МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра Комп'ютерних наук

ЗАДАЧІ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни
«**Дослідження операцій**»
для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Мелітополь
2017

Задачі квадратичного програмування. Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни «Дослідження операцій» для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» – Таврійський державний агротехнологічний університет, 2017 – 16 с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов'єва О.Г.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри
«_24__» _листопада__2017___р. Протокол № _06____

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_30_» _листопада__ 2017___р. Протокол № _4____

ЗМІСТ

Введення

Дані методичні вказівки є керівництвом для проведення практичного заняття за темою «Задачі квадратичного програмування» в курсі “Дослідження операцій”.

Метою методичних вказівок є закріплення студентами вивченого теоретичного матеріалу та здобуття практичних навичок для розв’язання задач лінійного програмування.

Методичні вказівки складені з урахуванням того, що студент попередньо освоїв теоретичний матеріал та приклади, що були розглянуті на лекції.

У результаті студент повинен навчитися знаходити розв’язок задач нелінійного програмування.

Практичне заняття містить основні теоретичні відомості, контрольний приклад, задачі для самостійної роботи та контрольні питання.

Дані методичні вказівки призначені для студентів факультету інженерії та комп’ютерних технологій денної форми навчання.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 10

Тема: **Задачі квадратичного програмування**

Мета Навчити розв'язувати задачі нелінійного програмування.

Час: 2 год.

1.1 Порядок виконання роботи

- Проробити практичну частину.
- Виконати домашнє завдання.

1.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

а) вивчити конспект лекцій;

б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 154-170;

1.3 Теоретичні відомості

Визначення 1. Квадратичною формою щодо змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається числова функція від цих змінних, яка має вид:

$$F = c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + ... + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 + ... = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j .$$

Визначення 2. Квадратична форма F називається позитивно(негативно) – визначеною, якщо $F(X) > 0$ $\left(F(X) < 0\right)$ для всіх значень змінних $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, крім $X = 0$.

Визначення 3. Квадратична форма F називається позитивно(негативно) – напіввизначеною, якщо $F(X) \geq 0$ $\left(F(X) \leq 0\right)$ для будь-якого набору значень змінних $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і крім того, існує такий набір змінних $X' = \left(x'_1, x'_2, ..., x'_n\right)$, де не всі значення змінних одночасно дорівнюють нулю, що $F\left(X'\right) = 0$.

Теорема. Квадратична форма є опуклою функцією, якщо вона позитивно - напіввизначена, і ввігнутою функцією, якщо вона негативно – напіввизначена.

Визначення 4. Задача, що полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$f\left(x\right) = \sum_{j}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j, \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{2}$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

де $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$ - негативно (позитивно) – напіввизначена квадратична форма, називається <u>задачею квадратичного програмування.</u>

Для сформульованої задачі квадратичного програмування <u>функція Лагранжа</u> запишеться у вигляді:

$$L = \sum_{k=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right).$$

Якщо функція L має седлову точку $\left(X_{0,}Y_0\right) = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0\right)$, то в цій точці виконуються співвідношення (7) – (12). Уводячи, тепер, додаткові змінні $v_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ і $w_i\left(i = \overline{1,m}\right)$, перетворюючи нерівності (7) – (10) у рівності, перепишемо вираження (7) – (12), записані для задачі квадратичного програмування, у такий спосіб:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), & (4) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} - w_i = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right), & (5) \\ x_j^0 v_j = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), & (6) \\ y_i^0 w_i = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right), & (7) \end{cases}$$

$$x_j^0 \geq 0,\ v_j \geq 0,\ y_i^0 \geq 0, w_i \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}\right). \quad (8)$$

У такий спосіб щоб знайти розв’язання задачі квадратичного програмування (1) – (3), потрібно визначити ненегативне розв’язання систем лінійних рівнянь (4) – (5), що задовольняє умовам (7) і (8). Це розв’язання можна знайти за допомогою методу штучного базису, застосованого для знаходження максимального значення функції $F = -\sum_i M\, y_i$ при умовах (4), (5), (8) враховуючи (6) і (7). Тут y_i - штучні змінні, уведені в рівняння (4) і (5).

Використовуючи метод штучного базису й додатково враховуючи умови (6) і (7), після кінцевого числа кроків або встановимо нерозв'язність, або одержимо оптимальний план вихідної задачі.

Отже, процес знаходження розв’язання задачі квадратичного програмування (1) – (2) включає наступні етапи:

1) Складають функцію Лагранжа.
2) Записують у вигляді виражень (1) – (8) необхідні та достатні умови існування седловой точки для функції Лагранжа.
3) Використовуючи метод штучного базису, або встановлюють відсутність седловой точки для функції Лагранжа, або находять її координати.
4) Записують оптимальне розв’язання вихідної задачі й находять значення цільової функції.

1.4 Практична частина

Задача.

Знайти максимальне значення функції

$$f = 10x_1 + 20x_2 + x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$$

при умовах

$$\begin{cases} x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язання.

Функція f є вигнутою, тому що являє собою суму лінійної функції $f_1 = 10x_1 + 20x_2$ та квадратичної форми $f_2 = x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$, яка є від'ємно-визначеною и, тому, теж вигнутою.

Складаємо функцію Лагранжа

$$L = 10x_1 + 20x_2 + x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_2) + \lambda_2(10 - x_1 - x_2)$$

та запишемо необхідні і достатні умови існування сідловок точки функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 10 + x_2 - 4x_1 - \lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 20 + x_1 - 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 10 - x_1 - x_2 \ge 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1\left(10 + x_2 - 4x_1 - \lambda_2\right) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2\left(20 + x_1 - 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_2\right) = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1\left(8 - x_2\right) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2\left(10 - x_1 - x_2\right) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$$

Систему (1) перепишемо наступним чином:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + \lambda_2 \ge 10, \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \ge 20, \\ x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 10; \end{cases} \tag{11}$$

Вводячи додаткові невід’ємні змінні v_1, v_2, w_1, w_2, приведемо систему нерівностей (3) до канонічної форми:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + \lambda_2 - v_1 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 20, \\ x_2 + w_1 = 8, \\ x_1 + x_2 + w_2 = 10; \end{cases} \tag{12}$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \ge 0$$

Враховуючи рівності (2) можна записати:

$$v_1 x_1 = 0, v_2 x_2 = 0, w_1 \lambda_1 = 0, w_2 \lambda_2 = 0 \tag{13}$$

Розв’язуємо задачу методом штучного базису. В перше та друге рівняння системи додаємо штучні змінні z_1, z_2 та розглядаємо задачу лінійного програмування, що складається в визначенні максимального значення функції

$$\overline{F} = -Mz_1 - Mz_2$$

при умовах

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + \lambda_2 - v_1 + z_1 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + z_2 = 20, \\ x_2 + w_1 = 8, \\ x_1 + x_2 + w_2 = 10; \end{cases} \quad (14)$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0$$

В результаті розв’язання задачі знаходимо допустимий базисний розв’язок системи лінійних рівнянь (14):

Таблиця 1 – Перша симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	θ
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	
1	$-M$	z_1	10	4	-1	0	1	-1	0	0	0	1	0	2,5
2	$-M$	z_2	20	-1	4	1	1	0	-1	0	0	0	1	-
3	0	w_1	8	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-
4	0	w_2	10	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	10
		$\Delta''(M)$		-3	-3	-1	-2	1	1	0	0	0	0	

Таблиця 2 – Друга симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	θ
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	
1	0	x_1	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0		0	-
2	$-M$	z_2	$\frac{45}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	0	0		1	6
3	0	w_1	8	0	1	0	0	0	0	1	0		0	8
4	0	w_2	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1		0	6
		$\Delta''(M)$			$-\frac{15}{4}$	-1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0		0	

Таблиця 3 – Третя симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	θ
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	
1	0	x_1	4	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0			
2	0	x_2	6	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0			
3	0	w_1	2	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0			
4	0	w_2	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1			
		$\Delta''(M)$			0	0	0	0	0	0	0			

$$x_1^0 = 4; x_2^0 = 6; w_1 = 2; w_2 = 0; \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Відповідь: Так як $x_1^0 v_1 = 0; x_2^0 v_2 = 0; \lambda_1^0 w_1 = 0; \lambda_2^0 w_2 = 0;$ то $(X_0; \Lambda_0) = (4;6;0;0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для вихідної задачі. Тобто $X^* = (4;6)$ - оптимальний план вихідної задачі і $f_{\max} = 80$.

1.2.2 Самостійна робота

Розв'язати задачу квадратичного програмування

Варіант № 1 $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	**Варіант № 2** $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 \le 3, \\ x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
Варіант № 3 $f(x) = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	**Варіант № 4** $f(x) = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
Варіант № 5 $f(x) = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	**Варіант № 6** $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
Варіант № 7 $f(x) = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	**Варіант № 8** $f(x) = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
Варіант № 9 $f(x) = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 0, \\ x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	**Варіант № 10** $f(x) = 6x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Варіант № 11 $f(x)=6x_2-x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2+2x_1x_2\to\max$ $\begin{cases}-x_1+2x_2\le 2,\\ x_1\le 4,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$	**Варіант № 12** $f(x)=6x_2-x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2+2x_1x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1+4x_2\le 12,\\ -x_1-2x_2\le -2,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$
Варіант № 13 $f(x)=8x_1+12x_2-x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2\to\max$ $\begin{cases}-2x_1-x_2\le 4,\\ 2x_1+5x_2\le 10,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$	**Варіант № 14** $f(x)=8x_1+12x_2-x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2\to\max$ $\begin{cases}-x_1+2x_2\le 2,\\ x_1\le 6,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$
Варіант № 15 $f(x)=8x_1+12x_2-x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2\to\max$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 0,\\ 4x_1+x_2\le 12,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$	**Варіант № 16** $f(x)=3x_1-2x_2-\frac{1}{2}x_1^2-x_2^2+x_1x_2\to\max$ $\begin{cases}-2x_1-x_2\le 2,\\ 2x_1+3x_2\le 6,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$
Варіант № 17 $f(x)=6x_1+4x_2-x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2\le 2,\\ -2x_1+x_2\le 0,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$	**Варіант № 18** $f(x)=6x_1+4x_2-x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 2,\\ x_2\le 1,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$
Варіант № 19 $f(x)=6x_1+4x_2-x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1+2x_2\le 6,\\ -3x_1-x_2\le -2,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$	**Варіант № 20** $f(x)=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2\to\max$ $\begin{cases}-x_1+x_2\le 1,\\ 3x_1+2x_2\le 6,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$
Варіант № 21 $f(x)=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2\to\max$ $\begin{cases}-x_1+x_2\le 1,\\ x_1\le 3,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$	**Варіант № 22** $f(x)=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2\to\max$ $\begin{cases}-x_1+x_2\le 2,\\ 3x_1+4x_2\le 12,\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$

Варіант № 23	Варіант № 24
$f(x)=2x_1+2x_2-x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1+3x_2 \le 12, \\ x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$f(x)=2x_1+2x_2-x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 4, \\ -x_1+x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

1.2.3 Контрольні питання

1 Яка функція називається квадратичною формою?

2 Сформулювати необхідні і достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції

3 Що таке позитивно-визначена та позитивно-полувизначена квадратична форма?

4 Яка функція називається опуклою?

5 Сформулювати задачу квадратичного програмування

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. Вузов/И.Л. Акулич.- М.: Высш. шк., 1986.- 319 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України/О.В. Боровик, Л.В. Боровик.- К.:Центр учбової літератури,2007
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
4. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник/І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури,2007 – 232 с.
5. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"/Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.