МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра Комп'ютерних наук

НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни
«**Дослідження операцій**»
для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Мелітополь
2017

Нелінійне програмування. Метод множників Лагранжа. Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни «Дослідження операцій» для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» – Таврійський державний агротехнологічний університет, 2017 – 13 с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов'єва О.Г.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри
«_24_» травня__2017___р. Протокол № __16___

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_25_» _травня_ 2017__р. Протокол № _10____

ЗМІСТ

Введення 5

Лабораторна робота № 9 5

1.1 Порядок виконання роботи 6
1.2 Завдання для самостійної підготовки 6
1.3 Теоретичні відомості 6
1.4 Практична частина 7

1.2.1 Контрольний приклад 7

1.2.2 Самостійна робота 10

1.2.3 Контрольні питання 17

Список літератури 18

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9

Тема: **Нелінійне програмування. Метод множників Лагранжа**

Мета Навчити розв'язувати задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа.

Час: 2 год.

1.1 Порядок виконання роботи

- Проробити практичну частину.
- Виконати домашнє завдання.

1.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

а) вивчити конспект лекцій;

б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 154-170;

1.3 Теоретичні відомості

Класична задача оптимізації має на увазі в якості обмежень використовувати тільки рівняння і не передбачає умову невід'ємності змінних:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$$
$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1, k})$$

де f, g_i - неперервні функції

Метод множників Лагранжа

Для розв’язання цієї задачі вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називають множниками Лагранжа.

Складають функцію Лагранжа.

$$F(x_1, x_2,..., x_n, \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m) = f(x_1, x_2,..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - g_i(x_1, x_2,..., x_n)$$

та знаходять частні похідні $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ та $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Розглядається система $n+m$ рівнянь з $(n+m)$ змінними:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \end{cases}$$

Будь-яке рішення системи рівнянь визначає точку $X = (x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$, у якій може мати місце екстремум функції $f(x_1, x_2,..., x_n)$.

Отже, вирішивши систему рівнянь, отримують всі крапки, в яких функція може мати екстремальні значення.

Далі, щоб вибрати оптимальне рішення необхідно проаналізувати всі отримані рішення, спираючись на інтерпретацію поставленого завдання, тобто провести семантичний аналіз.

Алгоритм методу множників Лагранжа

1. Складаємо функцію Лагранжа
2. Знаходимо частні похідні від функції Лагранжа по змінним x_i, λ_i і прирівнюємо їх до нуля
3. Вирішуючи систему рівнянь, знаходимо точки, в яких цільова функція завдання може мати екстремум
4. Серед точок, в яких очікується можливість екстремуму, знаходять такі, в яких досягається екстремум і обчислюють значення функції в них

1.3 Практична частина

Задача 1.

За планом виробництва необхідно виготовити 180 виробів. Ці вироби можуть бути виготовлені двома технологічними способами. При виробництві x_1 виробів 1-им способом витрати рівні $4x_1 + x_1^2$ руб., при виробництві x_2 виробів 2-им способом витрати рівні $8x_2 + x_2^2$ руб. Визначити, скільки виробів кожним зі способів варто виготовити, щоб витрати були мінімальні.

Розв'язання

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 180 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Знайдемо $f_{\min}$ без обліку умови $x_1, x_2 \ge 0$.

$$F(x_1 x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 + 2x_1 = \lambda \\ 8 + 2x_2 = \lambda \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 + 2x_1 = 8 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases} \quad 2x_1 = 182 \;\; x_1{*} = 91 \;\; x_2{*} = 89.$$

Точка $(91;89)$ – підозріла на екстремум.

Використовуючи другі частні похідні можна показати, що в точці (91;89) функція f має умовний екстремум.

Для того, щоб перевірити, чи відповідає стаціонарна точка X мінімуму, обчислимо матрицю Гессе функції $F(x_1 x_2, \lambda)$:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

яка виявляється додатньо визначеною ($2*2-0*0=4>0$). Це означає, що координати точки X визначають точку глобального мінімуму. Таким чином,

$$f_{\min} = 4 \cdot 91 + 91^2 + 8 \cdot 89 + 89^2 = 17278$$

Завдання до лабораторної роботи №9

1. Вивчити теоретичний матеріал щодо вирішення завдань нелінійного програмування.
2. Розробити програму, що реалізовує метод вирішення завдань нелінійного програмування. Мова програмування вибрати на свій розсуд.
3. Програма повинна мати зручний і простий в розумінні призначений для користувача інтерфейс. Передбачити висновок на екран проміжних результатів. В якості вхідних даних використовувати математичну модель, перерахування змінних. Як вихідних даних значення знайдених змінних і значення цільової функції.
4. За допомогою розробленої програми вирішити задачу, обрану за варіантом завдання.
5. За результатами лабораторної роботи оформити і захистити звіт

1.4.2 Варіанти завдань до самостійної роботи

Варіант №1 а) $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ б) $F = 3x_1^2 + 2x_2^2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$	**Варіант №2** а) $F = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_3,$ $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ б) $F = x_1 x_2,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$
Варіант №3 а) $F = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 16$ б) $F = x_1^2 + 2x_2^2,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 3x_1 + x_2 = 17 \end{cases}$	**Варіант №4** а) $F = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 12x_3^2,$ $3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 18$ б) $F = x_1^2 + x_2^2,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$
Варіант №5 а) $F = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 15x_3^2,$ $4x_1 + 7x_2 + x_3 = 14$ б) $F = 9x_1^2 + 2x_2^2 + 3,$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 7 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$	**Варіант №6** а) $F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ б) $F = x_1^2 + x_2^2,$ $\begin{cases} x_1 + 4 = x_2, \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

Варіант №7 а) $F = x_1 x_2 x_3,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ б) $F = 2x_1 x_2 + x_2^2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$	**Варіант №8** а) $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ б) $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 7,$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 6 = 0, \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$
Варіант №9 а) $F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2,$ $3x_1 + 6x_2 = 30$ б) $F = 2x_1^2 + x_2^2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$	**Варіант №10** а) $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ б) $F = 2x_1^2 + x_2^2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$
Варіант №11 а) $F = x_1^2 x_2^2 x_3^2,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ б) $F = x_1 x_2,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 4x_1 + 8x_2 = 5 \end{cases}$	**Варіант №12** а) $F = x_1 x_2 + x_2 x_3,$ $x_1 + x_2 = 4$ б) $F = 2x_1 x_2 + x_2^2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 4x_1 + 8x_2 = 13 \end{cases}$

Варіант №13	Варіант №14
а) $F = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 3x_3^2,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 16$ б) $F = 3x_1^2 + 2x_2^2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$	а) $F = 3{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 12x_3^2,$ $3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 18$ б) $F = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$
Варіант №15	**Варіант №16**
а) $F = 5{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 15x_3^2,$ $4x_1 + 7x_2 + x_3 = 14$ б) $F = x_1^2 - x_2^2,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 4x_1 - 10x_2 = 2 \end{cases}$	а) $F = 3{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 6x_1x_3,$ $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ б) $F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 - 10x_2 = 2 \end{cases}$
Варіант №17	**Варіант №18**
а) $F = {x_2}^2 + x_2^2 + x_3^2,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ б) $F = 2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 + x_2,$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12, \\ x_1 + 10x_2 = 18 \end{cases}$	а) $F = x_1x_2x_3,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ б) $F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$
Варіант №19	**Варіант №20**
а) $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2,$ $-x_1 + 2x_2 = -5$ б)	а) $F = {x_1}^2 + x_2^2 - x_3^2,$ $2x_1 + x_2^2 + 3x_3^2 = 3$ б)

$F = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$	$F = 5x_1^2 + 3x_2^2,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$
Варіант №21 а) $F = 5x_1^{\ 2} + 3x_2^{\ 2} + 15x_3^2,$ $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ б) $F = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 - 4x_1x_2,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$	**Варіант №22** а) $F = x_1x_2x_3,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ б) $F = 5x_1^2 + 3x_2^2,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$
Варіант №23 а) $F = x_1^{\ 2} + 4x_1x_2 \ + x_3^2,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ б) $F = x_1^2 + 2x_2^2,$ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$	**Варіант №24** а) $F = 2x_1^{\ 2} + 4x_2 \ + 3x_3^2,$ $x_1 + 3x_2^{\ 2} + x_3 = 6$ б) $F = 2x_1^2 - x_2^2,$ $\begin{cases} 4x_1 \ + x_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$
Варіант №25 а) $F = x_1 \ x_2^{\ 2} x_3,$ $x_1 + 2x_2 \ + x_3 = 1$ б) $F = x_1 x_2,$ $\begin{cases} x_1 \ + 2x_2 = 1, \\ x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 16 \end{cases}$	**Варіант №26** а) $F = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} x_3,$ $x_1 + 2x_2 \ + x_3 = 1$ б) $F = (x_1 - 4)^2 - x^2,$ $\begin{cases} x_1 \ + 2x_2 = 2, \\ 2x_1 \ + x_2 \ = 8 \end{cases}$

1.2.4 Контрольні питання

1. В чому відмінні риси задач нелінійного програмування від завдань ЛП?

2. Дайте класифікацію задач нелінійного програмування.

3. Що є необхідною умовою існування екстремуму для задачі безумовної оптимізації?

4. Дайте поняття сідловий точки функції Лагранжа для задачі лінійного програмування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. Вузов/И.Л. Акулич.- М.: Высш. шк., 1986.- 319 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України/О.В. Боровик, Л.В. Боровик.- К.:Центр учбової літератури,2007
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
4. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник/І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури,2007 – 232 с.
5. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"/Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.