Лекція 4

МОДЕЛІ ТА ЇХ РОЛЬ У ПІДГОТОВЦІ ДОСЛІДНИКА

4.1. Види моделювання і їх класифікація

Одночасно зі швидким розвитком усіх галузей науки сьогодення характеризується зростанням потреби в інформації, необхідної фахівцеві при вивченні того чи іншого предмету, процесу, явища тощо. Ось чому теорія подібності, теорія і практика моделювання в їх новому, широкому смислі, дозволяючи концентрувати інформацію і являючись обґрунтуванням експерименту, вказуючи напрямок для постановки дослідів і показуючи закономірності їх узагальнення, – мають важливе значення саме зараз. *Подібність і моделювання полегшують єдине відображення процесів у найрізноманітніших сферах природи*.

Загальна задача теорій подібності і моделювання – це *розроблення методології, направленої на упорядкованість отримання і оброблення інформації про об'єкти, які існують поза нашою свідомістю і взаємодіють як між собою, так і з навколишнім середовищем.*

Важливу роль у вирішенні цієї задачі відігравали, відіграють і будуть відігравати наукові гіпотези. Швидка і повна перевірка висунутих гіпотез, їх відсіювання чи підтвердження та трансформування в теорію (закон) може бути виконана тільки після спеціально поставленого і закономірно узагальненого експерименту, що забезпечується саме за допомогою теорій подібності та моделювання.

При визначенні, формулюванні та перевірці правильності гіпотез велике значення відіграє *аналогія.*

Фізичні гіпотези і аналогії, що відображають реальний, об'єктивно існуючий світ, повинні або бути безпосередньо наочними, або зводитися до деяких зручних для досліджень структур чи схем. Останні, полегшуючи міркування і логічні побудови та дозволяючи проводити експерименти, що уточнюють природу явищ, – називаються *моделями*.

Звідси *модель* – це природний чи штучний об'єкт, який знаходиться у певній відповідності з об'єктом, що вивчається.

Під моделлю при мисленому експерименті розуміють певні логічні побудови, набори формул, алгоритми для розрахунків на ЕОМ чи просто міркування, при яких оперують прогнозними і навіть не обов'язково здійсненними залежностями та співвідношеннями.

Аналіз розвитку методів моделювання показує, що на час своєї появи модель розглядалась у вигляді макету, який у більшості випадків лише зовнішньо нагадував оригінал.

На жаль, використовуючи лише макети, дослідник не завжди може знайти достатньо надійні математичні співвідношення між параметрами та зафіксувати з їх допомогою ті фізичні і інші закони, які керують об'єктом, що вивчається.

Саме тому методи моделювання постійно удосконалювались і продовжують удосконалюватись. Нині, коли обчислювальні машини мають велику швидкість дії та пам'ять, відкрились нові горизонти для математичного моделювання. Проте,

одного тільки його для вирішення складних технічних задач не достатньо. На певних етапах досліджень цінну інформацію можна отримати від застосування і інших, раніше відомих методів моделювання.

Прикладом можуть служити випробувальні стенди та тренажери – результат органічного поєднання математичного моделювання з натурним. Ефективне їх використання у багатьох випадках дозволяє випередити практику і отримати важливі наукові результати.

Іноді кажуть, що моделям не можна вірити і що аналогія – це не доказ. Проте в дійсності дослідники ніколи не намагаються тільки таким шляхом доказати що-небудь. Тут достатньо того, що отримана схожість дає потужний імпульс для творчості, показуючи при цьому, яким шляхом іти в пошуках потрібного рішення.

Моделювання в навчальній та науковій практиці використовується в основному для вирішення двох груп задач: а) навчання та б) досліджень, направлених на розробку і розширення теорії, або знаходження відповідей на практичні запитання.

Дослідницькі задачі, що вирішуються з допомогою моделей, можна розділити на 4 підгрупи:

1) Прямі задачі аналізу, при вирішенні яких досліджувана система задається параметрами своїх елементів і параметрами або рівняннями вихідного режиму. Вимагається визначити реакцію системи на зовнішні діючі сили.

2) Зворотні задачі аналізу, у яких за відомими реакціями системи вимагається знайти сили, що примусили розглядувану систему прийти до даного стану.

3) Задачі синтезу, які потребують знаходження таких параметрів, за яких процеси в розглядуваній системі матимуть бажаний характер.

4) Індуктивні задачі, рішення яких ставить за мету перевірку гіпотез, уточнення виведених рівнянь, виявлення властивостей елементів тощо. Сюди ж відносять і апробацію програм для проведення розрахунків на ЕОМ.

Слід мати на увазі, що те чи інше моделювання не може з абсолютною повнотою відтворити всі сторони і деталі вивчаємих явищ. Абсолютну подібність можна сприймати тільки абстрактно. Вона ніколи не може бути практично реалізована, бо це б уже означало *тотожність,* а не *подібність*.

Практична мета, що досягається в результаті вирішення наукових та технічних задач, потребує застосування моделювання у випадках, коли модель добре відображає вивчаємий об’єкт тільки по відношенню до тих процесів, які суттєві в даному дослідженні та при даній постановці задачі.

Виходячи з цього – *модель – це неповна копія об’єкту*. При цьому мається на увазі, що точна модель не потрібна, а від дуже неточної мало користі.

3.2. Критерії подібності та їх використання в моделюванні

Моделювання у всіх його видах і формах повинно здійснюватися на основі певних математичних співвідношень, кількісно фіксуючих умови подібності, – *критеріїв подібності.* Звідси випливає, що всі моделі в тій чи іншій формі повинні бути критеріальними. Лише у окремих випадках, коли критерії подібності поки що не вдалося встановити, можна користуватися вербальними умовами подібності, намагаючись, однак, якнайшвидше перейти до кількісно виражених критеріїв. Ці

кількісні вирази можуть бути різними, певним чином змінюючись від найпростіших співвідношень – до критеріїв, виведених у відповідності до теорії подібності.

Узагальнюючи все вищевикладене можна сказати, що:

- під моделюванням слід розуміти любий метод опосередкованого практичного або теоретичного, мисленого чи дослідного оперування об'єктом. При цьому використовується допоміжний штучний чи природний «квазіоб'єкт», який знаходиться у певній об'єктивній відповідності з об'єктом пізнання, називаним *моделлю*;
- основною властивістю і характерною ознакою *моделі* є те, що вона здатна заміщати об'єкт на певних етапах досліджень та давати при цьому потрібну інформацію про нього;
- *модель*, якою складною б вона не була, повинна давати інформацію, що може бути перевірена;
- моделювання потребує формулювання деяких правил перекладу інформації, отриманої на моделі, в інформацію про сам об'єкт моделювання.

Подібності у всіх її видах властиві певні загальні закономірності, які достатньою мірою описуються *двома* теоремами. Обидві установлюють співвідношення між параметрами подібних явищ, не вказуючи при цьому способів реалізації подібності при розробці моделей.

Згідно з першою теоремою *необхідною умовою подібності двох систем є рівність відповідних критеріїв, які представляють собою безрозмірні комбінації параметрів цих систем.*

Позначивши критерії подібності буквою π, можна дати коротке формулювання першої теореми:

у всіх подібних явищ π = idem[1].

Слід пам'ятати, що критерії подібності того чи іншого явища можуть перетворюватися в критерії другої форми шляхом їх перемноження, ділення, піднесення до ступеню або множення на любий постійний коефіцієнт k. Тобто, якщо якінебудь значини π_k = idem та π_{k+j} = idem є критеріями, то і

$$\pi_k \cdot \pi_{k+j} = \text{idem};$$
$$\pi_k / \pi_{k+j} = \text{idem};$$
$$k \cdot \pi_{k+j} = \text{idem}.$$

Друга теорема (π-теорема) про подібність формулюється так:

Функціональна залежність між величинами, що характеризують процес, за певних умов може бути представлена у вигляді залежності між складеними із цих величин критеріями подібності:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{m-k}). \qquad (1)$$

Важливим є те, що при цьому досить суттєво спрощується обробка аналітичних та експериментальних досліджень, оскільки зв'язок між безрозмірними π-критеріями як правило значно простіший, ніж між звичайними іменованими величинами. Крім того, перехід до безрозмірних співвідношень дозволяє розповсюдити результати аналітичного чи експериментального досліджень, проведених стосовно конкретного явища, на низку подібних явищ. При цьому можна знахо-

[1] - **idem** – відповідно однаково

дити критеріальні співвідношення, не маючи математичного опису процесу у вигляді рівнянь, а знаючи тільки всі використовувані параметри і їх розмірності.

Увідповідності з приведеними теоремами критерії подібності визначаються в основному двома способами.

Перший полягає в приведенні рівнянь того чи іншого фізичного процесу до безрозмірного виду.

Другий базується на застосуванні π-теореми. Їм можна користуватися у випадках, коли відомі тільки параметри процесу, а не його рівняння.

Перший спосіб є найбільш простим і тому часто використовується на практиці. Він базується на відомій властивості фізичних рівнянь, яка полягає в тому, що всі члени рівняння фізичного процесу мають однакові розмірності відносно основних одиниць виміру.

Для визначення основних критеріїв подібності із рівняння процесу, яке містить **n** членів, в якій-небудь із **n** можливих форм запису необхідно виконати ділення членів рівняння на довільний із них, відкинувши при цьому (якщо є) символи диференціювання та інтегрування.

Для прикладу розглянемо рівняння другого закону Ньютона:

$$F = \frac{M \cdot d^2X}{dt^2}. \qquad (2)$$

До його складу, як бачимо, входять чотири параметри (n = 4):

1) сила F [Н = кг·м/с^2]; 2) шлях X [м];

3) маса M [кг]; 4) час t [с].

Виходячи із аналізу розмірностей цих параметрів, знаходимо, що незалежних[2] із них тільки 3: M, X і t (тобто k = 3).

Згідно з π-теоремою в даному випадку можемо мати один (n-k = 4 – 3 = 1) критерій подібності. Для цього достатньо обидва члени рівняння (2) розділити на силу F, відкинувши при цьому символи диференціювання (d^2 – в чисельнику і d – в знаменнику):

$$\pi_1 = \frac{M \cdot X}{F \cdot t^2}. \qquad (3)$$

Величина π_1 (3) є критерієм подібності механічного руху і має назву числа Ньютона.

3.3. Математичне моделювання

Математична модель представляє собою набір формальних співвідношень, які відображають поведінку дослідної системи.

Наприклад, на рис. 1 показана крива, яка відображає залежність значини характеристики синхронного валу відбору потужності (ВВП) трактора від тиску повітря в шинах його задніх коліс. Експериментальні дані задовільно апроксимуються математичною моделлю наступного виду:

---

[2] - незалежними є такі параметри, у яких формула розмірності не може бути представлена комбінацією формул розмірностей інших незалежних параметрів.

$$Ns = A \cdot B^{W}, \quad (4)$$

де Ns – кількість обертів синхронного ВВП 1 м шляху його руху, об/м;

A, B – константи апроксимації;

W – тиск повітря в шинах задніх коліс енергетичного засобу, мПа.

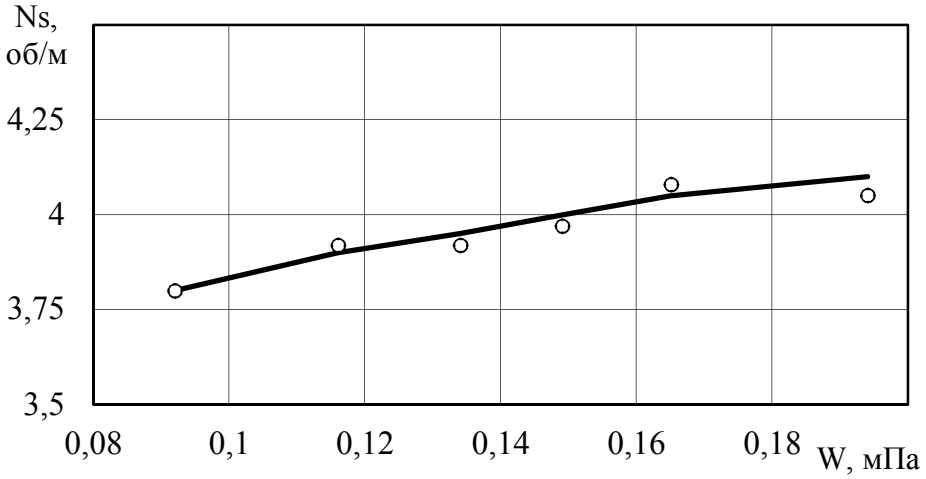

Рис. 1 – Залежність значини характеристики синхронного валу відбору потужності трактора від тиску повітря в шинах його задніх коліс

Математичні моделі поділяються на:

- емпіричні;
- функціональні;
- статичні;
- динамічні;
- детерміністичні;
- стохастичні.

Більш детально розглянемо перші чотири із них. Дослідник, намагаючись розширити свої знання, іде або по шляху удосконалення методів та засобів експериментування, або по шляху розвитку відповідних ідей та концепцій.

Перший підхід зв’язаний з описом вивчаємого об’єкту (*емпірична модель*), другий – зі спробою пояснення його суті (*функціональна модель*).

Повертаючись до кривої, представленої на рис. 1 і описаною залежністю (4), відмітимо, що вона не містить в собі ніякої інформації крім тої, яка була отримана в ході досліду. Саме тому така модель є суто *емпіричною*.

З другого боку, дослідника часто цікавить природа поведінки об’єкту моделювання. Відповідь на таке питання може дати *функціональна* модель, яка відтворює її функції і показує зв'язок між ними. Найчастіше такі моделі мають вигляд блочних схем.

Для прикладу на рис. 2 зображена функціональна модель системи автоматичного регулювання (САР) бурякозбирального комбайну. З її принциповою схемою читач може самостійно познайомитися у спеціальній літературі.

Слід підкреслити, що завжди можна побудувати таку емпіричну модель, яка може бути погоджена з масивом дослідних даних значно краще, ніж функціона-

льна. Це пояснюється тим, що перша практично вільна від обмежень, в той час як можливості другої обмежуються покладеними в її основу припущеннями.

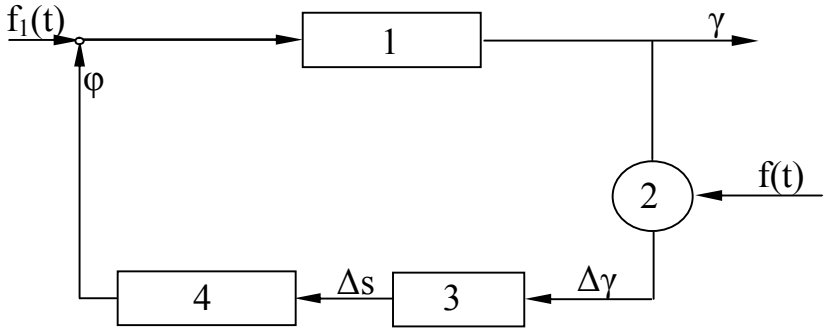

Рис. 2 – Функціональна модель САР бурякозбирального комбайну

Статична модель – це математична конструкція, в яку не включена змінна часу (t). Всі особливості поведінки системи, які мають виражену залежність від t, при цьому ігнорують. Але оскільки все у світі швидко чи повільно, – але все ж таки змінюється, то люба статична модель – це завжди лише апроксимація. Хоча іноді і дуже хороша. Останнє справедливо, коли система досить близька до стану рівноваги або коли її постійна часу настільки мала у порівнянні з постійною часу зміни середовища, що зовнішні умови можна вважати незмінними.

Прикладом типового статичного опису є модель для розрахунку навантаження на передній і задній мости трактора при його агрегатуванні з тим чи іншим сільськогосподарським знаряддям. Іншим прикладом статичної моделі є визначення поздовжньої координати центру мас того чи іншого мобільного енергетичного засобу (трактора, комбайна, шасі тощо).

В *динамічних моделях* змінна часу t може фігурувати у явному виді. Прикладом такої моделі є характер зміни експлуатаційної[3] маси (M_e) машини для внесення мінеральних чи органічних добрив під час робочого руху машинно-тракторного агрегату:

$$M_e = M_o - k \cdot t, \qquad (5)$$

де M_o – експлуатаційна маса машини при t = 0, кг;

k – коефіцієнт, який характеризує інтенсивність зменшення M_e по мірі плину часу t, кг/год.

Найчастіше типовою формою запису динамічної моделі є відповідне диференціальне рівняння. Наприклад, продиференціювавши ліву та праву частини залежності (5), отримаємо:

$$dM_e/dt = - k. \qquad (6)$$

Згідно з виразом (6) темп зменшення експлуатаційної маси машини є величина постійна, а його значина залежить від коефіцієнту k.

Особливою складністю відрізняються математичні моделі сільськогосподарських (СГА) або машинно-тракторних (МТА). Згідно із визначенням *сільськогосподарський агрегат (СГА) – це автономний мобільний енерготехнологічний комплекс, призначений для виконання однієї чи одночасно кількох технологічних*

[3] - сума конструктивної маси машини та маси завантажених добрив

операцій сільськогосподарського виробництва із заданими агротехнічними вимогами. Якщо енергетичною базою (модулем) цього комплексу є трактор, то він (комплекс) називається машинно-тракторним агрегатом (МТА).

Функціонують СГА/МТА в умовах постійної зміни зовнішніх збурень, обумовлених багаточисельними і різноманітними факторами. Основними із них є нерівності поверхні поля, фізико-механічні властивості ґрунту і рослин, властивості перероблюваних матеріалів тощо.

Функціонування того чи іншого СГА/МТА можна розглядати як реакцію на вхідні зовнішні збурення та керуючий вплив. При цьому найбільш придатною розрахунковою схемою любого дослідного об'єкту є схема за принципом «вхід-вихід». В якості вхідних змінних приймаються всі зовнішні збурення (умови роботи) та керуючий (збоку водія) вплив, виражені у вигляді конкретних фізичних величин (сил, моментів, переміщень тощо). Вихідні змінні представляють сукупність параметрів, які визначають якість роботи машини, енергетичні, техніко-економічні і інші показники.

Такий підхід до побудови схеми функціонування сільськогосподарської машини визначає її у вигляді динамічної системи, що здійснює перетворення вхідних впливів у вихідні. Розглянемо наступний простий приклад. Нехай у процесі робочого руху на динамічну систему – причіпну валкову жниварку – діють наступні сили (рис. 3):

- сила опору (R) стеблового масиву;
- сили опору коченню лівого (P_{f1}) та правого (P_{f2}) опорних коліс жниварки;
- бокові сили лівого (T_1) та правого (T_2) опорних коліс жниварки.

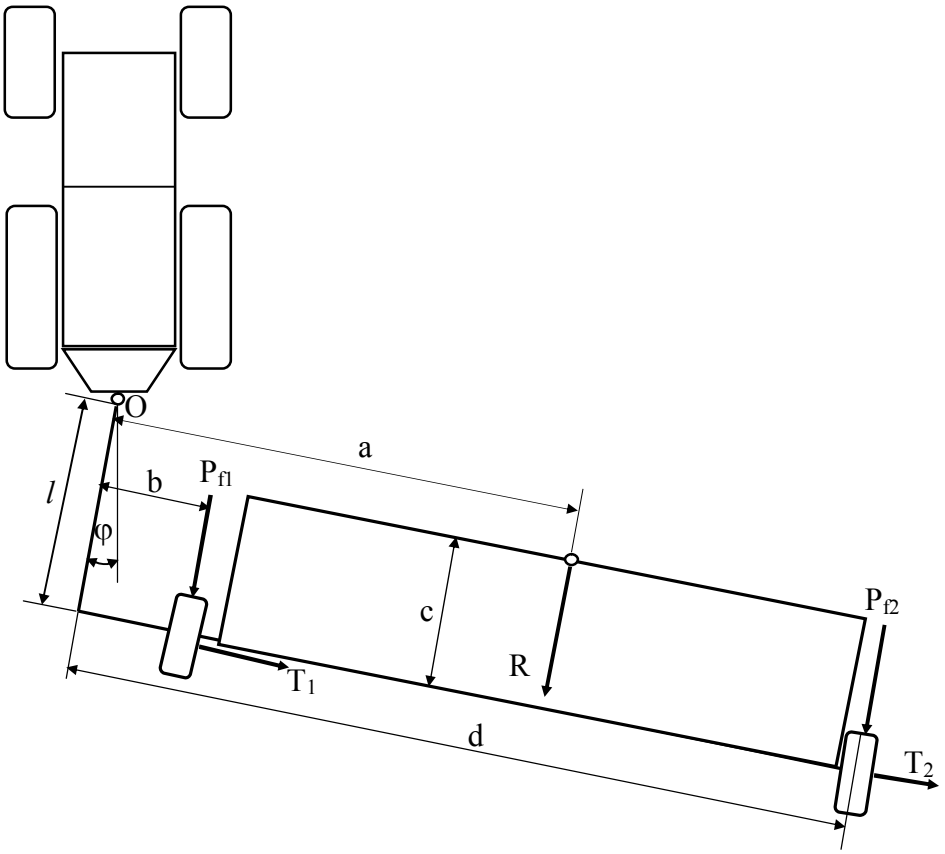

Рис. 3 – Схема сил, які діють на причіпну валкову жниварку

Під сумарним впливом цих сил причіпна машина відхиляється від прямолінійного руху на кут φ. Практикою встановлена, що його величина зазвичай коливається в межах від 0 до 8^o.

Математично процес коливання кута φ описується наступним рівнянням:

$$J \cdot d\varphi^2/dt^2 = P_{f1} \cdot b + P_{f2} \cdot d + R \cdot a - (T_1 + T_2) \cdot l, \qquad (7)$$

де J – момент інерції жниварки при її повороті відносно вертикальної осі, яка проходить через т. О (див. рис. 3);

l, a, b, d – конструктивні параметри причіпної машини.

Після перетворень диференціальне рівняння (7) можна записати так:

$$d\varphi^2/dt^2 = D, \qquad (8)$$

де $D = (P_{f1} \cdot b + P_{f2} \cdot d - (T_1 + T_2) \cdot l + R \cdot a)/J$.

Суть подальшого моделювання полягає у зменшенні коефіцієнта D, оскільки він є представляє той збурювальний фактор, який відхиляє валкову жниварку від прямолінійного руху. Таке можливо за рахунок (див. вираз 8 і рис. 3):

- зменшення сил P_{f1}, P_{f2} та конструктивних параметрів a, b і d;
- збільшення моменту інерції жатки J, сил T_1 і T_2, а також параметра *l*.

Силу опору стеблового масиву R в даному аналізі не розглядаємо, тому що її зменшення опосередковано означає збирання зернової культури меншої урожайності. А такий стан нас улаштовувати не може.

Зменшення сил опору коченню P_{f1} і P_{f2} можливе за умови відповідного зменшення вертикального навантаження, яке припадає на опорні колеса жатки. Практично цього можна досягти шляхом зменшення її конструктивної ваги. Але іншим наслідком такого конструктивного рішення буде зменшення бокових сил T_1 і T_2. Такий результат в принципі небажаний, оскільки він обумовлює замість зменшення – зростання коефіцієнта D.

Як показують дослідження, для підвищення стійкості руху у горизонтальній площині конструктивну вагу жниварки бажано збільшувати. Небажане зростання при цьому сил опору кочення P_{f1} і P_{f2} компенсується бажаним збільшенням стабілізуючих сил T_1 і T_2, а також моменту інерції причіпної машини J. В кінцевому рахунку це приводить до суттєвого бажаного зменшення коефіцієнта D.

Із конструктивних параметрів жатки a, d і b найбільш ефективний вплив на значину коефіцієнта D здійснює винос лівого опорного колеса жниварки – b (див. рис. 3). Більше того, при установленні цього колеса зліва від сниці машини значина параметру b стає взагалі від'ємною. Внаслідок цього момент $P_{f1} \cdot b$ замість розворотного (тобто збурювального) стає стабілізуючим. Значина коефіцієнта D при цьому бажано зменшується, а значить покращується стійкість руху причіпної валкової жниварки. Аналогічного ефекту (в якісному плані) можна досягти шляхом збільшення довжини її сниці – *l*.

В цілому на підставі приведеного вище аналізу математичного моделювання можна зробити наступний висновок: для підвищення стійкості руху причіпної валкової жниварки її момент інерції (J) і довжину сниці (*l*) слід збільшувати, а ліве опорне колесо установити з лівостороннім виносом (– b).

Питання для самоперевірки

1. Що таке модель фізичного явища? Назвіть її різновиди і вимоги до них.
2. У чому полягає різниця між тотожністю і подібністю?
3. Які задачі можна вирішувати з допомогою моделей?
4. Охарактеризуйте відомі способи моделювання.
5. Поясніть різницю між повно, неповною та наближеною подібностями природних явищ.
6. У чому полягає суть першої теореми подібності?
7. Назвіть практичну значущість другої теореми подібності.
8. Яку інформацію і користь надає досліднику функціональна модель?
9. У чому полягає значущість статичних моделей фізичних явищ?