k+1}(X^{(k)}, u_{k+1}) + F_{n-k-1}(X^{(k+1)})], (k = \overline{0, n-1}).$$

1.4 Практична частина

Задача 1

До початку поточної п'ятирічки на підприємстві встановлене нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від часу його використання підприємством, а також залежність витрат на зміст і ремонт устаткування при різному часі його використання наведені в табл. 1.

Таблиця 1

	Час τ , протягом якого використовується обладнання (років)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(\tau)$ у вартості вираженні (тис. грн.)	80	75	65	60	60	55
Щорічні витрати $Z(\tau)$, пов'язані зі змістом і ремонт ом устаткування (тис. грн.)	20	25	30	35	45	55

Знаючи, що витрати, пов'язані із придбанням і установкою нового обладнання, ідентичного із установленим, становлять 40 тис.грн., а заміне обладнання списується, скласти такий план заміни обладнання протягом п'ятирічки, при якому загальний прибуток за даний період часу максимальна.

Розв'язання.

Цю задачу можна розглядати як задачу динамічного програмування, у якому як система S виступає обладнання. Стану цієї системи визначаються фактичним часом використання обладнання (його віком) τ , тобто описуються єдиним параметром τ .

В якості керувань виступають рішення про заміну й збереження обладнання, прийняті на початку кожного року. Позначимо через u_1 рішення про збереження обладнання, а через u_2 - рішення про заміну обладнання. Тоді завдання полягає в знаходженні такої стратегії керування, обумовленої рішеннями, прийнятими на початок кожного року, при якій загальний прибуток підприємства за п'ятирічку є максимальною.

Таким чином, ми сформулювали вихідну задачу в термінах задачі динамічного програмування. Ця задача має властивості аддитивності й відсутності післядії. Отже, є рішення можна знайти за допомогою описаного вище алгоритму рішення задачі динамічного програмування, реалізованого у два етапи. На першому етапі при русі від початку 5-го року п'ятирічки до початку 1-го року для кожного припустимого стану обладнання знайдемо умовне оптимальне керування (рішення) а на другому етапі при русі від початку 1-го року п'ятирічки до початку 5-го року з умовних оптимальних рішень для кожного року складемо оптимальний план заміни обладнання на п'ятирічку.

Для визначення умовних оптимальних рішень спочатку необхідно скласти функціональне рівняння Беллмана.

Тому що ми припустимо, що до початку k -го року ($k = \overline{1,5}$) може приймати тільки одне із двох рішень – замінити або не замінити обладнання, то прибуток підприємства за k -й рік складе

$$F_k(\tau^{(k)}, u_k)_k = \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) \text{ при } u_1, \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n \text{ при } u_2, \end{cases}$$

де $\tau^{(k)}$ - вік устаткування до початку k -го року ($k = \overline{1,5}$); u_k - керування, реалізоване до початку k -го року; C_n - вартість нового обладнання.

Таким чином, у цьому випадку рівняння Беллмана має вигляд

$$F_k(\tau^{(k)}) = \max_{\tau} \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)}), \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n + F_{k+1}(\tau^{(k)} = 1). \end{cases} \quad (9)$$

Використовуючи тепер рівняння (9), приступаємо до знаходження рішення вихідної задачі. Це рішення починаємо з визначення умовно оптимального керування (рішення) для останнього (5-го) року п'ятирічки, у зв'язку із чим знаходимо множину припустимих станів устаткування на початок даного року п'ятирічки. Тому що до початку п'ятирічки є нове обладнання ($\tau^{(1)} = 0$), то вік устаткування до початку 5-го року може становити 1, 2, 3 і 4 роки. Тому

припустимі стани системи на даний період часу такі:
 $\tau_1^{(5)} = 1; \tau_2^{(5)} = 2; \tau_3^{(5)} = 3; \tau_4^{(5)} = 4$. Для кожного із цих станів знайдемо умовно оптимальне рішення й відповідне значення функції $F_5(\tau^{(5)})$. Використовуючи рівняння (9) і співвідношення $F_6(\tau^{(k+1)}) = 0$ (тому що розглядається останній рік розрахункового періоду), одержуємо

$$F_5(\tau^{(5)}) = \max \begin{cases} R(\tau^{(5)}) - Z(\tau^{(5)}), \\ R(\tau^{(5)} = 0) - Z(\tau^{(5)} = 0) - C_n. \end{cases}$$

Підставляючи тепер у формулу (10) замість $\tau^{(5)}$ його значення, рівне 1, і з огляду на дані табл. 4.1, знаходимо

$$\begin{aligned} F_5(\tau_1^{(5)}) &= \max \begin{cases} R(\tau^{(5)} = 1) - Z(\tau^{(5)} = 1) \\ R(\tau^{(5)} = 0) - Z(\tau^{(5)} = 0) - C_n \end{cases} = \\ &= \max \begin{cases} 75 - 25 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 50, u^0 = u_1. \end{aligned}$$

Виходить, умовно оптимальне рішення в цьому випадку є u_1 .

Проведемо аналогічні обчислення для інших припустимих станів устаткування до початку 5-го року п'ятирічки:

$$F_5(\tau_2^{(5)}) = \max \begin{cases} 65 - 30 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 35, u^0 = u;$$

$$F_5(\tau_3^{(5)}) = \max \begin{cases} 60 - 35 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 25, u^0 = u_1;$$

$$F_5(\tau_4^{(5)}) = \max \begin{cases} 60 - 45 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 20, u^0 = u_2.$$

Отримані результати обчислень зводимо в табл. 2.

Таблиця 2 – Результати обчислень після 1-го кроку

Вік устаткування $\tau^{(5)}$ (років)	Значення функції $F_5(\tau^{(5)})$ (тис. грн.)	Умовно оптимальне рішення u^0
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

Розглянемо тепер можливі стани обладнання до початку 4-року п'ятирічки. Очевидно, припустимими станами є $\tau_1^{(4)} = 1, \tau_2^{(4)} = 2$ й $\tau_3^{(4)} = 3$. Для кожного з них визначаємо умовно оптимальне рішення й відповідне значення функції $F_4(\tau^{(4)})$. Для цього використаємо рівняння (9) і дані табл. 4.1 і 4.2. Так, зокрема, для $\tau_1^{(4)} = 1$ має

$$\begin{aligned}
 F_4(\tau_1^{(4)}) &= \max \left\{ \begin{array}{l} R(\tau^{(4)} = 1) - Z(\tau^{(4)} = 1) + F_5(\tau^{(5)} = 2) \\ R(\tau^{(4)} = 0) - Z(\tau^{(4)} = 0) - C_n + F_5(\tau^{(5)} = 1) \end{array} \right\} \\
 &= \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{array} \right\} = 85, u^0 = u_1.
 \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо

$$F_4(\tau_2^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{array} \right\} = 70, u^0 = u_2.$$

$$F_4(\tau_3^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{array} \right\} = 70, u^0 = u_2.$$

Отримані результати обчислень записуємо в табл. 3.

Таблиця 3 – Результати обчислень після другого кроку

Вік устаткування $\tau^{(4)}$ (років)	Значення функції $F_4(\tau^{(4)})$ (тис. грн.)	Умовно оптимальне рішення u^0
1	85	u_1
2	70	u_2
3	70	u_2

Визначимо тепер умовно оптимальне рішення для кожного із припустимих станів устаткування до початку 3-го року п'ятирічки. Очевидно, такими станами є $\tau_1^{(3)} = 1, \tau_2^{(3)} = 2$. Відповідно до рівняння (9) маємо

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(\tau^{(3)} = 1) - Z(\tau^{(3)} = 1) + F_4(\tau^{(4)} = 2) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{array} \right\};$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(\tau^{(3)} = 1) - Z(\tau^{(3)} = 1) + F_4(\tau^{(4)} = 3) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{array} \right\}.$$

Використовуючи дані табл. 1 і 3, одержуємо

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array} \right\} = 120, u^0 = u_1;$$

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array} \right\} = 105, u^0 = u_2.$$

З останнього вираження видно, що якщо до початку 3-го року п'ятирічки вік устаткування становить два роки, те незалежний від того, чи буде ухвалено рішення u_1 або u_2 , величина прибутку виявиться однієї й тієї ж. Це означає, що як умовно оптимальне рішення можна взяти кожне, наприклад u_2 . Отримані значення для $F_3(\tau^{(3)})$ й відповідні умовно оптимальні рішення записуємо в табл. 4.

Таблиця 4 – Результати обчислень

Вік устаткування $\tau^{(3)}$ (років)	Значення функції $F_3(\tau^{(3)})$ (тис. грн.)	Умовно оптимальне рішення u^0
1	120	u_1
2	105	u_2

Нарешті, розглянемо припустимі стани обладнання до початку 2-го року п'ятирічки. Очевидно, на даний момент часу вік устаткування може бути дорівнює тільки лише одного року. Тому має бути зрівняти лише два можливих рішення: зберегти обладнання або зробити заміну. Аналіз такого порівняння характеризується даними табл. 5.

Таблиця 5 – Результати обчислень після п'ятого кроку

Вік устаткування $\tau^{(2)}$ (років)	Значення функції $F_2(\tau^{(2)})$ (тис. грн.)	Умовно оптимальне рішення u^0
1	155	u_1

Відповідно до умови, до початку п'ятирічки встановлене нове обладнання ($\tau_1^{(1)} = 0$). Тому проблеми вибору між збереженням і заміною обладнання не існує: устаткування варто зберегти. Виходить, умовно оптимальним рішенням є u_1 , а значення функції

$$F_1(\tau_1^{(1)}) = R(\tau^{(1)} = 0) - Z(\tau_1^{(1)} = 0) + F_2(\tau^{(1)} = 1) = 80 - 20 + 155 = 215.$$

Таким чином, максимальний прибуток підприємства може бути рівної 215 тис. грн. Вона відповідає оптимальному плану заміни встаткуванні, що виходить на основі даних табл. 5, 4, 3 і 2, тобто в результаті реалізації другого етапу обчислювального процесу, що складає в проходженні всіх розглянутих кроків з початку 1-го до початку 5-го року п'ятирічки. Для 1-го року п'ятирічки рішення єдине - варто зберегти обладнання. Виходить, вік устаткування до початку 2-го року п'ятирічки дорівнює одного року. Тоді відповідно до даних табл. 5 оптимальним рішенням для 2-го року п'ятирічки є рішення про збереження обладнання. Реалізація такого рішення приводить до того, що вік устаткування до початку 3-го року п'ятирічки стає рівним двом рокам. При

такому віці (див. табл. 4) устаткування в 3-м році п'ятирічки варто замінити. Після заміни обладнання його вік до початку 4-го року п'ятирічки складе один рік. Як видно з табл. 3, при такому віці обладнання його міняти не слід. Тому вік устаткування до початку 5-го року п'ятирічки складе два роки, тобто міняти обладнання недоцільно (табл. 2).

Отже, виходить наступний оптимальний план заміни обладнання (табл. 6).

Таблиця 6 – Оптимальний план заміни устаткування

	Роки п'ятирічки				
	1	2	3	4	5
Оптимальне рішення	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання	Зробити заміну обладнання	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання

Задача 2

Знайти рішення задачі 2, якщо $S = 700$ тис. грн., $n = 3$, а значення X_i й $f_i(X_i)$ наведені в табл. 7.

Таблиця 7 – Вихідні дані задачі

Об'єм капіталовкладень X_i (тис. грн.)	Приріст випуску продукції $f_i(X_i)$ залежно від об'єму капіталовкладень (тис. грн.)		
	підприємство 1	підприємство 2	підприємство 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Розв'язання

Для розв'язання даної задачі динамічного програмування варто скласти рекурентне співвідношення Белмана. У розглянутому випадку це співвідношення приводить до наступним функціональним рівнянням:

$$\begin{aligned}\varphi_1(X) &= \max_{0 \leq X_1 \leq X} \{f_1(X_1)\}; \\ \varphi_2(X) &= \max_{0 \leq X_2 \leq X} \{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}; \\ \varphi_3(X) &= \max_{0 \leq X_3 \leq X} \{f_3(X_3) + \varphi_2(X - X_3)\}; \\ \varphi_{n-1}(X) &= \max_{0 \leq X_{n-1} \leq X} \{f_{n-1}(X_{n-1}) + \varphi_{n-2}(X - X_{n-1})\}.\end{aligned}$$

Тут функції $\varphi_i(X) (i = \overline{1, n-1})$ визначають максимальний приріст випуску продукції при відповідних розподілах X тис. грн. капіталовкладень між i підприємствами. Тому значення функції $\varphi_n(X)$ обчислюється лише для одного значення $X = S$, тому що об'єм капіталовкладень, виділюваних для всіх n підприємств, дорівнює S тис. грн.

Використовуючи тепер рекурентні співвідношення (11) і вихідні дані табл. 7, приступаємо до знаходження рішення задачі, тобто до визначення спочатку умовно оптимальних, а потім і оптимальних розподілів капіталовкладень між підприємствами.

Починаємо з визначення умовно оптимальних капіталовкладень, виділюваних для розвитку першого підприємства. Для цього знаходимо значення $\varphi_1(X)$ для кожного X , приймаючого значення 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700.

Нехай $X = 0$; тоді $\varphi_1(0) = 0$. Візьмемо тепер $X = 100$. Тоді, використовуючи табл. 7, одержуємо

$$\varphi_1(100) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 30 \end{array} \right\} = 30, X_1^0 = 100.$$

Тут перший рядок відповідає рішенню $X_1 = 0$, а другий рядок - рішенню $X_1 = 100$. Тому що при першому рішенні приріст випуску продукції не

забезпечується, а при другому дорівнює 30 тис. грн., те умовно оптимальним рішенням є $X_1^0 = 100$.

Аналогічно знаходимо умовно оптимальні рішення для інших значень X :

$$\varphi_1(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 30 \\ 50 \end{array} \right\} = 50, X_1^0 = 200;$$

$$\varphi_1(300) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \end{array} \right\} = 90, X_1^0 = 300;$$

$$\varphi_1(400) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \end{array} \right\} = 110, X_1^0 = 400;$$

$$\varphi_1(500) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \end{array} \right\} = 170, X_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \end{array} \right\} = 180, X_1^0 = 600;$$

$$\varphi_1(700) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{array} \right\} = 210, X_1^0 = 700.$$

Результати обчислень і отримані відповідні умовно оптимальні рішення записуємо в табл. 8.

Таблиця 8 – Результати обчислень

Об'єм капіталовкладень X , виділюваних першому підприємству (тис. грн.)	Максимальний приріст $\varphi_1(X)$ випуску продукції (тис. грн.)	Умовно оптимальний об'єм капіталовкладень X_1^0 , виділюваних першому підприємству (тис. грн.)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Використовуючи тепер дані табл. 8 і 7, визначимо умовно оптимальні об'єми капіталовкладень, виділюваних другому підприємству. Знайдемо

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \leq X_2 \leq X} \{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}$$

для кожного із припустимих значень X , рівних 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700:

$$\varphi_2(0) = 0, \quad X_2^0 = 0$$

$$\varphi_2(100) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 30 \\ 50 + 0 \end{array} \right\} = 50, X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 50 \\ 50 + 30 \\ 80 + 0 \end{Bmatrix} = 80, X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(300) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 90 \\ 50 + 50 \\ 80 + 30 \\ 90 + 0 \end{Bmatrix} = 110, X_2^0 = 200;$$

$$\varphi_2(400) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 110 \\ 50 + 90 \\ 80 + 50 \\ 90 + 30 \\ 150 + 0 \end{Bmatrix} = 150, X_2^0 = 400;$$

$$\varphi_2(500) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 170 \\ 50 + 110 \\ 80 + 90 \\ 90 + 50 \\ 150 + 30 \\ 190 + 0 \end{Bmatrix} = 190, X_2^0 = 500;$$

$$\varphi_2(600) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 180 \\ 50 + 170 \\ 80 + 110 \\ 90 + 90 \\ 150 + 50 \\ 190 + 30 \\ 210 + 0 \end{Bmatrix} = 220, X_2^0 = 100,$$

$$\varphi_2(700) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 210 \\ 50 + 180 \\ 80 + 170 \\ 90 + 110 \\ 150 + 90 \\ 190 + 50 \\ 210 + 30 \\ 220 + 0 \end{array} \right\} = 250, X_2^0 = 200.$$

Отримані результати й знайдені умовно оптимальні об'єми капіталовкладень, виділюваних другому підприємству, записуємо в табл. 9.

Таблиця 9 – Результати обчислень

Об'єм капіталовкладень X , виділюваних першому підприємству (тис. грн.)	Максимальний приріст $\varphi_1(X)$ випуску продукції (тис. грн.)	Умовно оптимальний об'єм капіталовкладень X_2^0 , виділюваних першому підприємству (тис. грн.)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходимо тепер до знаходження значень

$$\varphi_3(X) = \max_{0 \leq X_3 \leq X} \{f_3(X_3) + \varphi_2(X - X_3)\},$$

використовуючи для цього відповідні дані табл. 9 і 7.

Тому що в цьому випадку число підприємств дорівнює 3, то проводимо обчислення лише для одного значення $X = 700$:

$$\varphi_3(700) = \left\{ \begin{array}{l} 0 + 250 \\ 40 + 220 \\ 50 + 190 \\ 110 + 150 \\ 120 + 110 \\ 180 + 80 \\ 220 + 50 \\ 240 + 0 \end{array} \right\} = 270, X_3^0 = 600.$$

Отже, максимальний приріст випуску продукції становить 270 тис.грн. Це має місце тоді, коли третьому підприємству виділяється 600 тис. грн., а першому й другому підприємствам - 100 тис. грн. Тоді, як видно з табл. 9, другому підприємству варто виділити 100 тис. грн.

Отже, ми одержали оптимальний план розподілу капіталовкладень між підприємствам, відповідно до якого забезпечується максимальний приріст випуску продукції.

1.5 Самостійна робота

Скласти оптимальний план заміни встаткування в умовах задачі 1 при вихідних даних про продуктивність устаткування й щорічних витрат на його зміст, наведених у таблиці. Крім того, відомо, що до початку розглянутого періоду встановлене нове обладнання, використане встаткування списується, а вартість устаткування дорівнює 10 тис. грн.

Варіант 1

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції R(t)	90	85	70	65	55	45
Річні затрати на ремонт обладнання Z(t)	10	20	25	30	35	45

Варіант 2

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції R(t)	90	80	70	60	50	45
Річні затрати на ремонт обладнання Z(t)	10	20	30	40	45	50

Варіант 3

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції R(t)	100	95	80	75	60	50
Річні затрати на ремонт обладнання Z(t)	5	10	20	30	35	45

Варіант 4

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції R(t)	90	85	75	60	50	35
Річні затрати на ремонт обладнання Z(t)	5	10	15	25	30	35

Варіант 5

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції R(t)	100	85	75	60	50	45
Річні затрати на ремонт обладнання Z(t)	10	20	25	30	35	45

Варіант 6

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції R(t)	80	75	60	50	40	35
Річні затрати на ремонт обладнання Z(t)	5	15	20	25	30	35

Варіант 7

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції R(t)	100	90	80	70	60	55
Річні затрати на ремонт обладнання Z(t)	15	20	30	35	45	50

Варіант 8

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	95	90	80	75	60	50
Річні затрати на ремонт обладнання $Z(t)$	10	20	25	30	40	45

Варіант 9

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	90	80	75	55	40	35
Річні затрати на ремонт обладнання $Z(t)$	5	10	15	20	25	30

Варіант 10

	Час, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	60	60	50	45	35	30
Річні затрати на ремонт обладнання $Z(t)$	5	10	15	20	25	30

Варіант 11

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	29	27	27	25	24	23
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	7	8	9	10	11	11

Варіант 12

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	23	23	21	20	18	16
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	11	12	14	15	15	16

Варіант 13

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	25	24	23	21	20	20
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	9	10	10	11	12	13

Варіант 14

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	20	19	19	18	17	17
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	13	13	14	15	16	17

Варіант 15

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	33	32	32	30	29	28
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	10	12	12	14	14	15

Варіант 16

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	28	27	26	24	22	20
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	15	16	17	17	18	19

Варіант 17

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	25	24	23	21	20	20
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	9	10	10	11	12	13

Варіант 18

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	20	20	19	19	18	17
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	12	13	14	15	16	17

Варіант 19

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	21	20	19	19	18	18
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	11	11	11	12	12	13

Варіант 20

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	18	18	17	16	16	15
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	12	13	13	13	14	15

Варіант 21

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	30	28	28	27	25	25
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	10	12	12	14	14	15

Варіант 22

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	25	25	23	21	20	19
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	14	15	16	17	19	22

Варіант 23

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	25	24	24	23	23	23
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	15	15	16	16	17	17

Варіант 24

	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(t)$	23	23	22	22	21	20
Щорічні витрати $z(t)$, пов'язані із зберіганням та ремонтом обладнання	17	17	18	18	19	20

Задача 2

Виробнича система складається з 4 філій. За умови здійснення реконструкції обладнання на кожному філіалі можна досягти певного приросту прибутку.

Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між філіями для максимізації загального прибутку від усіх чотирьох філіалів за умови, що відомі прирости прибутку для кожного з них

Варіант	X	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
1	0	0	0	0	0
	100	15	18	16	10
	200	24	26	27	17
	300	30	34	37	23
	400	36	39	44	29
	500	40	42	48	34

	600	43	44	50	38
	700	45	46	56	41
2	0	0	0	0	0
	100	20	18	25	30
	200	44	29	41	52
	300	55	49	52	76
	400	63	72	74	90
	500	67	77	82	104
	600	70	100	88	116
	700	70	108	90	125
3	0	0	0	0	0
	100	5	8	10	11
	200	10	13	16	19
	300	14	18	21	26
	400	17	21	24	30
	500	19	23	27	33
	600	21	21	29	35
	700	22	17	30	36
4	0	0	0	0	0
	100	42	30	22	56
	200	58	49	37	68
	300	71	63	49	82
	400	80	68	59	92
	500	89	69	68	100
	600	95	65	76	107
	700	100	60	82	112
5	0	0	0	0	0
	100	28	25	15	20
	200	45	41	25	33
	300	65	55	40	42
	400	78	65	50	48
	500	90	75	62	53
	600	102	80	73	56
	700	113	85	82	58
6	0	0	0	0	0
	100	3	5	8	6
	200	5	8	13	10
	300	7	10	17	13
	400	8	12	20	15
	500	9	13	23	16
	600	10	14	25	16
	700	10	15	27	16
7	0	0	0	0	0

	100	70	61	83	75
	200	93	80	105	90
	300	104	93	114	100
	400	110	100	119	121
	500	114	106	121	125
	600	117	112	126	160
	700	119	116	130	145
8	0	0	0	0	0
	100	37	13	6	24
	200	64	25	13	36
	300	87	37	20	42
	400	105	47	27	46
	500	120	55	33	48
	600	134	61	38	48
	700	145	66	41	49
9	0	0	0	0	0
	100	28	20	8	5
	200	42	27	26	20
	300	51	30	37	29
	400	57	31	47	36
	500	61	32	53	41
	600	64	32	58	45
	700	66	33	61	47
10	0	0	0	0	0
	100	5	20	15	26
	200	10	34	24	30
	300	14	45	30	35
	400	17	50	38	40
	500	19	48	46	45
	600	21	40	52	48
	700	22	40	53	50

11	0	0	0	0	0
	100	16	9	18	15
	200	26	15	26	25
	300	39	23	34	32
	400	42	31	39	38
	500	46	39	42	42
	600	50	45	44	46
	700	54	49	46	48
12	0	0	0	0	0
	100	12	16	10	11
	200	20	27	16	19
	300	26	37	21	25
	400	37	44	24	29
	500	41	48	27	32
	600	44	50	29	33
	700	45	56	30	33
13	0	0	0	0	0
	100	10	13	6	24
	200	20	25	13	36
	300	30	37	20	42
	400	38	47	27	46
	500	43	55	33	48
	600	49	61	38	48
	700	57	66	41	49
14	0	0	0	0	0
	100	15	10	11	25
	200	26	17	19	34
	300	38	23	26	41
	400	45	29	30	46
	500	52	34	33	50
	600	58	38	35	53
	700	63	41	36	56
15	0	0	0	0	0
	100	14	9	15	35
	200	22	15	25	46
	300	3	22	35	52
	400	39	31	40	55
	500	45	39	45	57
	600	51	45	50	59
	700	56	49	50	60

16	0	0	0	0	0
	100	25	30	50	61
	200	41	52	68	80
	300	55	76	82	93
	400	65	90	90	100
	500	75	104	100	106
	600	80	116	107	112
	700	85	125	112	116
17	0	0	0	0	0
	100	15	30	50	83
	200	25	79	68	105
	300	40	63	82	114
	400	50	69	92	116
	500	62	68	100	116
	600	73	62	107	118
	700	82	55	112	125
18	0	0	0	0	0
	100	20	22	10	16
	200	33	37	29	27
	300	42	49	42	37
	400	48	59	52	44
	500	53	68	60	48
	600	56	75	65	50
	700	58	82	69	56
19	0	0	0	0	0
	100	5	5	8	6
	200	8	10	13	13
	300	10	14	18	20
	400	12	17	21	27
	500	13	19	23	33
	600	14	21	25	38
	700	15	22	27	41
20	0	0	0	0	0
	100	8	10	11	10
	200	13	17	19	20
	300	17	23	26	30
	400	20	29	30	38
	500	23	34	33	43
	600	25	38	35	49
	700	27	41	36	52

21	0	0	0	0	0
	100	15	15	9	29
	200	26	24	30	36
	300	37	30	33	42
	400	46	36	31	46
	500	53	40	39	48
	600	59	43	45	49
	700	63	45	49	49
22	0	0	0	0	0
	100	75	85	42	28
	200	90	100	58	45
	300	100	111	71	66
	400	108	118	80	78
	500	113	124	89	90
	600	115	129	95	102
	700	117	132	100	103
23	0	0	0	0	0
	100	37	70	61	28
	200	64	93	80	45
	300	87	104	93	65
	400	105	110	100	78
	500	120	114	106	90
	600	134	117	112	102
	700	145	119	116	113
24	0	0	0	0	0
	100	28	5	8	22
	200	42	20	26	37
	300	51	29	37	49
	400	57	36	47	59
	500	61	41	53	68
	600	64	45	58	76
	700	66	47	61	82
25	0	0	0	0	0
	100	10	13	16	10
	200	20	25	27	17
	300	30	37	37	23
	400	38	47	44	29
	500	43	55	48	34
	600	49	61	50	38
	700	52	66	49	41

1.6 Контрольні питання

- 1 Дайте визначення задачі динамічного програмування
- 2 Які задачі відносяться до задач динамічного програмування?
- 3 В чому полягає принцип оптимальності Беллмана?
- 4 Наведіть основне функціональне рівняння Беллмана

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. Вузов/И.Л. Акулич.- М.: Высш. шк., 1986.- 319 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України/О.В. Боровик, Л.В. Боровик.- К.:Центр учбової літератури,2007
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
4. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник/І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури,2007 – 232 с.
5. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"/Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.

