МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІНИЙ НІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп'ютерних наук

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Методичні вказівки до лабораторної роботи з дисципліни
«**Дослідження операцій**»
для здобувачів ступеня вищої освіти

Мелітополь
2017

Симплекс-метод. Методичні вказівки до лабораторної роботи – Таврійський державний агротехнологічний університет, 2017 – 19 с.

Розробили: д.т.н., проф. Малкіна В.М., ст. викл. Зінов’єва О.Г.
ст. викл. Мирошниченко М.Ю.

Рецензент: к.т.н., доц. Щербіна В.М.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри
«_24» ___травня__2017_р. Протокол №16 _____

Затверджено методичною комісією факультету ІКТ
«_25_» ___травня 2017 р. Протокол № 10

ЗМІСТ

ВСТУП

Дані методичні вказівки є керівництвом для проведення практичних занять за курсом “Дослідження операцій”.

Метою поданих методичних вказівок є закріплення студентами вивченого теоретичного матеріалу і придбання практичних навичок для розв’язку задач лінійного програмування симплекс-методом.

Методичні вказівки складені із врахуванням того, що студенти попередньо розібрали теоретичний матеріал і приклади, наведені в конспекті лекцій.

У результаті студенти повинні навчитися знаходити опорний план задачі, складати симплекс-таблиці, визначати напрямні стовпець і рядок, перевіряти опорний план задачі на оптимальність і вміти переходити до нового плану.

Практичне заняття містить основні теоретичні відомості, контрольний приклад, задачі для самостійної роботи, домашнє завдання і контрольні питання.

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Тема: **Симплекс-метод розв’язку ЗЛП**

Ціль:
1) Навчити знаходити опорний план задачі.
2) Навчити складати симплекс-таблицю і визначати напрямні стовпець і рядок.
3) Навчити перевіряти опорний план задачі на оптимальність.
4) Навчити переходити до нового плану задачі.

Час: 2 ч.

3.1 Теоретичні відомості

Симплекс-метод використовується для визначення максимального значення цільової функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при заданій системі обмежень

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i & (i = \overline{1,m}), \\ x_j \ge 0 & (j = \overline{1,n}). \end{cases} \tag{2}$$

Симплекс-метод базується на переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції зростає.

Розв’язок задачі лінійного програмування симплекс-методом включає наступні етапи:

1) Приводимо ЗЛП (1) – (2) до канонічного виду.

ЗЛП полягає у визначенні максимального значення цільової функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{3}$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_j \ge 0,\ i = \overline{1, m+n}. \end{cases} \tag{4}$$

Змінні x_{n+1}, $x_{n+2} \ldots x_{n+m}$ є базисними, тому що кожна з них входить до складу тільки одного рівняння системи обмежень (3) з коефіцієнтом 1. Змінні x_1, $x_2 \ldots x_n$ є вільними.

2) Заповнюємо першу симплекс-таблицю.

Таблиця 3.1 – Симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	Базис $x_{б_i}$	b_i	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	0	$\cdots$	0	θ_i
				x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	
1	0	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	
2	0	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
m	0	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	
$m+1$			F_0	Δ_1	Δ_2	$\cdots$	Δ_n	0	0	$\cdots$	0	

Перша симплекс-таблиця заповнюється за наступними правилами:

а) у стовпець $c_{б_i}$ записують коефіцієнти при базисних змінних в цільовій функції (3), у стовпець $x_{б_i}$ – базисні змінні;

б) у стовпець b_i записують праві частини системи обмежень (4);

в) у стовпцях $x_1, x_2 \ldots x_{m+n}$ записують коефіцієнти a_{ij} при змінних в системі обмежень (4);

г) у $(m+1)$-ому рядку записують значення

$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{б_i} a_{ij} - c_j$, ($j = \overline{1, m+n}$), (Δ_j для базисних змінних дорівнюють 0),

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{б_i} b_i .$$

3) Опорний план задачі має вигляд $X_0 = (x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots x_{n+m})$.

Базисні змінні $x_{n+1}, x_{n+2} \ldots x_{n+m}$ дорівнюють до відповідних елементів стовпця b_i, вільні змінні $x_1, x_2 \ldots x_n$ дорівнюють 0. Таким чином маємо опорний план задачі лінійного програмування $X_0 = (0,0\ldots,0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

4) Перевіряємо опорний план X_0 на оптимальність.

Якщо в $(m+1)$-ому рядку (будемо називати його рядком Δ_j) усі значення $\Delta_j \geq 0$, то X_0 є оптимальним планом задачі (3) – (4). Якщо хоча б одне значення $\Delta_j < 0$, то опорний план X_0 не є оптимальним.

5) Вибираємо напрямний стовпець і напрямний рядок.

Для визначення напрямного стовпця k серед $\Delta_j < 0$ вибираємо максимальне за модулем значення $\left|\Delta_k\right| = \max\limits_{\Delta_j < 0}\left|\Delta_j\right|, \quad (j = \overline{1,\ n+m})$.

Заповнюємо стовпець θ_i. Для $a_{ik} > 0$ $(i = \overline{1,m})$ знаходимо $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ik}}$. Для $a_{ik} \leq 0$ θ_i не обчислюємо.

Напрямний рядок r вибираємо за мінімальним значенням θ_i:

$$\theta_r = \min_{i=\overline{1,m}} \theta_i .$$

На перетинанні напрямного рядка і напрямного стовпця знаходиться дозвільний елемент a_{rk}.

6) Будуємо наступну симплекс-таблицю.

Перехід до неї здійснюється за такими правилами:

а) замість змінної $x_{б_r}$, що відповідає напрямному рядку, у базис вводимо змінну x_k, що відповідає напрямному стовпцеві;

б) елементи напрямного рядка поділяємо на напрямний елемент a_{rk}

$$b'_r = b_r / a_{rk} \; (k = \overline{1, n+m});$$

$$a'_{rj} = a_{rj} / a_{rk} \left(j = \overline{1, n+m}\right);$$

в) елементи напрямного стовпця замінюємо нулями, крім дозвільного елемента, що дорівнює 1;

г) всі інші елементи перераховуємо за правилом прямокутника:

$$b'_i = b_i - \frac{b_r}{a_{rk}} \cdot a_{ik} \text{ при } \quad i \neq r, j \neq k \;;$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \cdot a_{ik} \text{ при } \; i \neq r, j \neq k \;;$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \cdot \Delta_k ,\; j \neq k;$$

$$F'_0 = F_0 - \frac{b_r}{a_{rk}} \cdot \Delta_к = \sum_{i=1}^{m} c_{б_i} \cdot b'_i \;.$$

7) Переходимо до п. 3) і 4). Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то отриманий план X є оптимальним. У противному випадку проводимо нові обчислення і будуємо наступну таблицю за відомими правилами.

3.2 Практична частина

3.2.1 Контрольний приклад

Задача 1.

Для виготовлення трьох видів деталей A, B і C підприємство використовує три різних види сировини $P1$, $P2$ і $P3$. В таблиці 3.2 наведені норми витрат сировини на виробництво однієї деталі кожного виду, величина отриманого прибутку, а також обсяги ресурсів, які можуть бути використані підприємством.

Таблиця 3.2 – Витрати сировини, величина прибутку і загальні обсяги ресурсів

Види сировини	Витрати на виробництво 1 деталі			Обсяги ресурсів
	A	B	C	
$P1$ $P2$ $P3$	1 4 1	2 4 1	2 0 2	8 8 10
Прибуток від реалізації 1 деталі (тис. грн.)	3	4	2	

Знайти план виробництва деталей, при якому прибуток від реалізації буде максимальним.

Розв'язання.

1) Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через x_1 – випуск деталей виду A, через x_2 – випуск деталей виду B, через x_3 – випуск деталей виду C.

Тому що маються обмеження на виділені підприємству ресурси кожного виду, змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти системі нерівностей

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8,$$
$$4x_1 + 4x_2 \quad \leq 8,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10.$$

Прибуток від зробленої продукції складає $3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ тис. грн.

Таким чином, задача полягає у визначенні максимального значення функції $F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ при умовах

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_2 \le 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного виду.

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 10, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

За економічним змістом базисні змінні $x_4, x_5,\ x_6$ - це не використаний обсяг сировини при даному плані виробництва, а саме x_4 – залишок сировини $P1,\ x_5$ – залишок сировини $P2,\ x_6$ – залишок сировини $P3$.

2) Складемо першу симплекс-таблицю.

Таблиця 3.3 – Перша симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	4	2	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
1	0	x_4	8	1	2	2	1	0	0	4
2	0	x_5	8	4	$\boxed{4}$	0	0	1	0	2
3	0	x_6	10	1	1	2	0	0	1	
Δ_j			0	-3	-4	-2	0	0	0	

У стовпець $x_{б_i}$ виписуємо базисні змінні.

У стовпець $c_{б_i}$ виписуємо коефіцієнти цільової функції F при базисних змінних.

У стовпець b_i виписуємо праві частини рівнянь системи обмежень, а в стовпці $x_1, \ldots x_6$ – матрицю системи.

В $(m+1)$-ому рядку виписуємо значення цільової функції $F_0 = \sum_{i=1}^{3} c_{б_i} \cdot b_i$ і $\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} c_{б_i} \cdot x_{ij} - c_j = -c_j$ для $j = 1,2 \ldots 6$.

Таким чином,

$$F_0 = 0 \cdot 8 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 10 = 0,$$
$$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 - 3 = -3,$$
$$\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 - 4 = -4,$$
$$\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 2 = -2,$$
$$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_5 = 0,$$
$$\Delta_6 = 0.$$

3) Початковий опорний план має вигляд $X_0 = \left(0;0;0;8;8;10\right)$. Це означає, що підприємство нічого не виробляє, ($x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$). Уся сировина при цьому залишається не використаною ($x_3 = 8,\ x_4 = 8,\ x_5 = 10$). Прибуток становить $F\left(X_0\right) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ (тис. грн.).

4) Перевіримо план на оптимальність. Тому що рядок Δ_j містить негативні елементи, то отриманий план не є оптимальним.

5) Для визначення напрямного стовпця вибираємо максимальний за модулем негативне значення рядка Δ_j. Це $\Delta_2 = -4$. Отже напрямним стовпцем є стовпець x_2.

Для визначення напрямного рядка обчислюємо $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{i2}}$ (для $a_{i2} > 0$).

Тому що $\theta_2 = 2$ є мінімальним серед усіх значень θ_i, то x_5 – напрямний рядок.

6) Складемо другу симплекс-таблицю.

Змінну x_2 вводимо до базису, змінну x_5 виводимо з базису.

Всі елементи напрямного рядка поділяємо на дозвільний елемент. Всі елементи напрямного стовпця заміняємо нулями, а дозвільний елемент – одиницею. Інші елементи таблиці перераховуємо за правилом прямокутника.

Наприклад, $a'_{13} = 2 - \dfrac{2}{4} \cdot 0 = 2$;

$$a'_{31} = 1 - \frac{4}{4} \cdot 1 = 0 \quad \text{і т.д.}$$

Таблиця 3.4 – Друга симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	4	2	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
1	0	x_4	4	-1	0	$\boxed{2}$	1	-1/2	0	2
2	4	x_2	2	1	1	0	0	1/4	0	-
3	0	x_6	8	0	0	2	0	-1/4	1	4
Δ_j			8	1	0	-2	0	1	0	

$X_1 = (0;2;0;4;0;8)$. Відповідно до отриманого плану $x_2 = 2$, тобто підприємство виробляє 2 деталі виду B. При цьому залишаються 4 одиниці сировини $P1$ ($x_4 = 4$) і 8 одиниць сировини $P3$ ($x_6 = 8$). Сировина $P2$ витрачена цілком ($x_5 = 0$). Прибуток підприємства складає $F(X_1) = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 8 = 8$ (тис. грн.). Але $\Delta_3 = -2$, отже отриманий план X_1 не є оптимальним. Напрямним стовпцем у другій симплекс-таблиці є стовпець x_3, а напрямним рядком – рядок x_4.

7) Заповнимо третю симплекс-таблицю.

Таблиця 3.5 – Третя симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	4	2	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
1	2	x_3	2	-1/2	0	1	1/2	-1/4	0	
2	4	x_2	2	1	1	0	0	1/4	0	
3	0	x_6	4	1	0	0	-1	1/4	1	
Δ_j			12	0	0	0	1	1/2	0	

План $X_2 = (0;2;2;0;0;6)$ є оптимальним, тому що в рядку Δ_j немає негативних значень.

При даному плані випуску продукції прибуток становить $F(X_2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12$ (тис. грн.).

Відповідь. При виготовленні підприємством 2 деталей виду B і 2 деталей виду C буде отримано максимальний прибуток, який дорівнюватиме 12 тис. грн.

Задача 2.

У сільгосппідприємстві освоєні наступні види діяльності: розведення великої рогатої худоби, а також вирощування озимих зернових, однолітніх і багаторічних трав.

У рік норма внесення органічних добрив на кожен гектар площі, що відводиться під вирощування озимих зернових, однолітніх і багаторічних трав складає відповідно 4, 5 і 1 тонни. При цьому підприємство використовує власні органічні добрива, вироблені кожною коровою у кількості 7 тонн на рік.

Вирощування озимих зернових дозволяє одержувати 2 к.о. з кожного гектара, а вирощування однолітніх і багаторічних трав – по 3 к.о. з гектара. При цьому кожна корова споживає 5 к.о. на рік.

Крім того на вирощування озимих зернових однолітніх і багаторічних трав сільгосппідприємство витрачає відповідно 3, 3 і 2 тис. грн. на рік і на розведення корів – 4 тис. грн.

Прибуток сільгосппідприємство одержує від вирощування озимих зернових і розведення корів, що складає відповідно 3 і 5 тис. грн. на рік з кожного гектара.

Знайти план, при якому досягається максимум прибутку, якщо загальний земельний фонд сільгосппідприємства складає 10 га, а запаси матеріально–грошових ресурсів – 30 тис. грн.

Розв'язання.

1) Складемо математичну модель задачі.

Нехай сільгосппідприємство відводить x_1 га під вирощування озимих зернових, x_2 га – під вирощування однолітніх трав, x_3 га – під вирощування багаторічних трав. Позначимо через x_4 – загальне поголів'я корів.

Тому що маються обмеження на фонд земельних і матеріальних ресурсів, то справедливі наступні нерівності

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 10,$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 30.$$

Тому що сільгосппідприємство використовує власні органічні добрива, то їхні витрати при вирощуванні зернових і трав не повинні перевищувати виробництва органічних добрив великою рогатою худобою, тобто

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 7x_4.$$

Тому що сільгосппідприємство для розведення корів використовує власні кормові ресурси, то їхня загальна кількість не повинна бути менше обсягу їх споживання великою рогатою худобою, тобто

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \ge 5x_4.$$

Прибуток, який одержує сільгосппідприємство при вирощуванні озимих зернових і розведенні корів складає $3x_1 + 5x_4$ тис. грн.

Таким чином, завдання полягає у визначенні максимального значення функції $F = 3x_1 + 5x_4$ при умовах

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 10, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 30, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 \le 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 \le 0, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного виду.

$$F = 3x_1 + 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x5 = 10, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 = 30, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 + x_7 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_8 = 0, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Базисні змінні x_5, x_6, x_7, x_8 за своїм економічним змістом означають відповідно залишки земельних, матеріальних і кормових ресурсів, а також органічних добрив.

2) Складемо першу симплекс – таблицю.

Таблиця 3.6 – Перша симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_i
1	0	x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	0	–
2	0	x_6	30	3	3	2	4	0	1	0	0	7,5
3	0	x_7	0	4	5	1	–7	0	0	1	0	–
4	0	x_8	0	–2	–3	–3	5	0	0	0	1	0
Δ_j			0	–3	0	0	–5	0	0	0	0	

Початковий опорний план $X_0 = (0;0;0;0;10;30;0;0)$. Прибуток становить $F(X_0) = 0$ (тис. грн.).

Даний план не є оптимальним, тому що маються негативні значення Δ_j.

Стовпець x_4 є напрямним стовпцем, тому що $\max\limits_{\Delta_j<0} |\Delta_j| = |\Delta_4| = |-5|$, а рядок x_8 є напрямним рядком, тому що $\min \theta_i = \theta_4 = 0$.

3) Заповнимо другу симплекс-таблицю.

Таблиця 3.7 – Друга симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_i
1	0	x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	0	10
2	0	x_6	30	4,6	5,4	4,4	0	0	1	0	–0,8	6,52
3	0	x_7	0	1,2	0,8	–3,2	0	0	0	1	1,4	0
4	5	x_4	0	–0,4	–0,6	–0,6	1	0	0	0	0,2	–
Δ_j			0	–5	–3	–3	0	0	0	0	1	

План $X_1 = (0;0;0;0;10;30;0;0)$ не є оптимальним, тому що маються негативні значення Δ_j. Прибуток становить $F(X_1) = 0$ (тис. грн.). Напрямним стовпцем є стовпець x_1, а напрямним рядком – рядок x_7.

4) Заповнимо третю симплекс-таблицю.

Таблиця 3.8 – Третя симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_i
1	0	x_5	10	0	0,33	3,67	0	1	0	–0,83	–1,17	2,72
2	0	x_6	30	0	2,33	16,67	0	0	1	–3,83	–6,17	1,8
3	3	x_1	0	1	0,67	–2,67	0	0	0	0,83	1,17	–
4	5	x_4	0	0	–0,33	–1,67	1	0	0	0,33	0,67	–
Δ_j			0	0	0,36	–16,36	0	0	0	4,14	6,86	

План $X_2 = (0;0;0;0;10;30;0;0)$ не є оптимальним, тому що мається негативне значення Δ_j. Прибуток становить $F(X_2) = 0$ (тис. грн). Напрямним стовпцем є стовпець x_3, а напрямним рядком – рядок x_2.

5) Складемо четверту симплекс-таблицю.

Таблиця 3.9 – Четверта симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0	x_5	3,4	0	–0,18	0	0	1	–0,22	0,01	–0,19
2	0	x_3	1,8	0	0,14	1	0	0	0,06	–0,23	–0,37
3	3	x_1	4,8	1	1,04	0	0	0	0,16	0,22	0,18
4	5	x_4	3	0	–0,1	0	1	0	0,1	–0,05	0,05
Δ_j			29,4	0	2,62	0	0	0	0,98	0,41	0,79

Отриманий план $X_3 = (4{,}8;0;1{,}8;3;3{,}4;0;0;0)$ є оптимальним. Відповідно прибуток при даному плані складає $F(X_3) = 3 \cdot 4{,}8 + 5 \cdot 3 =$ $= 29{,}4$ (тис. грн.)

Відповідь. При вирощуванні озимих зернових на площі 4,8 га і багаторічних трав на площі 1,8 га, а також при розведенні трьох корів, сільгосппідприємством буде отриманий максимальний прибуток, що дорівнює 29,4 тис. грн.

3.2.2 Самостійна робота

Варіант № 1

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 4800 \\ 3x_1 + 5x_3 + 5x_4 \le 8400 \\ 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 8x_4 \le 10000 \end{cases}$$

$$F = 48x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 50x_4 (\max)$$

Варіант № 2

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 9000 \\ 2x_1 + 5x_3 + 5x_4 \le 8400 \\ 8x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 9x_4 \le 18000 \end{cases}$$

$$F = 45x_1 + 40x_2 + 48x_3 + 50x_4 (\max)$$

Варіант № 3

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 \le 3400 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 \le 1600 \\ 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 8000 \end{cases}$$

$$F = 45x_1 + 50x_2 + 52x_3 + 48x_4 (\max)$$

Варіант № 4

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 3500 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 \le 1600 \\ 5x_1 + 15x_2 + 10x_3 \le 10000 \end{cases}$$

$$F = 48x_1 + 45x_2 + 45x_3 + 50x_4 (\max)$$

Варіант № 5 $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 5200 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 \le 5850 \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 8x_4 \le 10400 \end{cases}$ $F = 48x_1 + 46x_2 + 40x_3 + 48x_4 (\max)$	**Варіант № 6** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 3600 \\ 4x_1 + 3x_3 + 5x_4 \le 2250 \\ 10x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 8x_4 \le 5400 \end{cases}$ $F = 40x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 38x_4 (\max)$
Варіант № 7 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 5250 \\ 5x_1 + 5x_3 + 7x_4 \le 7000 \\ 8x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 10x_4 \le 1500 \end{cases}$ $F = 65x_1 + 60x_2 + 55x_3 + 62x_4 (\max)$	**Варіант № 8** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 2000 \\ 6x_1 + 6x_3 + 5x_4 \le 2600 \\ 12x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 5000 \end{cases}$ $F = 55x_1 + 50x_2 + 52x_3 + 53x_4 (\max)$
Варіант № 9 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 8710 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 6630 \\ 8x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 10x_4 \le 14300 \end{cases}$ $F = 45x_1 + 40x_2 + 40x_3 + 42x_4 (\max)$	**Варіант № 10** $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 2400 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 750 \\ 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 1200 \end{cases}$ $F = 35x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 60x_4 (\max)$
Варіант № 11 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 2400 \\ 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 2100 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 2500 \end{cases}$ $F = 50x_1 + 48x_2 + 45x_3 + 50x_4$	**Варіант № 12** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 4500 \\ 2x_1 + 5x_3 + 5x_4 \le 4200 \\ 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 8000 \end{cases}$ $F = 40x_1 + 45x_2 + 48x_3 + 50x_4 (\max)$
Варіант № 13 $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 \le 6800 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 \le 3200 \\ 15x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 16000 \end{cases}$ $F = 50x_1 + 45x_2 + 52x_3 + 48x_4 (\max)$	**Варіант № 14** $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 3500 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 \le 1600 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2000 \end{cases}$ $F = 45x_1 + 48x_2 + 45x_3 + 50x_4 (\max)$
Варіант № 15 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 5200 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 \le 4200 \\ 10x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 8x_4 \le 10400 \end{cases}$ $F = 46x_1 + 48x_2 + 40x_3 + 48x_4 (\max)$	**Варіант № 16** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 2800 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_4 \le 4500 \\ 10x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 8x_4 \le 10800 \end{cases}$ $F = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 38x_4 (\max)$

Варіант № 17	Варіант № 18
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 5250 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_4 \le 7000 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 \le 7500 \end{cases}$ $F = 60x_1 + 65x_2 + 55x_3 + 62x_4 (\max)$	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 3800 \\ 6x_1 + 6x_2 + 5x_4 \le 5200 \\ 10x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 8x_4 \le 10000 \end{cases}$ $F = 50x_1 + 55x_2 + 52x_3 + 53x_4 (\max)$
Варіант № 19	**Варіант № 20**
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4200 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 6630 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 7150 \end{cases}$ $F = 40x_1 + 45x_2 + 40x_3 + 42x_4 (\max)$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \le 2400 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 \le 1400 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2400 \end{cases}$ $F = 32x_1 + 35x_2 + 30x_3 + 60x_4 (\max)$
Варіант № 21	**Варіант № 22**
$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 3600 \\ 4x_1 + 3x_3 + 4x_4 \le 3150 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 3750 \end{cases}$ $F = 45x_1 + 48x_2 + 50x_3 + 50x_4 (\max)$	$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 9000 \\ 5x_1 + 5x_3 + 2x_4 \le 8400 \\ 9x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 10x_4 \le 18000 \end{cases}$ $F = 100x_1 + 90x_2 + 96x_3 + 80x_4 (\max)$
Варіант № 23	**Варіант № 24**
$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \le 6800 \\ 3x_1 + 2x_3 + 4x_4 \le 3200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 3200 \end{cases}$ $F = 52x_1 + 45x_2 + 50x_3 + 48x_4 (\max)$	$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 1750 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 \le 800 \\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 \le 1000 \end{cases}$ $F = 45x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 48x_4 (\max)$
Варіант № 25	**Варіант № 26**
$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 2600 \\ 4x_1 + 3x_3 + 2x_4 \le 2100 \\ 8x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 10x_4 \le 5200 \end{cases}$ $F = 48x_1 + 48x_2 + 40x_3 + 46x_4 (\max)$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 1400 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 \le 2250 \\ 5x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 5x_4 \le 2700 \end{cases}$ $F = 45x_1 + 57x_2 + 55x_3 + 60x_4 (\max)$
Варіант № 27	**Варіант № 28**
$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 2625 \\ 5x_1 + 5x_3 + 7x_4 \le 3500 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 3700 \end{cases}$ $F = 55x_1 + 65x_2 + 60x_3 + 62x_4 (\max)$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 1900 \\ 5x_1 + 6x_3 + 6x_4 \le 2600 \\ 8x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 5000 \end{cases}$ $F = 53x_1 + 55x_2 + 52x_3 + 50x_4 (\max)$

Варіант № 29	Варіант № 30

$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 2100 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 \le 3315 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 3537 \end{cases}$ $F = 40x_1 + 42x_2 + 40x_3 + 45x_4 (\max)$	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2400 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 1400 \\ 5x_1 + 3x_3 + x_4 \le 1200 \end{cases}$ $F = 60x_1 + 35x_2 + 30x_3 + 32x_4 (\max)$

3.2.4 Контрольні питання

1) У чому полягає основна ідея симплекс-методу?
2) У чому полягає економічна інтерпретація симплекс-методу?
3) За яким правилом заповнюється перша симплекс-таблиця?
4) Як визначаються напрямні стовпець і рядок у симплекс-таблиці?
5) Сформулювати правило прямокутника для перерахування симплекс-таблиць.
6) Який план вважається оптимальним?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. Вузов/И.Л. Акулич.- М.: Высш. шк., 1986.- 319 с.
2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України/О.В. Боровик, Л.В. Боровик.- К.:Центр учбової літератури,2007
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
4. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник/І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури,2007 – 232 с.
5. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"/Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.