МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп'ютерних наук

ТЕОРІЯ ІГОР

методичні вказівки
для виконання лабораторної роботи з дисципліни
«Теорія прийняття рішень»
для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальності 122
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Мелітополь, 2018

Теорія ігор. Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни «Теорія прийняття рішень» для здобувачів ступеня вищої освіти Бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» - Таврійський державний агротехнологічний університет, 2018 – 19 с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов'єва О.Г.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри

«_27_» _березня__2018__р. Протокол № _15____

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_29_» _березня__ 2018___р. Протокол № 7

ЗМІСТ

ВСТУП

Дані методичні вказівки є керівництвом для проведення лабораторних занять з курсу “Теорія прийняття рішень” для студентів факультетуІнженерії та комп’ютерних технологій очної форми навчання.

Метою методичних вказівок є самостійне вивчення студентами теоретичного матеріалу і придбання практичних навичок для розв’язання задач.

Необхідність написання даних методичних вказівок обумовлена дефіцитом довідкової і навчальної літератури по теорії прийняття рішень.

Врезультаті студент повинен навчитисябудувати платіжні матриці, знаходити розв’язок гри графічним методом та зведенням гри до задачі лінійного програмування

Лабораторна робота містить основні теоретичні відомості, контрольний приклад та задачі для самостійної роботи.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

Тема: Елементи теорії ігор. Графічний метод
Мета: 1) Засвоєння основних понять теорії ігор та графоаналітичного методу рішень матричних ігор
2) Навчитися розв’язувати гру зведенням її до задачі лінійного програмування
Час: 4 години.
Література: [1] 170-185, [2] 170-190, [3] 230-240, [4] 156-167, [5] 64-68

1 Завдання для самостійноїпідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов’язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

а) вивчити конспект лекцій;

б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 6-15;

в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:

1)Задачі теорії ігор

2) Методи розв’язання задач теорії ігор

2 Теоретична частина

Основна задача теорії ігор – пошук оптимальних стратегій, що дають гравцям найбільший середній виграш (найменший середній програш).

Стратегія – метод вибору ходів протягом гри (прийняття рішення про дію) у будь-якій можливій ситуації і при будь-якій фактичній інформації про дії іншої сторони.

Матрична гра- це кінцева гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш першого гравця у вигляді матриці (таблиця 1), рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 1, а стовпець - номеру застосовуваної стратегії 2-го гравця; на перетинанні рядка й стовпця матриці перебувають виграш гравця 1, відповідний до застосовуваних стратегій).

Таблиця 1 – Платіжна матриця гри

Стратегії гравця А	Стратегії гравця В					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_j	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Розв'язання гри полягає у знаходженні оптимальних стратегій гравців

$$S_A^* = (p_1, p_2, ..., p_m); \quad S_B^* = (q_1, q_2, ..., q_n),$$

де $p_1, p_2, ..., p_m$ - ймовірності вибору гравцем А його чистих стратегій $A_1 ... A_m$;

$q_1, q_2, ..., q_n$ - ймовірності вибору гравцем В його чистих стратегій $B_1 ... B_n$.

Дотримання гравцями оптимальних стратегій дає можливість одержати кожному з них максимальний середній виграш (мінімальний середній програш), що називається ***ціною гри***.

Гра називається такою, що має сідлову точку, якщо її нижня ціна α дорівнює верхній ціні β:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij};$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij};$$

$$\alpha = \beta.$$

У випадку, коли гра має сідлову точку кажуть, що гра має рішення в ***чистих стратегіях***.

Алгоритм рішення гри:

1 Знайти верхню та нижню ціну гри та перевірити наявність у гри сідлової точки та рішення у чистих стратегіях

2 За відсутності у гри сідловок точки спробувати спростити гру, шляхом виключення з платіжної матриці домінуючих (заздалегідь невигідних) та дублюючих стратегій

3 Після спрощення платіжної матриці гри її рішення проводять одним з методів: гра $2\times m$ чи $n\times 2$ - графоаналітичним методом, гра $m\times m$ - методом зведення гри до задачі лінійного програмування

3 Порядок виконання практичної частини

Задача 1.

Нехай кожний із двох гравців А і В, має по три стратегії.

Визначити нижню й верхню ціну гри, що задана платіжною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Чи має гра сідлову точку?

Розв'язання.

Складемо платіжну матрицю гри (таблиця 1)

Таблиця 1 – Платіжна матриця гри

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	0,7	0,8	0,7
A_3	0,7	0,6	0,6	0,6
β_j	0,9	0,7	0,8	$\alpha=\beta=0{,}7$

Всі розрахунки зручно звести в таблицю, до якої, крім матриці P, додається стовпець α_i і рядок β_j (таблиця 1) де $\alpha_i = \min\limits_{j=1,2,3} a_{ij}, \beta_j = \max\limits_{i=1,2,3} a_{ij}$.

Проаналізувавши рядка матриці (стратегії гравця *А*), заповнюємо стовпець α_i: $\alpha_1 = 0{,}5,\ \alpha_2 = 0{,}7,\ \alpha_3 = 0{,}6$ - мінімальні числа в рядках 1, 2, 3.

Проаналізувавши стовпці матриці (стратегії гравця *B*), заповнюємо рядок $\beta_j : \beta_1 = 0{,}9,\ \beta_2 = 0{,}7,\ \beta_3 = 0{,}8$ - максимальні числа в стовпцях 1, 2, 3 відповідно. Нижня ціна гри

$\alpha = \max\limits_{i=1,2,3} \alpha_i = \max(0{,}5;0{,}7;0{,}6) = 0{,}7$ - найбільше число в стовпці α_i.

Верхня ціна гри

$\beta = \min\limits_{j=1,2,3} \beta_j = \min(0{,}9;0{,}7;0{,}8) = 0{,}7$ - найменше число в стоці β_j.

Ці значення рівні, тобто $\alpha = \beta = 0{,}7$, і досягаються на парі стратегій (A_2, B_2).

Отже, гра має сідлову точку(A_2, B_2) й ціна гри $g = 0{,}7$. Це значить, що гравець А при постійному використанні стратегії A_2 одержує максимальний гарантований виграш, що дорівнює 0,7, а гравець В при постійному використанні стратегії B_2 одержує мінімальний гарантований програш.

У випадку, коли гра не має сідловок точки$(\alpha \neq \beta)$, можна одержати оптимальне рішення, відповідним образом чергуючи чисті стратегії.

Задача 2.

Вибрати оптимальний режим роботи нової системи ПЕОМ, яка складається з двох ЕОМ типів A_1 и A_2. Відомі виграші від впровадження кожного типу ЕОМ в залежності від зовнішніх умов, якщо порівняти зі старою системою.

При використанніЕОМ типів A_1 и A_2 в залежності від характеру розв’язуємих задач B_1 и B_2 (довгостроковіі короткострокові) буде різний ефект. Мається на увазі, що максимальний виграш відповідає найбільшому значенню критерію ефекту від заміни обчислювальної техніки старого покоління на ЕОМ A_1 и A_2.

Задана матрицягри, де A_1, A_2–стратегії керівника; B_1, B_2 - стратегії, що відображають характер задач, що розв’язуються на ЕОМ.

$$p = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Потрібно знайти оптимальну змішану стратегію керівника та гарантований середній результат g, тобто визначити, яку долю часу повинні використовуватися ЕОМ типів А1 і А2.

Розв'язання

Визначимо наявність сідлової точки.

Таблиця 2 – Платіжна матриця гри

	B_1	B_2	$\alpha_i = \min a_{ij}$
A_1	0,3	0,8	0,3
A_2	0,7	0,4	0,4
$\beta_j = \max a_{ij}$	0,7	0,8	

Нижня ціна гри

$$\alpha = \max_{i=1,2} \alpha_i = \max(0{,}3;0{,}4) = 0{,}4$$

Верхня ціна гри

$$\beta = \min_{j=1,2} \beta_j = \min(0{,}7;0{,}8) = 0{,}7$$

Таким чином, $\alpha \neq \beta$, отже сідлової точки задача не має.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2)$ й ціну гри g графічним методом. Геометричний аналіз можливий, тому що маємо платіжну матрицю розмірності 2×2.

Гравець А, виходячи зі своїх інтересів зацікавлений виграти якнайбільше й тому буде прагнути одержати виграш, що перевищує ціну гри. При застосуванні гравцем В своїх чистих стратегій B_1 та B_2 це прагнення гравця А визначають такі обмеження:

$$\begin{cases} 0{,}3p_1 + 0{,}7p_2 \geq g, \\ 0{,}8p_1 + 0{,}4p_2 \geq g. \end{cases} \qquad (*)$$

Відповідно, гравець В так само застосовує свої змішані стратегії $S_B(q_1, q_2)$, але прагне, щоб величина програшу була якнайменше ціни гри, тобто

$$\begin{cases} 0{,}3q_1 + 0{,}8q_2 \le g, \\ 0{,}7q_1 + 0{,}4q_2 \le g \end{cases}$$

Побудуємо графіки прямих (*), заміняючи відповідні обмеження нерівності рівностями.

(1) $0{,}3p_1 + 0{,}7p_2 = g$

або тому що $p_2 = 1 - p_1$

$$0{,}3p_1 + 0{,}7(1 - p_1) = g$$

$$0{,}3p_1 + 0{,}7 - 0{,}7p_1 = g$$

$$-0{,}4p_1 + 0{,}7 = g$$

p_1	0	1
g	0,7	0,3

(2) $0{,}8p_1 + 0{,}4p_2 = g$

$$0{,}8p_1 + 0{,}4(1 - p_1) = g$$

$$0{,}8p_1 + 0{,}4 - 0{,}4p_1 = g$$

$$0{,}4p_1 + 0{,}4 = g$$

p_1	0	1
g	0,4	0,8

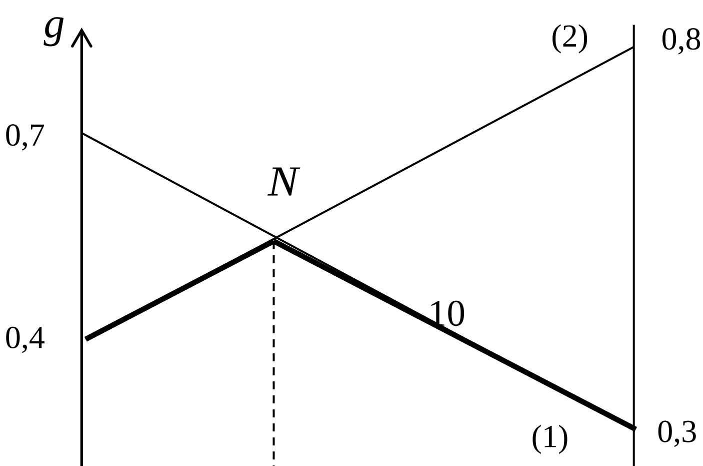


Рисунок 1 – Графічний розв'язок

Гарантований середній виграш гравця *A* – жирна ламана лінія. Максимальний гарантований виграш досягається в крапці N.

Знайдемо координати крапки N.

$$\begin{cases} -0,4p_1 + 0,7 = g \\ 0,4p_1 + 0,4 = g \end{cases}$$

$$0,8p_1 = 0,3$$

$$p_1 = 0,375 \qquad g = 0,55$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 0,625$$

Таким чином оптимальна стратегія для гравця А: $S_A(0,375;0,625)$, ціна гри $g = 0,55$.

Висновок:При установці нової системи ЕОМ, якщо невідомі умови розв'язання задач замовника, на роботу ЕОМ A_1 повинно приходитися 37,5% часу, а на роботу ЕОМ A_2 - 62,5%. При цьому виграш буде складати 55% в порівнянні з попередньою системою ЕОМ.

Задача 3.

Знайти рішення й ціну гри, заданою платіжною матрицею

$$p = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Рішення.

Визначимо наявність сідлової точки.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i

A_1	3	2	7	4	2
A_2	2	4	3	3/2	3/2
β_j	3	4	7	4	

$\alpha = 2$,

$\beta = 3$.

Таким чином, $\alpha \neq \beta$, отже сідлової точки задача не має.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2)$ й ціну гри g графічним методом. Геометричний аналіз можливий, тому що маємо платіжну матрицю розмірності 2×4.

Гравець *A*, виходячи зі своїх інтересів зацікавлений виграти якнайбільше й тому буде прагнути одержати виграш, що перевищує ціну гри. При застосуванні гравцем *У* своїх чистих стратегій B_1, B_2, B_3 і B_4 це прагнення гравця *A* визначають такі обмеження:

$$\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 \geq g, \\ 2p_1 + 4p_2 \geq g, \\ 7p_1 + 3p_2 \geq g, \\ 4p_1 + 3/2_2 \geq g. \end{cases} \qquad (*)$$

Відповідно, гравець *B* так само застосовує свої змішані стратегії $S_B(q_1, q_2, q_3, q_4)$, але прагнути, щоб величина програшу була якнайменше ціни гри, тобто

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_2 + 7q_3 + 4q_3 \leq g, \\ 2q_1 + 4q_2 + 3q_3 + 3/2q_4 \leq g \end{cases}. \qquad (**)$$

Побудуємо графіки прямих (*), заміняючи відповідні обмеження нерівності рівностями.

I: $3p_1 + 2(1 - p_1) = g$

$3p_1 + 2 - 2p_1 = g$

$p_1 + 2 = g$

p_1	0	1
g	2	3

$\text{II}: 2p_1 + 4(1 - p_1) = g$

$-2p_1 + 4 = g$

p_1	0	1
g	4	2

$\text{III}: 7p_1 + 3(1 - p_1) = g$

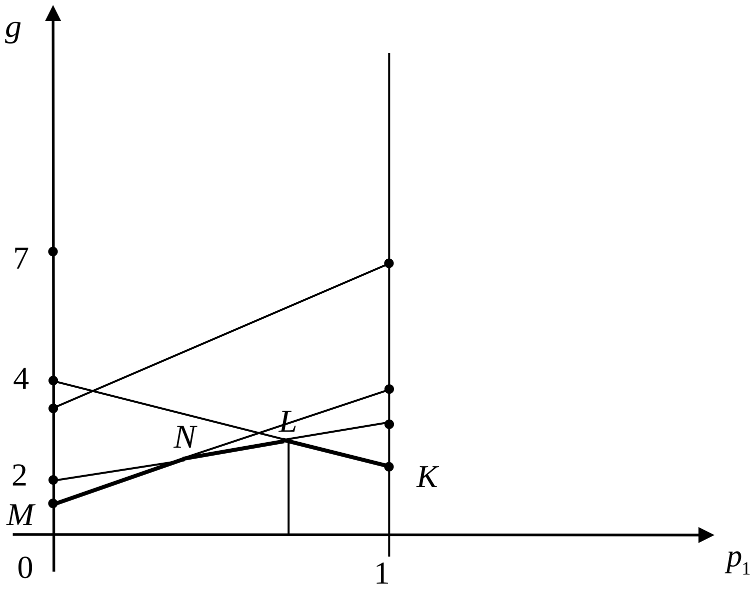
$4p_1 + 3 = g$

p_1	0	1
g	3	7

$\text{IV}: 4p_1 + 3/2(1 - p_1) = g$

$5/2p_1 + 3/2 = g$

p_1	0	1
g	3/2	4



Нижня границя виграшу задається ламаної $MNLK$. Оптимальне рішення гри досягається в крапці L.

Знайдемо її координати. Крапка L утворена перетинанням I й II прямих, (це означає, що оптимальна стратегія гравця *У* включає чисті стратегії B_1 й B_2 з імовірностями q_1 й q_2):

$$\begin{cases} p_1 + 2 = g \\ -2p_1 + 4 = g \end{cases}$$

$$3p_1 - 2 = 0$$

$$p_1 \frac{2}{3}; \qquad g = \frac{8}{3};$$

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{3}$$

У такий спосіб оптимальна стратегія для гравця *A:* $S_A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, ціна гри $g = \frac{8}{3}$.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію для гравця *B* з рівнянь (**).

Гравець *У* повинен ураховувати стратегії, які визначив гравець *A* в якості оптимальних. Це приводить до вибору гравцем *У* стратегій, що визначають його оптимальне рішення, тобто маємо $q_3 = 0,\ q_4 = 0$, отже

$$3q_1 + 2q_2 \le g$$

$2q_1 + 4q_2 \le g$, при цьому $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1.$

Будуємо графіки прямих, що відповідають нерівностям. Знаходимо координати крапки перетинання

$$3q_1 + 2(1 - g_1) = 2q_1 + 4(1 - q_1)$$

$$3q_1 + 2 - 2g_1 - 4 + 4q_1 = 0$$

$$3q_1 = 2$$

$$q_1 = \frac{2}{3},\ q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{3}$$

Таким чином $S_B(2/3;1/3;0;0),\ g = {}^{8}\!/_{3}$.

Висновок: Рішенням ігри є стратегії $S_A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ й $S_B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0;0\right)$, при цьому ціна гри $g = \frac{8}{3}$.

Варіанти для самостійної роботи

Задача 1

Варіант 1	**Варіант 2**

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-9	4	-8	3
A_2	2	-6	3	-5

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	1	0	-2
A_2	4	5	-3	9

Варіант 3

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	0	4	-1
A_2	8	7	3	8

Варіант 4

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	0	2	1
A_2	5	2	8	-4

Варіант 5

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	2	3	5
A_2	0	7	-1	-4

Варіант 6

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	-1	0	3
A_2	2	4	-2	2

Варіант 7

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	2	0
A_2	-4	-3	0	5

Варіант 8

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-2	0	4	3
A_2	6	1	-3	2

Варіант 9

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	4	5	1
A_2	2	1	-4	3

Варіант 10

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-3	7	2	4
A_2	10	0	5	-1

Варіант 11

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4

Варіант 12

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4

A_1	6	-1	3	0
A_2	0	5	3	5

A_1	0	4	2	1
A_2	6	-5	2	9

Варіант 13

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	7	-1	0
A_2	2	1	3	8

Варіант 14

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	7	-3
A_2	10	5	0	6

Варіант 15

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	7	-4
A_2	5	0
A_3	3	-1
A_4	-2	6

Варіант 16

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	-5	4
A_2	-1	2
A_3	0	3
A_4	2	1

Варіант 17

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	-3	8
A_2	2	7
A_3	4	-1
A_4	5	4

Варіант 18

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	-6	0
A_2	4	-4
A_3	3	-6
A_4	2	-1

Варіант 19

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	9	-1
A_2	5	4
A_3	0	6
A_4	1	4

Варіант 20

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	6	0
A_2	-2	5
A_3	3	4
A_4	0	1

Варіант 21

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1

Варіант 22

Знайти розв'язок гри графічним методом

	B_1	B_1

A_1	0	10
A_2	2	8
A_3	4	1
A_4	1	0

A_1	-1	-3
A_2	-8	2
A_3	0	-4
A_4	2	-3

Варіант 23

Знайти розв’язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	-2	9
A_2	0	4
A_3	2	1
A_4	-4	7

Варіант 24

Знайти розв’язок гри графічним методом

	B_1	B_1
A_1	0	4
A_2	6	-3
A_3	2	0
A_4	1	4

4 Рекомендації щодо оформлення звіту

Звіт по лабораторній роботі повинен містити:
титульний лист;
мету роботи;
висновки.

5Контрольні питання

1 Дайте визначення наступним поняттям: гра, гравець, стратегія, хід, чиста стратегія, змішана стратегія.
2 Поясніть, яка гра називається матричною грою з нульовою сумою?
3 Що таке платіжна матриця гри?
4 Який сенс мають елементи платіжної матриці?
5 У чому полягає розв’язання гри?
6 Дайте визначення і спосіб пошуку верхньої та нижньої ціни гри.
7 Що таке сідловка точка і як перевіряється її наявність?
8 Поясніть порядок рішення ігор графоаналітичним методом.

9 При якому розмірі платіжної матриці гри для її рішення можна застосовувати метод лінійного програмування?

10 Якими повинні бути елементи платіжної матриці гри для її рішення методом лінійного програмування?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе : Учеб.пособие для вузов / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев, Т.П.Барановская; Под ред. Б.А. Лагоши.-2-е изд., перераб. и доп. -М.: Финансы и статистика, 2003 - 224 с.
2 Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций : Учеб.пособие / И.Д.Протасов. - М.: Гелиос АРВ, 2003 - 368с.
3 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах изадачах: учебное пособие для вузов/И.Л. Акулич. - М.: Высшая школа, 1986 – 320 с.
4 Иванова Л.Н., Реннер А.Г., Сафиуллин Ф.И. Методические указания крешению типовых задач по курсу "Теория игр"/Л.Н. Иванова**. -**Оренбург : ОГУ, 1999. - 34с
5 Реннер Г.А. Математическое программирование: Задачи. Алгоритмы.Программная реализация: Учеб. пособие/А.Г.Реннер, Ю.Н.Пивоваров,В.Н.Тарасов. - Оренбург : ОГУ, 1999. - 146с.
6 Реннер А.Г. Методы принятия решения:Автоматизированное пособие/А.Г. Реннер, М.Ю. Нестеренко. - Оренбург, 2003г.
7 Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология.Учебное пособие/ Е.С. Венцель. - М.: Дрофа, 2004.
8 Оуэн Г. Теория игр/Г.Оуэн. – М.: Вузовская книга, 2004.