

МЕХАНІКО-РЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ КОРМОВИХ МАТЕРІАЛІВ У ПРОЦЕСІ ЗМІШУВАННЯ

Купчук І.М., к.т.н., доц.

Вінницький національний аграрний університет, м. Вінниця, Україна.

Вступ. На попередніх етапах наукових досліджень виконаних на базі лабораторій кафедри інженерної механіки та технологічних процесів в АПК у межах тематики механіко-технологічних основ процесу змішування кормів було здійснено класифікаційний аналіз реологічних типів поведінки сировини різного фізичного стану. Узагальнено основні групи матеріалів (фрикційно-гранульовані, когезійно-фрикційні, квазіпластичні, в'язкопластичні) залежно від співвідношення сил тертя, когезії та внутрішнього опору зсуву. Така типологічна систематизація дала змогу визначити зв'язок між фізичним станом корму, його структурно-механічними властивостями та характером руху в робочому об'ємі змішувача, що створило методологічне підґрунтя для подальшого аналітичного моделювання.

Наступним етапом дослідження є поглиблений аналіз механіко-реологічних моделей, що описують закономірності переходу кормових матеріалів від пружного стану до в'язкопластичного плину під дією зсувних навантажень. У цьому контексті моделі Мора–Кулона, Дженіке, Гершеля–Балклі та Бінгема–Шведова становлять теоретичну основу для кількісного опису процесів накопичення, зриву зсувних зв'язків і дисипації енергії в неоднорідних середовищах із різним ступенем когезійно-фрикційних взаємодій.

Метою досліджень є формування узагальненої системи механіко-реологічних моделей поведінки кормових матеріалів у процесі змішування, що враховує особливості їхнього деформування, когезійно-фрикційних взаємодій і в'язкопластичного плину, як теоретичної основи для подальшого розвитку математичних моделей змішування та підвищення енергоефективності машин.

Основні матеріали дослідження. Фрикційно-гранульовані кормові матеріали (зерно, комбікормові гранули, подрібнені сухі суміші) є дисперсними середовищами з множинними контактами між частинками, для яких характерне поєднання пружних, фрикційних і в'язких властивостей (рис. 1, а). Їхня механічна реакція на зсувні навантаження описується критерієм міцності Мора–Кулона, що визначає граничне напруження зсуву залежно від когезії матеріалу, нормального напруження та кута внутрішнього тертя:

$$\tau_y = c + \sigma \tan \varphi, \quad (1)$$

де c – когезія, Па; σ – нормальне напруження, Па; φ – кут внутрішнього тертя, град [1].

До моменту досягнення цього порогу кормова маса поводить ся як пружне тіло, підкоряючись закону Гука [1]:

$$\tau = G\gamma, \quad (2)$$

де G – модуль зсуву, Па; γ – відносна деформація зсуву.

На цій стадії формується стійкий зернистий каркас, у якому частинки взаємодіють переважно через сили тертя в місцях контактів. Енергія зовнішнього навантаження накопичується у вигляді пружних деформацій без утворення зсувних площин, що відповідає передтекучому (пружному) стану матеріалу.

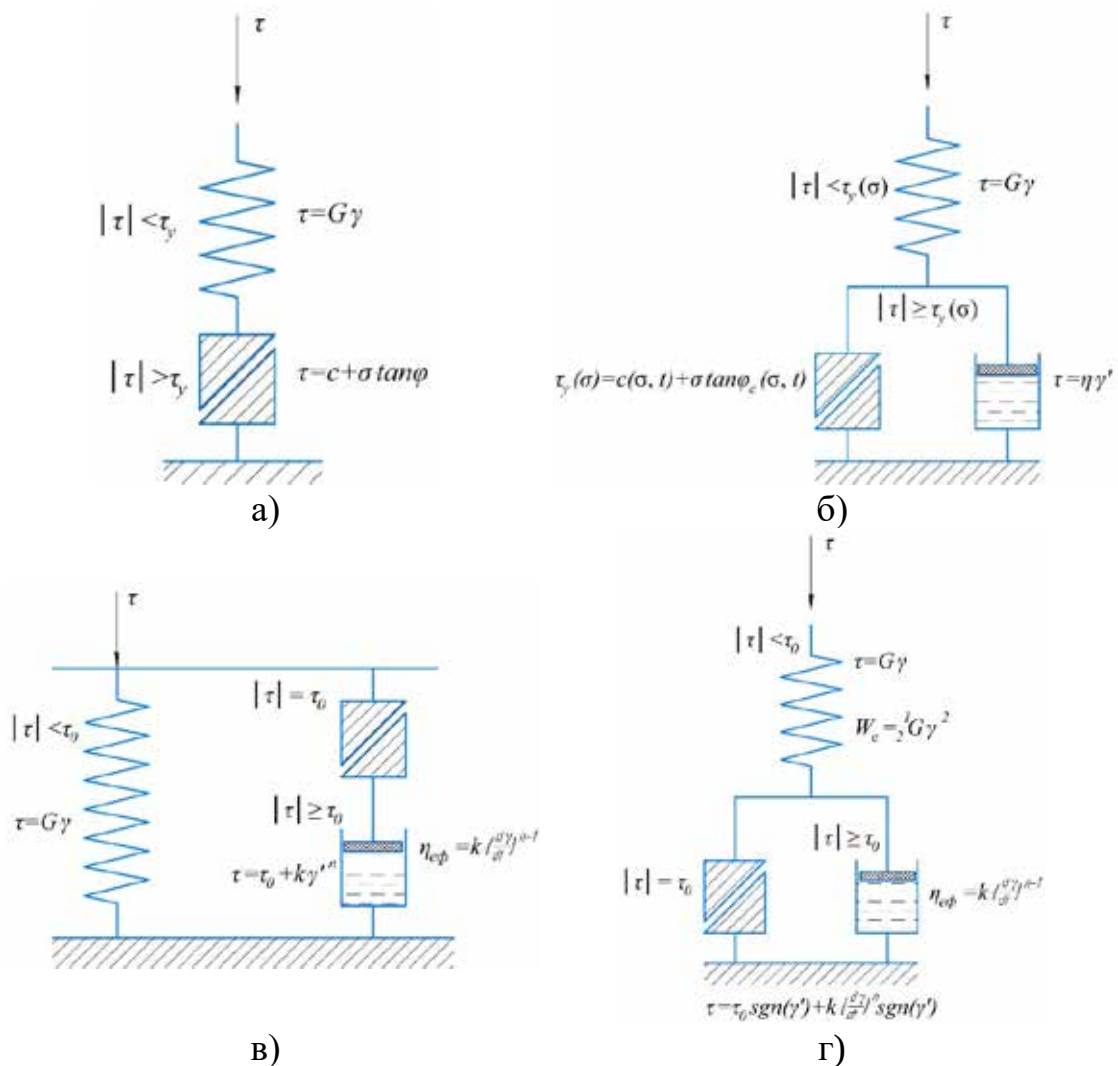


Рис. 1. Механічні аналоги реологічних моделей кормових матеріалів у процесі змішування: а) модель Мора-Кулона для фрикційно-гранульованих кормових матеріалів; б) модель Дженіке для когезійно-фрикційних кормових матеріалів; в) модель Гершеля-Балклі для структурованих кормових матеріалів; г) модель Бінгема-Шведова для в'язкопластичних кормових матеріалів

Коли напруження досягає критичного рівня $|\tau| > \tau_y$, у структурі матеріалу відбувається зрив зернистого каркаса, картина контактів між частинками порушується, виникають локальні площини зсуву. Цей

граничний момент відповідає перехідному стану, коли матеріал починає втрачати стійкість і з'являються перші ознаки ковзання. Пружна енергія, накопичена в системі, частково перетворюється на кінетичну, а частково – розсіюється у вигляді тепла через мікроскопічне тертя [2]. Модель Мора–Кулона у цьому випадку є базовою апроксимацією, що адекватно описує фрикційний механізм зсуву, тоді як вплив вологості та когезії потребує подальшого уточнення за допомогою узагальнених моделей.

Для когезійно-фрикційних кормових матеріалів (DDGS, вологі комбікорми та дрібнодисперсні зернові суміші) характерна релаксаційна динаміка зсуву, зумовлена поєднанням міжчастинкових когезійних і фрикційних взаємодій [1; 2]. На відміну від сипких гранульованих систем, у яких втрати стійкості контактів відбуваються миттєво, ці матеріали проявляють залежність граничної міцності від ступеня ущільнення, вологості та тривалості дії навантаження [3; 4].

Реологічно така поведінка описується моделлю Дженіке (рис. 1, б), що розвиває критерій Мора–Кулона шляхом врахування впливу попередньої консолідації матеріалу на параметри когезії c і кута внутрішнього тертя φ_c [4]. Граничне напруження зсуву визначається рівнянням:

$$\tau_y(\sigma) = c(\sigma_c, t) + \sigma \tan \varphi_c(\sigma_c, t), \quad (3)$$

де τ_y – межа текучості, Па; $c(\sigma_c, t)$ – ефективна когезія матеріалу, що залежить від стану ущільнення σ_c та часу дії навантаження t , Па; φ_c – ефективний кут внутрішнього тертя, град; σ – нормальне напруження, Па.

Ключовим параметром є функція текучості Дженіке:

$$f_{fc} = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}, \quad (4)$$

яка характеризує співвідношення між головним напруженням при руйнуванні (σ_1) та напруженням після консолідації (σ_c) [4] і відображає ступінь “текучості” матеріалу: $f_{fc} > 10$ – вільнотекучі, $4 < f_{fc} < 10$ – помірно текучі, $2 < f_{fc} < 4$ – когезійні, $f_{fc} < 2$ – сильно злежувані матеріали [1, 4].

Реологічна поведінка кормових матеріалів, таких як сінаж, подрібнена солома чи люцерна, описується моделлю Гершеля–Балклі (рис. 1, в), яка адекватно відображає їхню пружно-в'язкопластичну природу.

На початковій стадії процесу, коли зовнішнє зусилля менше за τ_0 , матеріал поводить себе як пружне тіло, аналогічне тілу Гука, в якому напруження τ зростає пропорційно деформації γ (2). Після досягнення межі текучості, коли $\tau = \tau_0$ починається руйнування міжчастинкових зв'язків – частинки починають ковзати одна відносно одної, і система переходить у пластичний режим.

У цей момент система переходить у режим нелінійної в'язкості, який описується рівнянням:

$$\tau = \tau_0 + k \dot{\gamma}^n, \quad (5)$$

де k – коефіцієнт консистенції, Па·с ^{n} ; n – показник поведінки потоку. При $n < 1$ спостерігається псевдопластична поведінка, коли ефективна в'язкість зменшується зі зростанням швидкості зсуву, що характерно для волокнистих кормових матеріалів (сінаж, люцерна), які «розріджуються» під час змішування. При $n > 1$ реалізується дилатантна поведінка, за якої ефективна в'язкість зростає із швидкістю зсуву – така залежність властива високо концентрованим пастоподібним системам [5; 6].

На стадії в'язкоплинного режиму ($\tau > \tau_0$) частинки суміші рухаються хаотично, утворюючи зсувні шари з різною швидкістю. В'язкість стає ефективною величиною, що залежить від $\dot{\gamma}$:

$$\eta_{\text{еф}} = \frac{\tau - \tau_0}{\dot{\gamma}} = k \dot{\gamma}^{n-1}. \quad (6)$$

Після припинення зовнішнього навантаження в матеріалі відбувається часткове відновлення форми за рахунок еластичних зв'язків (елемент пружини) та дисипація накопиченої енергії через внутрішнє тертя, яке реалізує демпфер.

Пастоподібні кормові матеріали (буряковий жом, барда, патока, вологі побічні продукти) характеризуються значною вологістю, внутрішньою когезією та наявністю міжчастинкових зчеплень капілярного й колоїдного типу. Реологічна поведінка пастоподібних кормів адекватно описується моделлю Бінгема-Шведова (рис. 1, г), що поєднує пружну реакцію тіла Гука до моменту досягнення порогу τ_0 та подальшу нелінійну течію з показником n , який визначає тип поведінки потоку. Узагальнене рівняння має вигляд:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) + k |\dot{\gamma}|^n \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}), \quad (|\tau| \geq \tau_0), \quad (7)$$

де $\operatorname{sgn}(\dot{\gamma})$ – функція знаку, що визначає напрямок зсуву ($\operatorname{sgn} > 0$ – прямий, $\operatorname{sgn} < 0$ – зворотний).

На початковій стадії процесу, при $|\tau| < \tau_0$ матеріал поводить себе як пружне тіло, а реологічна поведінка описується законом Гука. У цій області деформація є оборотною, а частинки, з'єднані між собою капілярними й когезійними силами, лише змінюють свої відносні положення без руйнування структури. Поступове збільшення навантаження приводить до моменту, коли $|\tau| = \tau_0$, що позначає початок руйнування когезійної контактної структури, при якому у системі з'являються площини зсуву, а накопичена енергія частково розсіюється через внутрішнє тертя. Після перевищення цього порогу матеріал переходить у в'язкопластичний режим, що описується нелінійною залежністю між напруженням і швидкістю зсуву. Ефективна в'язкість у цьому випадку визначається рівнянням (6).

Сумарна деформація та швидкість деформування у процесі змішування складається з пружної та пластичної складових:

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_{vp}; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_{vp}; \quad (8)$$

$$\dot{\gamma}_e = \frac{\dot{\tau}}{G}; \dot{\gamma}_{vp} = \begin{cases} 0, & |\tau| < \tau_0 \\ \left[\frac{|\tau| - \tau_0}{k} \right]^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn}(\tau), & |\tau| \geq \tau_0 \end{cases} \quad (9)$$

Енергетичний аспект реологічного процесу описується рівнянням питомої потужності дисипації, що характеризує інтенсивність перетворення механічної енергії зсуву у теплоту внаслідок внутрішнього тертя [8]:

$$P_d = \tau \dot{\gamma} = \tau_0 \dot{\gamma} + k \dot{\gamma}^{n+1}, \quad (10)$$

Перший доданок у (10) відображає енергію, витрачену на подолання межі текучості, тоді як другий характеризує втрати, пов'язані з в'язкою течією. Для забезпечення енергоефективності процесу змішування необхідно вибирати такі режими $\dot{\gamma}$, при яких співвідношення $P_d/\dot{\gamma}$ досягає мінімуму – це гарантує, що більша частина енергії спрямовується на гомогенізацію, а не на внутрішнє нагрівання або руйнування структури [9].

Після припинення зовнішнього навантаження матеріал проявляє пружно-в'язкопластичну релаксацію, у ході якої частина накопиченої деформації γ_e відновлюється за рахунок пружних зв'язків, тоді як залишкова деформація $\gamma_r = \gamma - \gamma_e$ зберігається внаслідок структурної пам'яті середовища. Зменшення напруження у часі можна описати диференціальним рівнянням типу Максвелла [7, 9]:

$$\frac{d\tau}{dt} + \frac{G}{\eta_{\text{ef}}} \tau = 0, \quad (11)$$

розв'язок якого має вигляд:

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-t/t_r}, \quad (12)$$

де $t_r = \eta_{\text{ef}}/G$ — час релаксації, який характеризує швидкість відновлення пружного стану. Для пастоподібних кормових систем (буряковий жом, меляса, вологі побічні продукти) значення t_r зазвичай перебуває в межах 2-10 с, що забезпечує стабільність структурного стану матеріалу між циклічними навантаженнями шнека змішувача.

Таким чином, пастоподібні кормові системи належать до типових в'язкопластичних матеріалів із порогом текучості та змінною ефективною в'язкістю. Їхній механіко-технологічний опис відображає закономірну послідовність переходів – від пружної реакції через руйнування структури й розвиток течії до релаксаційного відновлення. Ця динаміка кількісно описується рівняннями (8)-(14), що дають можливість обґрунтовано прогнозувати енерговитрати, швидкість гомогенізації та стабільність структури суміші в процесі роботи кормозмішувача.

Висновки. Узагальнено механіко-реологічні моделі поведінки кормових матеріалів різної природи, що дало змогу відобразити закономірності переходу від пружного стану до в'язкопластичного

плину під дією зсувних навантажень у процесі змішування. Показано, що моделі Мора–Кулона, Дженіке, Гершеля–Балклі та Бінгема–Шведова утворюють взаємопов’язану систему, у якій кожна з них описує характерну область структурно-механічних станів кормових сумішей – від сухих гранульованих до пастоподібних когезійних матеріалів. Встановлено, що їхня поведінка визначається взаємодією пружних, когезійно-фрикційних і в’язких властивостей, які формують комплексні енергетичні залежності між напруженням, швидкістю зсуву та дисипацією енергії. Сформована система рівнянь забезпечує кількісне прогнозування енерговитрат, інтенсивності гомогенізації та стабільності структури суміші, що відповідає поставленій меті дослідження та створює наукове підґрунтя для розроблення енергоефективних математичних моделей і оптимізації конструкцій кормозмішувачів. Перспективи подальших досліджень полягають у експериментальній ідентифікації реологічних параметрів (τ_0 , k , n , G , η) для різних типів кормів та моделюванні нерівномірності поля швидкостей у робочому об’ємі змішувачів.

Список використаних джерел

1. Schulze D. *Powders and Bulk Solids: Behavior, Characterization, Storage and Flow*. 2-nd ed. Cham: Springer, 2021. XVII, 625 p. ISBN 978-3-030-76719-8. DOI: 10.1007/978-3-030-76720-4.
2. Cares-Pacheco M.G., Falk V. A phenomenological law for complex granular materials from Mohr-Coulomb theory. *Advanced Powder Technology*. 2023. Vol. 34, Is. 1. 103888. DOI: 10.1016/j.apr.2022.103888.
3. Macri D., Chirone R., Salehi H. et. all. Characterization of the Bulk Flow Properties of Industrial Powders from Shear Tests. *Processes*. 2020. Vol. 8(5), 540. DOI: 10.3390/pr8050540
4. Jenike A. W. *Storage and Flow of Solids*. Bulletin No. 123. University of Utah, Salt Lake City, 1964. 206 p.
5. Bonn D., Denn M. M., Berthier L., Divoux T., Manneville S. Yield stress materials in soft condensed matter. *Reviews of Modern Physics*. 2017. Vol. 89, No. 3, 03500551. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.035005
6. Khan M., More R. V., Brandt L., Ardekani A. M. Rheology of dense fiber suspensions: Origin of yield stress, shear thinning, and normal stress differences. *Physical Review Fluids*. 2023. Vol. 8, 064306. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.8.064306
7. Steffe J. F. *Rheological Methods in Food Process Engineering*. 3rd ed. East Lansing: Freeman Press, 2019. 416 p.
8. Chhabra R. P., Richardson J. F. *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008. 519 p. DOI: 10.1016/B978-0-7506-8532-0.X0001-7
9. Coussot P. *Rheometry of Pastes, Suspensions and Granular Materials: Applications in Industry and Environment*. Springer Nature, 2006. 279 p. DOI: 10.1007/S00397-006-0118-Y.