

## ЛЕКЦІЯ № 3 Характеристика руху рідин

### Змістовий модуль 1 “Основи гідравліки”

#### Тема: Характеристика руху рідин

**Мета:** Вивчити рівнянням нерозривності потоку, види руху рідин та елементами потоку.

#### План

1. Види руху рідин.
2. Потік рідин та його елементи.
3. Рівняння нерозривності потоку.

#### Матеріал лекції

##### 1. Види руху рідин

**Гідродинаміка** — розділ гідравліки, в якому вивчаються закони руху рідин і методи використання цих законів при розв’язанні інженерних задач.

Об’єктом вивчення в гідродинаміці є потік рідини. Рідина рухається під впливом зовнішніх сил, таких як сила тяжіння, зовнішній тиск і т.д. Рух рідин характеризується швидкістю і гідродинамічним тиском. Враховуючи, що реальні рідини володіють рядом властивостей, в тому числі і в’язкістю, які важко врахувати при вивченні руху рідин, вивчення його починається з нев’язкої (ідеальної) рідини, тобто без врахування сил тертя, а потім в отримані теоретичні залежності вносяться уточнення. Існує два методи вивчення руху рідин: метод Ж. Лагранжа і метод Л. Ейлера.

**Метод Лагранжа** полягає в розгляді руху кожної частинки рідини, тобто траєкторії її руху. Із-за значної трудоемкості цей метод не набув широкого розповсюдження.

**Метод Ейлера** полягає в розгляді загального руху рідини в різних точках рідинного середовища в певний момент часу. Цей метод дозволяє визначити швидкість руху рідини в будь-якій її точці в будь-який момент часу, тобто характеризується побудовою поля швидкостей, а тому широко застосовується при вивченні руху рідин.

По характеру зміни поля швидкостей за часом рух рідин ділиться на усталий і не усталий.

**Сталий рух** – це такий рух рідини, при якому в будь-якій точці потоку швидкість і тиск з плином часу не змінюються, тобто:

$$\begin{aligned} u &= f_1(x, y, z), \\ p &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \quad (1)$$

Прикладами сталого руху є рух води в каналі з постійними площею поперечного перерізу і глибиною.

**Несталий рух** – це такий рух рідини, при якому влюбій точці потоку швидкість і тиск з плином часу змінюються

$$u = f_1(x, y, z, t),$$

$$p = f_2(x, y, z, t). \quad (2)$$

Прикладом несталого руху є витікання рідини з бака при його спорожненні.

В інженерній практиці розповсюджений переважно сталий рух який ділиться на рівномірний і нерівномірний. При рівномірному русі живий переріз потоку і середня швидкість не змінюються вздовж течії, а при нерівномірному - ці параметри непостійні.

**Потоки рідини** діляться на напірні, безнапірні і гідравлічні струмені. Напірні потоки не мають вільної поверхні рідини, тобто потік торкається твердих стінок з усіх боків. Прикладом напірного є рух води в водопровідних трубопроводах (під напором). Безнапірні потоки мають вільну поверхню, тобто вони торкаються твердих стінок лише на частині периметра. Прикладом такого руху є рух води в каналах. Він здійснюється завдяки нахилу дна каналу, дії сили тяжіння та текучості рідин. В гідравлічних струминах потік з усіх боків оточений вільною поверхнею. Прикладами гідравлічних струмин є струмини дощувальної техніки, пожежних брандспойтів. Рух рідини в цьому випадку здійснюється за рахунок напору на вихідному насадку.

При вивченні руху рідин найбільшого поширення здобула **струминкова модель** їх руху, яка базується на методі Ейлера. Згідно з цим шлях руху окремої частинки рідини за певний проміжок часу називається **траєкторією руху** цієї частинки (рис. , а).

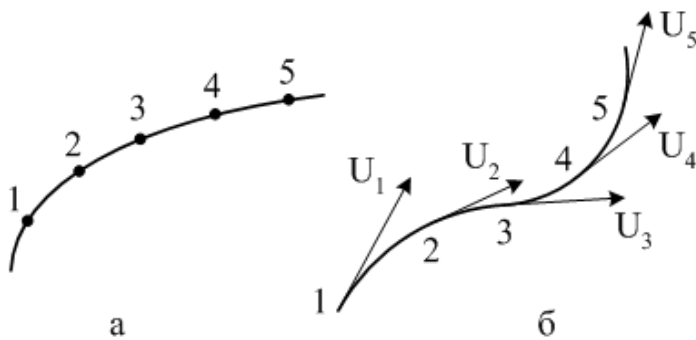


Рис. 1 Схема руху частинок рідини: а – траєкторія частинок рідини (1, 2, 3 і т.д. – положення частинки в певні моменти часу); б – лінія течії (1,2,3 – точки в рідині;  $u_1, u_2, u_3 \dots$  - вектори швидкості в точках ).

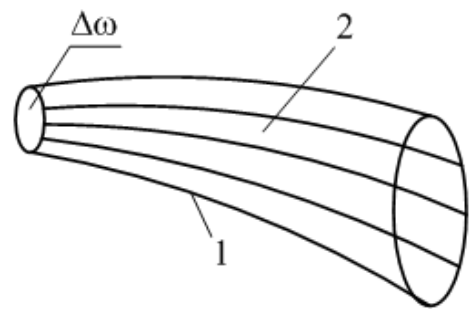


Рис. 2 Схема струминкової моделі руху рідини: 1 – трубка течії; 2 – елементарна струминка рідини.

Якщо в рухомій рідині провести лінію через ряд точок таким чином, що в кожній з них вектор швидкості в даний момент часу буде дотичною до цієї лінії, то отримуємо *лінію течії* (рис. 1, б).

Підкреслимо, що різниця між траєкторією руху частинки і лінією течії полягає в тому, що траєкторія руху зображає шлях пройдений частинкою рідини за певний проміжок часу, а лінія течії — це миттєва характеристика потоку, яка зв'язує різні частинки рідини, що лежать на лінії течії в даний момент, і показує напрямок вектора швидкості частинки в цей момент. При сталому русі рідини траєкторія руху частинки рідини співпадає з лінією течії.

Якщо в рухомій рідині провести замкнутий контур, що обмежує елементарну площу  $\Delta\omega$ , і через усі точки цього контуру провести лінії течії, то утвориться *трубка течії* (рис. 2). Рідина, яка знаходиться усередині трубки течії, у вигляді пучка ліній течії, називається *елементарною струминкою рідини*.

## 2. Потік рідини та його елементи

Потік рідини характеризується рядом геометричних та гідравлічних його параметрів, якими користуються при конструюванні русл та гідравлічному розрахунку потоків. Основними елементами потоків рідини є русло, живий переріз, змочений периметр, гідравлічний радіус, витрата рідини, середня швидкість руху рідини.

*Русло потоку* – це тверді поверхні, які обмежують потік рідини знизу (дно, схили).

*Живий переріз*  $\omega$ , м<sup>2</sup> - це площа перерізу потоку перпендикулярна до загальної повздожньої його течії (рис.3)

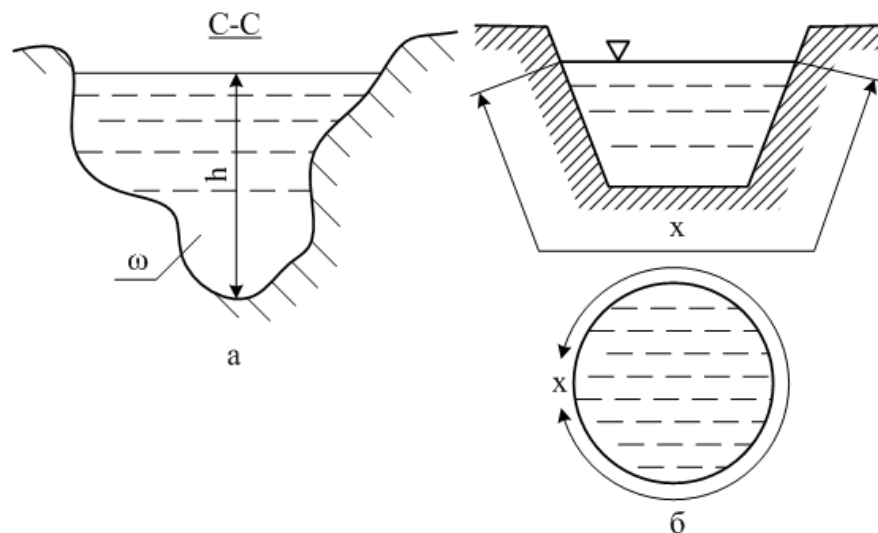


Рис. 3 Схеми: а – живого перерізу потоку; б – змоченого периметра трапецієдальної і круглої форм перерізу потоку.

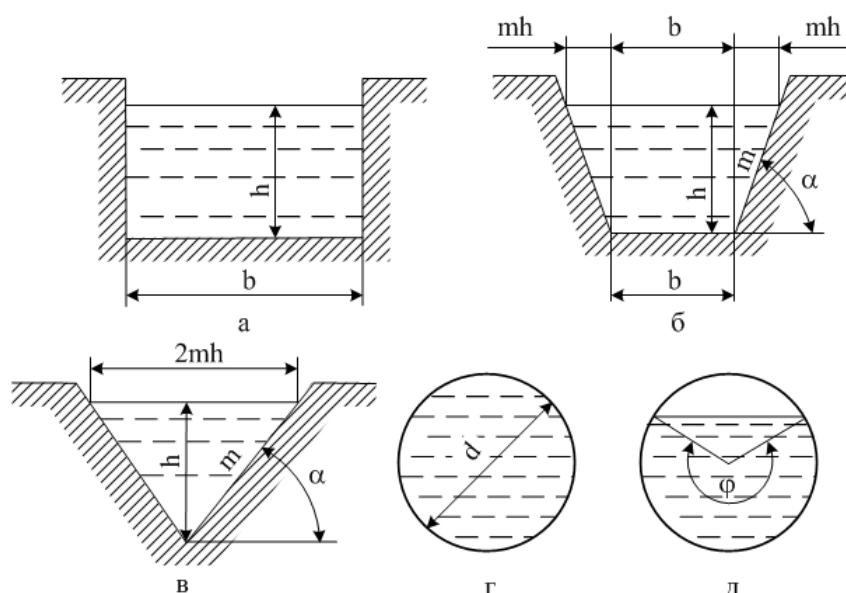


Рис. 4. Схеми до визначення гідравлічних характеристик потоків з поперечним перерізом: а – прямокутним; б – трапецеїдальним; в – трикутним; г - круглим; д – сегментним.

Площа живого перерізу найбільш розповсюджених його форм визначається за формулами, що наводяться в таблиці 1.

Таблиця 1 - Формули для визначення гідравлічних елементів потоку рідини ( $\omega$ ,  $\chi$ ,  $R$ )\* [1]

Форма поперечного перерізу	Схема, рис. 2б	Площа поперечного перерізу, $\omega$ , м <sup>2</sup>	Довжина змоченого периметра, $\chi$ , м	Гідравлічний радіус, $R$ , м
Прямокутна	а	$b \cdot h$	$2h + b$	$\frac{bh}{2h + b}$
Трапецеїдальна	б	$(b + mh)h$	$b + 2h\sqrt{1 + m^2}$	$\frac{h(mh + b)}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}$
Трикутна	в	$mh^2$	$2h\sqrt{1 + m^2}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1 + m^2}}$
Кругла	г	$\pi r^2$ , або $\frac{\pi d^2}{4}$	$2\pi r$	$\frac{r}{2}$
Не повна круга (сегментна)	д	$\frac{d^2}{8} \left( \frac{\varphi\pi}{180} - \sin\varphi \right)$	$\frac{\varphi\pi d}{360}$	$\frac{d}{4} \left( 1 - \frac{180\sin\varphi}{\varphi\pi} \right)$

\*Примітка: в формулах наведено:  $h$  – глибина рідини;  $b$  – ширина дна;  $m = ctg\alpha$  - коефіцієнт закладання схилу;  $\varphi$  - центральний кут;  $d$  - внутрішній діаметр труби;  $r$  - внутрішній радіус труби.

**Змочений периметр  $\chi$ , м** — це та частина периметра живого перерізу

поток, на якій рідина торкається твердих стінок (тобто це довжина лінії перерізу поверхні русла) (рис. 3, б). Чим більше змочений периметр потоку, тим більше гідравлічні опори при його русі, а значить більші втрати енергії. Довжина змоченого периметра найбільш розповсюджених форм поперечного перерізу (рис. 4) визначається за формулами, що наводяться в таблиці 2.

**Гідравлічний радіус  $R$ , м** - це відношення площі живого перерізу  $\omega$  до змоченого периметра  $\chi$

$$R = \omega / \chi. \quad (3)$$

Формули для визначення гідравлічного радіусу найбільш розповсюджених форм поперечного перерізу (рис. 4) наводяться в таблиці 1.

**Витрата рідини  $Q$ , м<sup>3</sup>/с** – це об'єм рідини, яка протікає через живий переріз потоку за одиницю часу.

Теоретично сказане обґрунтовується, якщо прийняти, що витрата рідини в елементарній струминці  $dQ = \frac{dW}{t}$ , тоді загальна витрата

$Q = \int_{\omega} \frac{dW}{t}$ , що в кінцевому результаті дає формулу

$$Q = \frac{W}{t}, \quad (4)$$

де  $W$  – об'єм рідини;  $t$  – час.

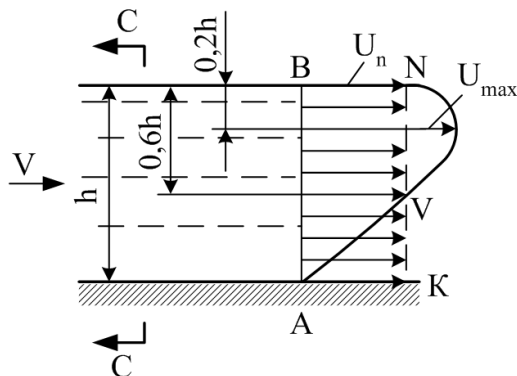


Рис. 5 Схема епюр дійсної і середньої швидкостей руху рідини у відкритому руслі (наприклад, в річці).

Середня швидкість руху рідини  $V$ , м/с – це фіктивна швидкість, з якою всі частинки рідини рухаються так, що кількість рідини, яка протікає через живий переріз, що розглядається, дорівнює дійсній кількості рідини, яка протікає через той же переріз при дійсних швидкостях руху. Дійсна швидкість руху рідини, наприклад в живому перерізі каналу, змінюється від поверхневої швидкості до максимальної на деякій глибині і далі до нуля біля дна каналу. На рисунку 5 показана епюра дійсних швидкостей (суцільна крива) і епюра середньої швидкості течії (пунктирна вертикальна лінія). Середня швидкість згідно з її визначенням буде

$$V = \frac{\int u d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega} \quad (5)$$

де  $Q$  - витрата рідини;  $\omega$  - площа живого перерізу.

### 3. Рівняння нерозривності потоку рідини

Для обґрунтування рівняння нерозривності потоку рідини скористуємося такими міркуваннями. Будемо вважати, що розглядається потік нестискуючої рідини суцільний за структурою, а значить з плином часу зміни (збільшення або зменшення) її маси в об'ємі, який розглядається, не буде мати місця. Прослідкуємо за масою рідини, яка протікає через грані елементарного паралелепіпеда, виділеного у середині рухомої рідини (рис. 6, а).

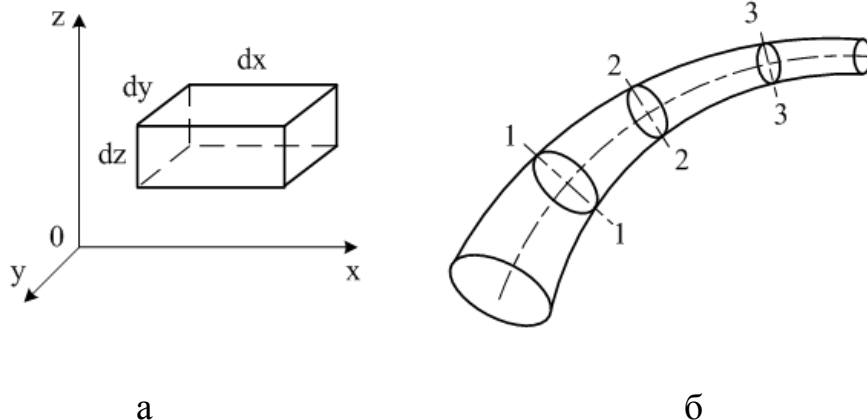


Рис. 6 Схеми до обґрунтування нерозривності потоку рідини: а – схема до виведення рівняння нерозривності потоку рідини; б – схема, яка ілюструє нерозривність потоку рідини.

Розпочнемо розгляд питання з напрямку, який співпадає з напрямком вісі ОХ.

Припустимо зворотнє, тобто, що при протіканні рідини через грані паралелепіпеда кількість маси рідини зміниться. Тоді через ліву грань паралелепіпеда рідина втікає в нього з швидкістю  $u_x$ , а через праву грань витікає з швидкістю  $u_x + \partial u_x dx / \partial x$ .

Величина зміни кількості маси за одиницю часу в паралелепіпеді в напрямку, який співпадає з віссю ОХ, складе

$$dM_x = \rho u_x dydz - \rho(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx) dydz = -\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dydz. \quad (6)$$

Аналогічно з цим, зміна кількості маси за одиницю часу по другим напрямкам складе

$$dM_y = -\rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dydz; \quad dM_z = -\rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dydz. \quad (7)$$

Але за умовою нерозривності  $dM = dM_x + dM_y + dM_z = 0$

$$dM = -\rho dx dydz \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (8)$$

Величини  $\rho$ ,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  не дорівнюють нулю. Отже

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Рівняння (9) називається рівнянням **нерозривності в диференціальному вигляді** (рівняння Л.Ейлера) для довільного руху нестиснутої рідини.

Для потенціального руху нестискууючої рідини існує функція  $\varphi(x, y, z)$ , яка називається **потенціалом швидкості**, частинні похідні якої по координатним вісям дорівнюють відповідним проекціям швидкості:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (10)$$

З врахуванням цього рівняння нерозривності (9) можна записати так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (11)$$

Рівняння (11) називається **рівнянням Лапласа**.

Якщо в потоці рідини взяти перерізи 1-1, 2-2 і 3-3, то для кожного з них буде справедливим рівняння (11) розв'язане відносно витрати рідини  $Q = \omega V$ , тобто:

$$Q_1 = \omega_1 V_1, \quad Q_2 = \omega_2 V_2; \quad Q_3 = \omega_3 V_3, \quad (12)$$

Так як для усіх живих перерізів потоку, який розглядається, величина  $Q$  постійна, то  $Q_1 = Q_2 = Q_3$ , а

$$\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2 = \omega_3 V_3, \quad (13)$$

що справедливо при нерозривності потоку нестискууючої рідини.

Таким чином в будь-якому перерізі потоку рідини її витрата  $Q$  визначається залежністю

$$Q = \omega V, \quad (14)$$

де  $\omega$  - площа живого перерізу;  $V$  - середня швидкість руху рідини.

### Питання для самоконтролю до лекції №3.

1. Що вивчається в розділі гідравліки – гідродинаміці?
2. Якими елементами характеризується потік рідини?
3. Як формулюється й записується рівняння нерозривності потоку рідини?
4. Що називається руслом потоку?
5. Що називається живим перерізом потоку?
6. Що називається змоченим периметром потоку?
7. Що називається гідравлічним радіусом потоку?
8. Що називається витратою рідини потоку?
9. Що називається середньою швидкістю руху рідини?
10. Що називається потоком рідини?
11. Що називається елементарною струминкою рідини?