МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра Комп'ютерних наук

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД ГОМОРІ

Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни
«**Дослідження операцій**»
для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Мелітополь
2017

Задачі цілочисельного програмування. **Метод Гоморі**. Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни «Дослідження операцій» для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» – Таврійський державний агротехнологічний університет, 2017 – 16 с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов'єва О.Г.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри
«_24_» _листопада__2017___р. Протокол № _06____

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_30__» _листопада___ 2017__р. Протокол № _4____

ЗМІСТ

ВВЕДЕННЯ

Дані методичні вказівки є керівництвом для проведення практичних занять за курсом “Дослідження операцій”.

Метою методичних вказівок є закріплення студентами вивченого теоретичного матеріалу і придбання практичних навичок для розв’язання задач лінійного програмування методом штучного базису.

Методичні вказівки складені з урахуванням того, що студенти попередньо розібрали теоретичний матеріал і приклади, що наведено в конспекті лекцій.

У результаті студенти повинні навчитися будувати розширену задачу, знаходити опорний план розширеної задачі, складати симплекс-таблиці, визначати дозвільні стовпець і рядок, перевіряти опорний план задачі на оптимальність і вміти переходити до нового плану.

Практичне заняття містить основні теоретичні відомості, контрольний приклад, задачі для самостійної роботи, домашнє завдання і контрольні питання.

Дані методичні вказівки призначені для студентів факультету інженерії та комп’ютерних технологій денної форми навчання.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №11

Тема: **Цілочисельне програмування**

Ціль:
1) Навчити будувати розширену задачу.
2) Навчити знаходити опорний план розширеної задачі.
3) Навчити складати симплекс-таблицю і визначати дозвільні стовпець і рядок.
4) Навчити перевіряти опорний план задачі на оптимальність.
5) Навчити переходити до нового плану задачі.

Час: 2 ч.

1.1 Порядок виконання роботи

- Проробити практичну частину.
- Виконати домашнє завдання.

1.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

а) вивчити конспект лекцій;

б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 134-142;

1.3 Теоретичні відомості

Екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочисельні значення, називається задачею цілочисельного програмування.

У математичному програмуванні в задачі цілочисельного програмування цільова функція і функції в системі обмежень можуть бути лінійними, нелінійними, змішаними. Обмежимося випадком, коли цільова функція і функції в системі обмежень є лінійними.

Постановка задачі ЦП (випадок лінійної ц.ф. і функцій обмежень).

Знайти максимум функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \qquad (1)$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,n}\right) \\ x_i - \text{цілі} \end{cases} \tag{3}$$

Метод Гоморі

Спочатку розв’язують задачу (1)-(2) звичайним симплекс-методом без врахування умови (3). Після чого знаходять оптимальний план і переглядають його компоненти. Якщо серед них дробових чисел немає, то план є оптимальним і для задачі (1)-(3). Якщо ж є x_i дробові, то до системи рівнянь (2) додають нерівність

$$\sum_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \geq f\left(b_i^*\right)$$

$$f\left(a_{i1}^*\right)x_1 + f\left(a_{i2}^*\right)x_2 + \ldots + f\left(a_{in}^*\right)x_n \geq f\left(b_i^*\right). \tag{4}$$

Тут a_{ij}^* і b_i^* – величини з останньої симплекс-таблиці (рядок i). $f\left(a_{ij}^*\right)$ і $f\left(b_{i*}\right)$ – дробові частини чисел a_{ij}^* і b_i^*.

Якщо дробових x_i декілька, то вибирають x_i з максимальною дробовою частиною.

Потім розв’язують задачу (1), (2), (4). Якщо в новому плані змінні приймають дробові значення, то додають ще одну нерівність, і процес обчислень повторюють. Процес повторюють доти, поки або не одержать цілочисельний розв’язок задачі, або не прийдуть до висновку про її нерозв'язність.

<u>Алгоритм</u>.

1. Використовуючи симплекс-метод знаходять розв’язок задачі (1)-(2) без врахування умови (3).

2. Складають додаткове обмеження для дробової змінної в оптимальному плані з максимальною дробовою частиною.
3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод знаходять розв'язок задачі (1)-(2), (4).
4. Перевіряють цілочисельність отриманого оптимального плану. У разі потреби додають додаткове обмеження.

1.4 Практична частина

1.4.1 Контрольний приклад

Задача

На придбання обладнання для нового цеху підприємство виділяє кошти в обсязі 21 грош. од. Обладнання повинно бути розташовано на площі, яка не перевищує 5 м^2. Підприємство може замовити обладнання двох видів: машини типу A вартістю 7 грош. од. за один комплект, які потребують виробничу площу 1 м^2 та забезпечують продуктивність 2 т продукції за зміну, та машини типу B вартістю 3 грош. од. за один комплект, які займають площу 1 м^2 та забезпечують продуктивність 1 т продукції за зміну.

Необхідно розрахувати оптимальний план придбання обладнання, що забезпечує максимальну загальну продуктивність.

Розв'язання

Позначимо через x_1 кількість комплектів машин типу A, через x_2 - кількість машин типу B.

Необхідно вибрати такий комплект обладнання, щоб максимізувати продуктивність, тобто функцію $F = 2x_1 + x_2 \to \max$.

При цьому повинні бути виконані наступні обмеження:

- по вартості продукції $7x_1 + 3x_2 \le 21$,

- по виробничої площі $x_1 + x_2 \le 5$.

На змінні x_1, x_2 необхідно накладати додаткові обмеження цілочисельності та невід'ємності.

Таким чином, математична постановка задачі має наступний вигляд.

Знайти максимальне значення функції

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max \tag{1.5}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 21, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \ddot{o}^3\ddot{e}^3. \end{cases} \tag{1.6}$$

Розв'язуємо задачу без урахування умови цілочисельності. Для розв'язання задачі приводимо її до канонічного вигляду:

$$F^* = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 21, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4} \end{cases} \tag{1.7}$$

Заповнюємо першу симплекс-таблицю:

1) У стовпець базис записуємо базисні змінні x_3, x_4.

2) У стовпець $C_{бi}$ записуємо коефіцієнти цільової функції F^* при базисних змінних.

3) У стовпець b_i записуємо праві частини рівнянь системи обмежень, а в стовпці $x_1 ... x_4$ – матрицю системи.

4) В $(m+1)$-ому рядку виписуємо значення $\Delta_j = \sum\limits_{i=1}^{2} c_{\acute{a}_i} \cdot x_j - c_j$ для $j = \overline{1,4}$.

$$\Delta_1 = -2, \qquad \Delta_2 = -1,$$
$$\Delta_3 = 0, \qquad \Delta_4 = 0,$$
$$F^* = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0.$$

Таблиця 1.1 – Перша симплекс-таблиця

				2	1	0	0	
i	базис	$C_{бз}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	Θ_i
1	x_3	0	21	**7**	3	1	0	3
2	x_4	0	5	1	1	0	1	5
3	Δ_j			-2	-1	0	0	

Серед значень Δ_j $\left(j=\overline{1,4}\right)$ є від'ємні, тому план не є оптимальним. Напрямний стовпець k визначається за умови, що $\left|\Delta_k\right| = \max\limits_{\Delta_j<0}\left|\Delta_j\right|$. Це стовпець x_1. Для визначення напрямного рядка розраховуємо значення $\Theta_i = \dfrac{b_i}{a_{i1}}$ $\left(i=\overline{1,2}\right)$. Напрямний рядок r визначаємо за умови, що $\Theta_r = \min \Theta_i$. Це рядок x_3. Переходимо до другої симплекс-таблиці:

1) Змінну x_1 вводимо до базису, зміну x_3 виводимо з базису.

2) Всі елементи напрямного рядка ділимо на дозвільний елемент.

3) Інші елементи таблиці перераховуємо за правилом прямокутника.

Наприклад, $b_2' = 5 - \dfrac{21\cdot 1}{7} = 2;\;\; a_{22}' = 1 - \dfrac{3\cdot 1}{7} = \dfrac{4}{7}$ і т.п.

Таблиця 1.2 – Друга симплекс-таблиця

				2	1	0	0	
i	базис	$C_{бз}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	Θ_i
1	x_1	2	3	1	3/7	1/7	0	7
2	x_4	0	2	0	**4/7**	-1/7	1	7/2
3	Δ_j			0	-1/7	2/7	0	

Серед значень Δ_j $\left(j=\overline{1,4}\right)$ є від'ємні, тому отриманий план $X=(3,0,0,2)$ не оптимальний. Слід перейти до нового плану.

Заповнюємо третю симплекс-таблицю.

Для визначення напрямного стовпця знаходимо $\max\limits_{\Delta_j<0}\left|\Delta_j\right| = -\frac{1}{7}$.
Напрямним стовпцем є стовпець x_2. Серед значень Θ_i вибираємо мінімальне $\Theta_r = \frac{7}{2}$, тому напрямним рядком є рядок x_4. Змінну x_4 виводимо з базису, змінну x_2 вводимо до базису.

Таблиця 1.3 – Третя симплекс-таблиця

				2	1	0	0
i	базис	$C_{áз}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	2	3/2	1	0	1/4	-3/4
2	x_2	1	7/2	0	1	-1/4	7/4
3	Δ_j			0	0	1/4	1/4

Отримали оптимальний план $X = (3/2;7/2;0;0)$. Цільова функція при цьому плані приймає значення $F = 2\cdot\frac{3}{2} + 1\cdot\frac{7}{2} = \frac{13}{2}$. Але цей план не відповідає умові цілочисельності змінних. Розв’язуємо задачу методом Гоморі, складаємо нове обмеження.

Компоненти плану x_1, x_2 мають однакові дробові частини:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Додаткове обмеження складаємо у вигляді (1.4) по будь-якому рядку, наприклад, по рядку x_1.

$$f(0)x_1 + f(1)x_2 + f\left(\frac{1}{4}\right)x_3 + f\left(-\frac{3}{4}\right)x_4 \geq f\left(\frac{7}{2}\right),$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_3 + \frac{1}{4} \cdot x_4 \geq \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Для того, щоб позбавитися від дробових частин, домножимо обидві частини нерівності на (-4)

$$-x_3 - x_4 \leq -2.$$

Приводимо додаткове обмеження до канонічної форми:

$$-x_3 - x_4 + x_5 = -2.$$

Це обмеження додаємо до задачі (1.5), (1.7) і додаємо відповідний рядок до останньої симплекс-таблиці.

Отримано нову задачу лінійного програмування з трьома обмеженнями. Серед b_i є від'ємні, тому розв'язуємо задачу двоїстим симплекс-методом.

Таблиця 1.4 – Четверта симплекс-таблиця

				2	1	0	0	
i	базис	$C_{бз}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	2	3/2	1	0	1/4	-3/4	0
2	x_2	1	7/2	0	1	-1/4	7/4	0
3	x_5	0	-2	0	0	**-1**	-1	1
4	Δ_j			0	0	1/4	1/4	0
5	Θ_i			-	-	1/4	1/4	-

Напрямний рядок визначається за максимальним за модулем від'ємним b_i. В нашому випадку це рядок x_5. Відповідно x_5 виключаємо з базису. Для визначення напрямного стовпця знаходимо

$\min \Theta_j = \min\left(-\dfrac{\Delta_j}{a_{i5}}\right)$, $a_{i5} < 0$. Напрямним стовпцем є стовпець x_4. Змінну x_4 вводимо до базису.

Таблиця 1.5 – П’ята симплекс-таблиця

				2	1	0	0	
i	базис	$C_{áз}$	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	2	1	1	0	0	-1	1/4
2	x_2	1	4	0	1	0	2	-1/4
3	x_3	0	2	0	0	1	1	-1
4	Δ_j			0	0	0	0	1/4

Отриманий план $X = (1,4,2,0)$ є оптимальним і цілочисельним.

Значення цільової функції становить $F = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6$ (т).

Отриманий план $X = (1,4,2,0)$ є оптимальним і цілочисельним.

Значення цільової функції становить $F = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6$ (т).

Висновок. Підприємству необхідно придбати 1 машину типу A та 4 машини типу B. При цьому буде досягнута максимальна продуктивність роботи обладнання 6 т продукції за зміну. Економія грошових коштів составляє 2 грош. од.

1.5 Самостійна робота

Знайти цілочисельний розв’язок задач лінійного програмування методом Гоморі

Варіант 1	**Варіант 2**

$F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	$F = 2x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 3x_1 - 3x_2 \le 13 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$
Варіант 3 $F = 4x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 9 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 26 \\ x_1 + 7x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	**Варіант 4** $F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 25 \\ 4x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$
Варіант 5 $F = 6x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ 6x_1 - x_2 \le 13 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	**Варіант 6** $F = 8x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 7 \\ 4x_1 - x_2 \le 10 \\ 10x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$
Варіант 7 $F = 6x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 \le 14 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21 \\ x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	**Варіант 8** $F = 10x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 \ge 25 \\ 4x_1 + 8x_2 \le 36 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 26 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$

Варіант 9	**Варіант 10**

$F = 6x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 9x_1 - 9x_2 \geq 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 18 \\ 4x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{cases}$	$F = 9x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{cases}$
Варіант 11 $F = 2x_1 + 6x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ 4x_1 - x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{cases}$	**Варіант 12** $F = 9x_1 - 12x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{cases}$
Варіант 13 $F = 8x_1 - 8x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 90 \\ 4x_1 - x_2 \leq 120 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{cases}$	**Варіант 14** $F = 30x_1 + 8x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \leq 32 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{cases}$

Варіант 15 $F = 18x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 8x_1 + 10x_2 \le 24 \\ 7x_1 + 3x_2 \le 40 \\ 4x_1 - 9x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	**Варіант 16** $F = 21x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ 24x_1 + 9x_2 \le 108 \\ 4x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$
Варіант 17 $F = 24x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 35 \\ 2x_1 - 4x_2 \le 28 \\ 4x_1 - x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	**Варіант 18** $F = 18x_1 - 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \ge 7 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 7x_1 + x_2 \le 56 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$
Варіант 19 $F = 20x_1 - 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 28 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 14 \\ 3x_1 + x_2 \le 72 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	**Варіант 20** $F = 4x_1 - 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \le 16 \\ x_1 - 4x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 8x_2 \le 44 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$
Варіант 21 $F = 6x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 14x_1 + 2x_2 \le 84 \\ x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$	**Варіант 22** $F = 12x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 15x_1 - 5x_2 \ge 24 \\ 4x_1 + 8x_2 \le 36 \\ x_1 + 3x_2 \le 60 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$

1.6 Контрольні питання

1 Яка задача називається задачею цілочисельного програмування?

2 Які методи існують для розв'язання задач цілочисельного програмування?

3 Наведіть алгоритм методу Гоморі.

4 Як скласти нерівність Гоморі по рядку симплексної таблиці?

5 Які розв'язки враховуються як оптимальні для задачі цілочисельного програмування?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. Вузов/И.Л. Акулич.- М.: Высш. шк., 1986.- 319 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України/О.В. Боровик, Л.В. Боровик.- К.:Центр учбової літератури,2007
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
4. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник/І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури,2007 – 232 с.
5. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"/Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с