

ТЕМА 7. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ЯК МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НАДІЙНОСТІ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

7.1. Теорія ймовірності як наука

7.2 Способи обчислення ймовірностей

7.3 Правило множення ймовірностей

7.4 Функція розподілу

7.5 Щільність (густина) розподілу

7.6 Числові характеристики випадкових величин

7.7 Потік подій. Простий потік подій та його характеристики

7.1. Теорія ймовірності як наука

Теорія ймовірності – наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. *Випадкове явище* – таке явище, яке при неодноразовому повторенні одного й того ж досліду (випробування) в одних й тих же умовах проходить (відбувається) кожен раз не повністю однаково.

Приклад. Якщо під певне навантаження поставити на 100 годин роботи 1000 елементів, можемо сподіватися, що деякі з них вийдуть з ладу. До того ж час роботи до відмови (час безвідмовної роботи) у кожного елемента, який вийде з ладу, як правило, не буде однаковим навіть при ідеальності однакових (подібних) умов випробувань. Це пояснюється тим, що при виготовленні однакових елементів практично неможливо ідеально витримати технологічний режим та суворо дотриматися однорідності фізико-хімічної структури застосовуваних матеріалів.

А звідси значення часу безвідмовної роботи кожного з елементів точно передбачити неможливо та виникнення відмов у елементах, які випробовуються у різні проміжки часу, є явищем випадковим. Розсіювання (розкид) часу безвідмовної роботи притаманне будь-яким видам елементів, а оскільки з елементів складаються системи – будь-яким системам.

Теорія ймовірності дозволяє вивчити випадкові явища "розсіювання" часу безвідмовної роботи з точки зору тих закономірностей, які властиві даному випадковому явищу. При комплексному випробуванні (досліді) отримується той чи інший результат, коли досліджується надійність елементів та систем. Якісний результат випробування (досліду), (безвідмовна робота, відмова) – називається *подією*.

А кількісна характеристика, яка внаслідок випробувань може приймати одне з можливих заздалегідь невідомих значень, називається *випадковою величиною*.

Очевидно, що час безвідмовної роботи є випадковою величиною. На розкид значень часу безвідмовної роботи системи, окремо від технологічних факторів, сильно впливають експлуатаційні фактори (постійно мінливі умови експлуатації).

Число відмов за даний проміжок часу є також випадковою величиною.

Надійність пристрою характеризується *відновлюваністю* (у вузькому розумінні – ремонтпридатністю). Зрозуміло, що час поновлення системи також залежить від багатьох факторів (характеру відмови, кваліфікації обслуговуючого персоналу, наявності запасних елементів під рукою, умов ремонту, тощо) та змінюється від одного ремонту до другого, тобто також є випадковою величиною.

В реальних умовах, коли комплекс експлуатаційних факторів від досліду до досліду трохи змінюється, до того ж випадковим чином, а елементи систем мають випадковий технологічний розкид параметрів, час безвідмовної роботи змінюється в більших чи менших межах навіть для однорідних елементів системи. Тобто на практиці завжди має місце вплив на процес, що вивчається, у часі зовнішніх факторів, які можна врахувати статистично (при масовому експерименті). Визначити реальні статистичні закони, які обумовлюють об'єктивні властивості масових випадкових явищ, що вивчаються, дозволяють методи теорії ймовірностей. Ось чому теорія надійності базується на математичному апараті теорії ймовірності.

Ймовірність тієї чи іншої події – це перш за все кількісна характеристика, яка дозволяє оцінити ступінь об'єктивної можливості деякої події.

За одиницю вимірювання для ймовірності прийнята ймовірність виникнення достовірної події, тобто події, яка внаслідок досліду (випробування) повинна обов'язково (неминуче) відбутися.

Приклад. Якщо проводимо спостереження за роботою 10 елементів (елементи не поновлюються), то подія – виникнення не більше 10 відмов є достовірною. Ця ймовірність відповідає одиниці.

Протилежним до достовірної є неможлива подія, тобто така подія, яка в даному досліді не може відбутися.

Приклад. Факт безвідмовної роботи елемента (системи) протягом безмежно довгого часу є неможливою подією, так як рано чи пізно система відмовить. Виходить, що ймовірність безвідмовної роботи елемента (системи) на протязі безмежно довгого часу дорівнює нулю, тобто ймовірність виникнення неможливої події дорівнює нулю.

Будь-яка інша подія, не достовірна та не неможлива, має величину ймовірності появлення, яка лежить в межах між одиницею та нулем. Безпосередній підрахунок ймовірності події пов'язаний з одним із трьох визначень ймовірності.

Класичне визначення ймовірності

Ймовірність деякої події A можна визначити безпосередньо з умов досліду, коли вихідний результат досліду можна розділити на деяке число поодиноких випадків, які входять у повну групу з n -несумісних та рівноможливих подій. Сукупність декількох подій утворюють групу подій. Говорять, що декілька подій утворюють повну групу подій, якщо внаслідок досліду (випробування) обов'язково повинна відбутися хоча би одна з них.

Приклад. Безвідмовна робота або відмова одного, двох та більше елементів при спостереженні за роботою декількох непоновлюваних елементів утворюють повну групу подій (одна з них на протязі досліду

обов'язково відбудеться).

Несумісні події – такі, які у даному досліді не можуть з'явитися разом.

Безвідмовна робота і відмова події несумісні.

Рівноможливі (однаково можливі) події – такі, які в процесі досліді можуть відбутися з однаковою ймовірністю внаслідок повної симетрії можливих виходів.

Якщо те чи інше випробування (дослід) забезпечує симетрію можливих виходів тобто забезпечує наявність однакової можливості у повній групі несумісних подій, то говорять, що такий дослід (випробування) зводиться до "схеми випадків" або до "схеми можливих результатів". В цьому й тільки в цьому випадку ймовірність події А визначається безпосередньо з умов досліді по класичній формулі, як відношення числа m випадків сприятливих даній події, до загального числа n усіх однаково можливих випадків:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Геометричне визначення ймовірності

Нехай внаслідок досліді деяка точка O обов'язково опиниться в області A (рис. 2.2), треба знайти ймовірність того, що точка O опиниться в області B , яка є частиною області A .

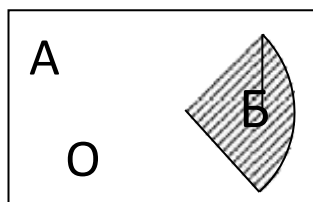


Рисунок 2.2

Ймовірність появи точки O в області B залежить тільки від величини цієї області та не залежать від її форми та характеру розміщення в області A . Таким чином, чим більша область B , тим більша ймовірність попадання до неї точки O (й навпаки).

Оскільки число можливих випадків у даному досліді є нескінченним, безмежним, то можливість застосування класичної формули для визначення ймовірності виключена.

В даному випадку шукану ймовірність визначають відношенням площин:

$$P(A) = \frac{\text{площа } B}{\text{площа } A}$$

Виходячи з визначення геометричної ймовірності (рис. 2.3), попадання точки (момент відмови елемента) в інтервал $[\tau_2, \tau_1]$,

зал

ежить

більше від довжини цього інтервалу та не залежить від того, де цей інтервал знаходиться у середині інтервалу $[t_2, t_1]$, тобто:

$$P(A) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{t_2 - t_1}$$

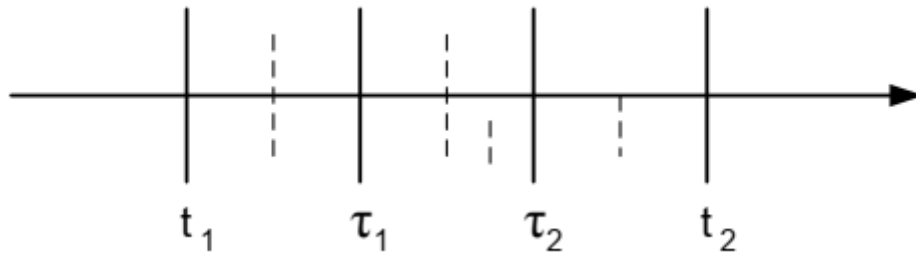


Рисунок 2.3

Статистичне визначення ймовірності

Коли дослід не зводиться до "схеми випадків", ймовірність події визначають статистично, попередньо провівши довготривалі спостереження над появою чи появою шуканої події при великій кількості випробувань, які відбуваються в одних і тих же умовах.

Приклад. Нехай на протязі 500 год. спостережень з 1000 конденсаторів відмовили 15 (конденсатори не замінюються новими). Розглянемо подію – безвідмовну роботу конденсаторів за $t=500$ год. Ймовірність безвідмовної роботи (за $t=500$ год) конденсаторів по аналогії з класичним визначенням ймовірності подій може бути оцінено як:

$$P^*(t) = \frac{\text{число випадків безвідмовної роботи}}{\text{загальне число випадків}} = \frac{1000 - 15}{1000} = 0.985$$

Якщо розглядувана подія – відмова конденсатора, то ймовірність відмов за час $t=500$ год може бути оцінено величиною:

$$g^*(t) = \frac{\text{число випадків відмов}}{\text{загальне число випадків}} = \frac{15}{1000} = 0.015$$

Значком (*) позначається статистичне значення ймовірності, яка є наближеним числовим значенням відповідної ймовірності.

Таким чином, статистична ймовірність деякої події A визначається як відношення числа дослідів m , у яких подія, яка нас цікавить, повториться до загального числа дослідів n , приведених у даних випробуваннях:

$$P^*(t) = \frac{m}{n} \quad (m \leq n) \quad (2.1)$$

Статистичну ймовірність часто називають частотою появи події або відносною частотою.

У формулі (2.1) умова $m \leq n$ є очевидною, якщо при дослідженні на надійність відбувається заміна елементів, що відмовили, новими, то число m може стати більшим n , тобто будь-яким.

Таким чином, формула (2.1) при розрахунку елементів (систем) може бути застосована для випадку випробувань не поновлюваних та незамінних елементів (систем).

При використанні формули (2.1) для випадку повністю відновлюваних (замінних) елементів (систем) треба в числа m та n включити й число

відновлювань.

Численні досліди показують, що частота події $P^*(A)$ при достатньо великій кількості дослідів n в попередній серії випробувань зберігає майже постійну величину від серії до серії, тобто коливання частот відбувається біля математичної ймовірності події P . Цей зв'язок між статистичною та математичною ймовірностями вперше довів Бернуллі у своїй теоремі: *Якщо подія A має ймовірність p , то при необмеженому збільшенні числа дослідів ймовірність розходження між частотою і ймовірністю p наближається до нуля.*

Іншими словами, якщо число дослідів велике, то, приймаючи частоту події за значення ймовірності, ми дуже мало ризикуємо помилитися на якусь суттєву величину. Іноді говорять, що частота події збігається по ймовірності до ймовірності події.

7.2 Способи обчислення ймовірностей

Обчислення ймовірності події, яке ґрунтується на класичному або геометричному визначеннях можемо зробити тільки для простих випадків. Обчислення ймовірностей складних подій як правило базується на непрямих методах, які використовують правило додавання ймовірностей та правило множення ймовірностей.

Нехай маємо два елемента A_1 та A_2 . При цьому подія A_1 полягає у тому, що за час досліджень відмовить елемент A_1 , а подія A_2 – елемент A_2 . В процесі досліду може відмовити або A_1 , або A_2 , або A_1 та A_2 разом. Сумою декількох подій називається подія, яка полягає у появі хоча б однієї з цих подій (або A_1 , або A_2 , або A_1 та A_2 разом). Частковим випадком є випадок несумісних подій. Сумою декількох несумісних подій називається подія, яка полягає у появі тільки однієї з цих подій (або A_1 , або A_2).

Правило додавання ймовірностей для несумісних подій: ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (2.2)$$

В цій формулі знак "+" замінює сполучення "або".

Для суми n несумісних подій теорема додавання має вигляд:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1 \quad (2.3)$$

З цього правила додавання випливають два висновки (наслідки):

1. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1.

Протилежними подіями називають події, які утворюють повну групу подій: якщо $p(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи, $q(t)$ – ймовірність

відмови за час t , а відповідні події утворюють повну групу протилежних подій, то:

$$p(t) + q(t) = 1.$$

Правило додавання ймовірностей ускладнюється якщо розглядаються сумісні події або ті, які у даному досліді можуть з'явитися разом.

Для сумісних подій правило додавання ймовірностей має такий вигляд:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1, A_2), \quad (2.4)$$

де $P(A_1, A_2)$ – ймовірність сумісної появи першої та другої події.

Зрозуміти сенс даної формули можливо розглядаючи графічну інтерпретацію поняття суми та добутку подій (рис. 2.4).

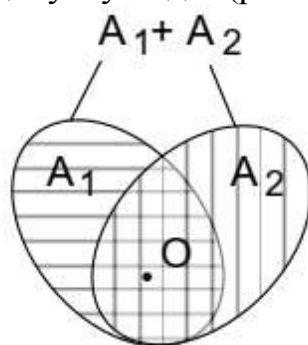


Рисунок 2.4

Якщо подія A_1 є попадання точки O в область A_1 , а A_2 – в область A_2 , то подія $A_1 + A_2$ є попадання в заштриховану область. Якщо події A_1 та A_2 несумісні, то точки які їм належать не можуть попасти одночасно у заштриховану область, яку позначено двійною штриховкою.

Введемо поняття добутку подій.

Добутком декількох подій називається подія, яка полягає у сумісній появі цих подій.

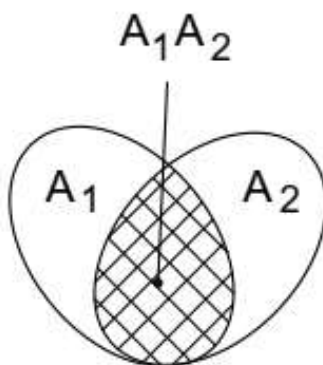


Рисунок 2.5

Подія $A_1 A_2$ – добуток двох подій – полягає у одночасному попаданні точок, які належать A_1 та A_2 (дивись заштриховану область рисунку 2.5).

Тому подія $A_1 A_2$ зменшує кількість точок області, які належать події A_1 , та події A_2 . Відповідно ймовірність або настання події A_1 або A_2 зменшується на величину ймовірності заступлення сумісної події A_1 та A_2 в

формулі (2.4).

Використовуючи геометричну інтерпретацію можна досить легко записати формули для ймовірностей декількох сумісних подій, наприклад, A_1, A_2, A_3 (рис. 2.6).

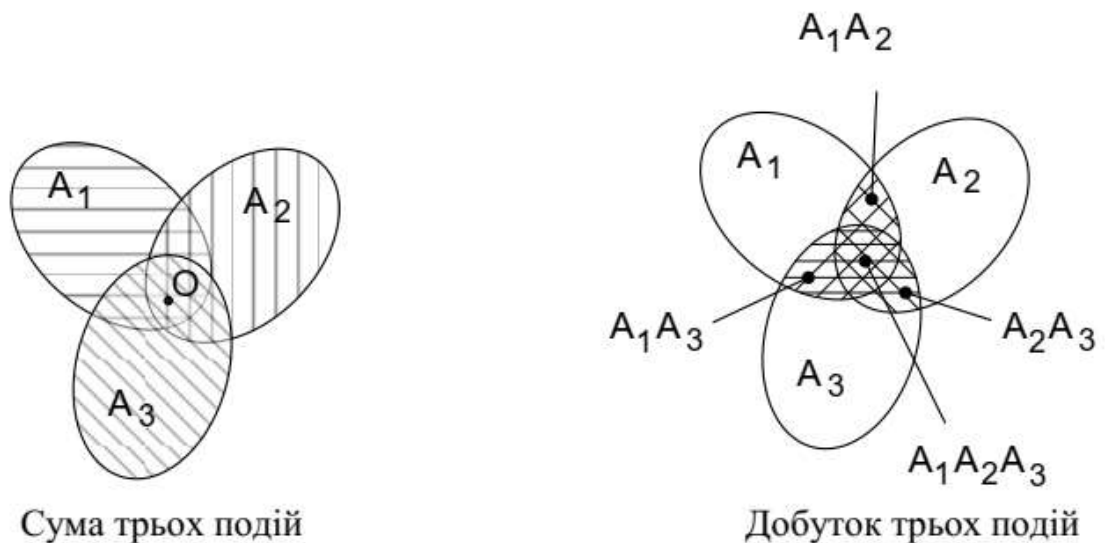


Рисунок 2.6

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_1 A_2) + P(A_1 A_3) + P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

В цій формулі додавання ймовірності $P(A_1 A_2 A_3)$ викликано тим, що кожна з подій $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$, вміщує підмножину точок області, яку утворено перетином границь областей A_1 , A_2 та A_3 .

7.3 Правило множення ймовірностей

В формулі (2.4) є ймовірність $P(A_1, A_2)$ настання сумісної події A_1 та A_2 . Події A_1 та A_2 можуть бути:

1. Подія A_1 називається *незалежною* від події A_2 , якщо ймовірність події A_1 не залежить (не змінюється) від того, відбудеться чи ні подія A_2 .
2. Дві події називаються *залежними*, якщо ймовірність однієї з них змінюється від того, відбулася чи ні друга подія.

Це зауваження суттєве, так як при розрахунках надійності пристроїв дуже часто приходится зустрічатися з обома типами подій. Наприклад, однорідні елементи не об'єднані в конкретні схеми – відмова одного з них не вплине на ймовірність виникнення відмови в другому елементі. Залежна відмова настає тоді, коли відмова одного викликає відмову другого (наприклад, коли вихід одного елемента з ладу приводить до виходу з ладу всієї системи).

Ймовірність події A_1 визначена при умові, що відбулася подія A_2 , називається умовною ймовірністю події A_1 та позначається як $p(A_1, A_2)$. Тоді правило множення ймовірностей (для двох подій) буде таке: ймовірність добутку двох подій (A_1 та A_2) дорівнює добутку ймовірності однієї з них (A_1

) на умовну ймовірність другої (A_2), обчислену з припущенням що перша подія відбулася, тобто:

$$P(A_1, A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2 | A_1) = p(A_2) \cdot p(A_1 | A_2).$$

Якщо події незалежні, то, очевидно, що $p(A_1) = p(A_1 | A_2)$, також як й $p(A_2) = p(A_2 | A_1)$. Звідси виходить ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$p(A_1, A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2).$$

В цій формулі операція множення замінює сполучник "і". Це правило можна застосовувати для будь-якої кількості подій. Наприклад, для трьох залежних подій:

$$p(A_1, A_2, A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2 | A_1) \cdot p(A_3 | A_1 A_2).$$

Послідовним з'єднанням елементів (систем) називається така її сукупність, коли необхідною та достатньою умовою відмови всього з'єднання в цілому є відмова хоча б одного елемента (системи). Послідовне з'єднання елементів (систем) називають основним.

Паралельне з'єднання елементів по надійності називають резервним з'єднанням. *Паралельне з'єднання елементів* (систем) – це таке з'єднання, або сукупність елементів (систем) для яких необхідною та достатньою умовою відмови є відмова всіх елементів.

Формула повної ймовірності

При більш докладніших розрахунках надійності, коли взаємні зв'язки відіграють суттєву роль, приходится застосовувати більш складні схеми подій у вигляді комбінації простих подій, застосовуючи як операцію додавання, так і операцію множення подій.

Нехай деяка подія A може відбутися тільки тоді, коли разом з нею відбувається одна з n несумісних подій $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$, які утворюють повну групу подій. Тобто, це означає, що подія A рівносильна появі або AM_1 , або AM_2 і т.д.:

$$A = AM_1 + AM_2 + AM_3 + \dots + AM_i + \dots + AM_n = \sum_{i=1}^n (AM_i)$$

Використовуючи правило додавання ймовірностей несумісних подій, отримуємо:

$$p(a) = p\left(\sum_{i=1}^n AM_i\right) = \sum_{i=1}^n p(AM_i)$$

а з врахуванням правила множення ймовірностей:

$$p(AM_i) = p(M_i) \cdot p(A | M_i)$$

Підставляючи з цієї формули значення $p(AM_i)$ до попередньої формули, отримуємо формулу повної ймовірності:

$$p(a) = \sum_{i=1}^n p(M_i) \cdot p(A|M_i).$$

Події $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ при яких тільки й може відбутися подія A , називають *гіпотезами відносно A* .

7.4 Функція розподілу

Для кількісної оцінки закону розподілу випадкової величини (дискретної або неперервної) задають *функцію розподілу ймовірностей випадкової величини*, яку визначають як ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше деякого фіксованого числа x , та позначають

$$F(x) = P\{X < x\}$$

або

$$F(x) = P\{-\infty < X < x\}.$$

Функцію розподілу $F(x)$ інколи називають *інтегральною функцією розподілу ймовірностей випадкової величини*.

Знаючи функцію розподілу $F(x)$, можна обчислити ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал $[a, b)$:

$$P\{-\infty < X < x\} = F(b) - F(a).$$

Дійсно, випадкова подія $\{X < b\}$ є об'єднанням двох несумісних подій $\{X < a\}$ та $\{a \leq X < b\}$.

Отже, за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P\{X < b\} = P\{X < a\} + P\{a \leq X < b\},$$

звідки

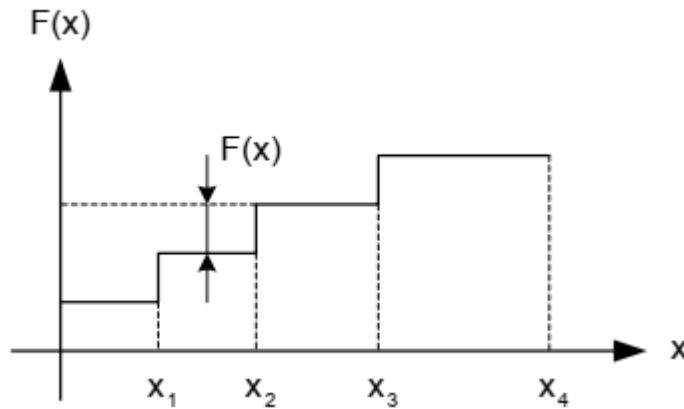
$$P\{a \leq X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$$

або, враховуючи вищесказане позначення (2):

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

Отже, ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал рівна приросту функції розподілу на заданому інтервалі.

Графік функції розподілу дискретних випадкових величин має стрибкоподібний вигляд (див. рис. 2.8). При досягненні поточної змінної x можливих значень величини X випадкова функція $F(x)$ робить стрибок на величину, яка дорівнює ймовірності даного значення випадкової величини



Встановимо деякі *властивості функції розподілу*:

1. $F(x)$ є неспадною функцією, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_1 < x_2$

2. Значення функції розподілу належать відрізьку $[0;1]$, тобто

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

або інакше:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

3. Функція розподілу неперервна зліва:

$$F(x) = F(x-0), \quad \forall x.$$

Стосовно теорії надійності функція розподілу має ряд загальних властивостей:

Чим більший час роботи елемента або системи, тим більша ймовірність відмови. При $t_2 > t_1$ величина ймовірності відмов $q(t_2) > q(t_1)$. При $t = 0$ ймовірність відмови $q(t) = 0$ (виключаємо можливі випадки відмови елемента до можливого включення в роботу). При $t \rightarrow \infty$ відмова стає достовірною подією $q(t) \rightarrow 1$.

7.5 Щільність (густина) розподілу

Закон розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин може бути заданий також *щільністю (густиною) розподілу*.

Нехай неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$, неперервною та диференційованою. Ймовірність попадання цієї випадкової величини в деякий інтервал $(x, x + \Delta x)$ знайдемо на підставі співвідношення (2):

$$P\{x < X < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x),$$

тобто як приріст функції розподілу на цьому інтервалі.

Відношення

$$\frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

Виражає середню ймовірність, яка приходить на одиницю довжини інтервалу. Перейшовши до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, отримаємо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Щільність розподілу в теорії надійності є показником оцінки надійності невідновлювальних систем. Цією характеристикою зручно користуватися й при визначенні щільності ймовірності часу до першої відмови або між відмовами невідновлювальних систем. Крива, яка зображує щільність розподілу випадкової величини називається *кривою розподілу*. В теорії надійності використовуються дві криві розподілу (див. рис. 2.9).

а) щільність розподілу часу безвідмовної роботи для раптових відмов не поновлювальних однотипних елементів; найбільша щільність ймовірності відмов приходить на початковий період роботи елементів, але це не означає, що надійність пристрою не зміниться, бо на експлуатації знаходиться менша кількість елементів та ймовірність виникнення відмов в меншій кількості елементів менша. Коли не залишиться ні одного елемента, то щільність розподілу рівна 0.

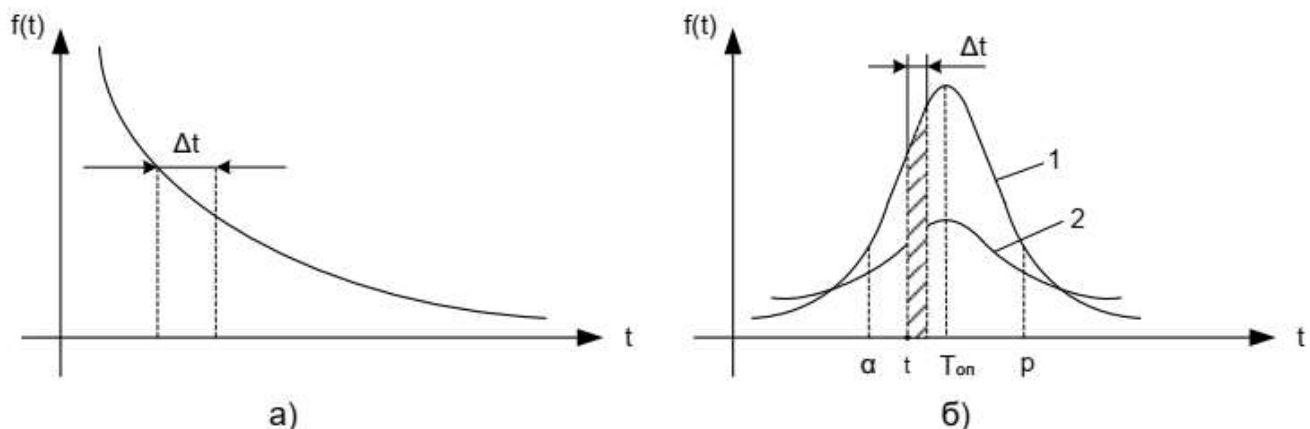


Рисунок 2.9

б) щільність розподілу для випадку поступових відмов (які накопичуються з часом) невідновлювальних елементів (систем). Поступові відмови на відміну від раптових пов'язані з повільним накопиченням ознак старіння та зношення, які проявляються після достатнього терміну роботи систем. В період масового старіння та зношення ($T_{оп}$) крива різко йде вверх (щільність розподілу часу безвідмовної роботи має $\max$ при $T_{оп}$). Після цього щільність розподілу спадає, оскільки на випробуваннях залишається менше елементів (систем), що приводить до зменшення виникнення відмов тобто $f(x) \rightarrow 0$.

7.6 Числові характеристики випадкових величин

Для оцінки розподілу випадкових величин використовуються числові

характеристики:

- математичне сподівання;
- дисперсія;
- середньоквадратичне відхилення.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X , що приймає скінченну кількість значень x_i з ймовірностями p_i , називається сума:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається інтеграл від добутку її значень x_i на щільність розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Математичне сподівання характеризує *середнє значення* випадкової величини X . Її розмірність співпадає з розмірністю випадкової величини.

Властивості математичного сподівання:

- $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$, $c \in R$
- $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$,
- $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ для незалежних випадкових величин X та Y .

Дисперсією випадкової величини X називається число

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\} = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Дисперсія є *характеристикою розсіювання* значень випадкової величини X відносно її середнього значення $M(X)$. Розмірність дисперсії рівна розмірності випадкової величини в квадраті. Виходячи з визначення дисперсії та математичного сподівання для дискретної випадкової величини та для неперервної випадкової величини отримаємо аналогічні вирази для дисперсії:

$$D(X) = M(X - m)^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i & \text{для дискретних випадкових величин} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx & \text{для неперервних випадкових величин} \end{cases}$$

Властивості дисперсії:

- $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$, $c \in R$,
- $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ для незалежних випадкових величин X та Y .

Середньо квадратичне відхилення характеризує міру розсіювання значень випадкової величини X , має з нею однакову розмірність та визначається за формулою:

7.7 Потік подій. Простий потік подій та його характеристики

Потоком подій називається така послідовність подій, що розвиваються одна за одною у випадкові моменти часу. Якщо розглядається потік відмов та поновлення систем, а час відновлення при даному розгляді дорівнює нулеві, то одержимо потік відмов, які виникають одна за одною. Потоки цих подій можуть бути різними. Розрізняють потоки: регулярний, нерегулярний, простий, найпростіший.

Потік подій відбувається у часі (рис. 2.10).

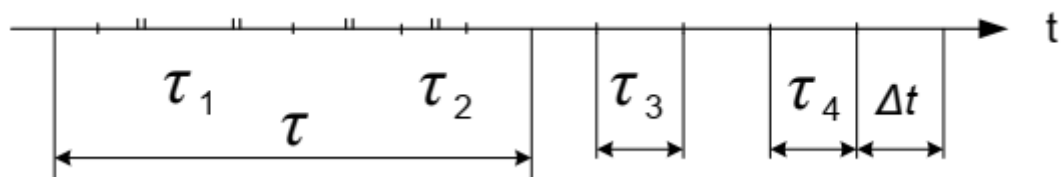


Рисунок 2.10

Характеристики потоків подій:

1. Стационарність. Ймовірність виникнення певної кількості подій за інтервал часу тривалістю τ залежить не від того, де інтервал часу τ знаходиться на осі часу t , а тільки від довжини інтервалу τ . Більшому інтервалу відповідає більша кількість подій. Ця умова для потоку відмов в апаратурі виконується наближено. В період експлуатації апаратури потоки відмов є нестационарними.

2. Відсутність післядії. Характер протікання потоку подій після часу τ не залежить від того як протікав потік до цього моменту. Математично це означає, що умовна ймовірність появи K подій (відмов) за інтервал $[\tau, \tau + \tau_3]$ розрахована при довільних припущеннях про насичення подій до цього інтервалу та рівна безумовній ймовірності насичення подій за цей інтервал. З фізичної точки зору післядія виконується по-різному: 1 – внаслідок відмов одного елемента часто одночасно виходять з ладу залежні елементи; 2 – відмова одного елемента може призвести до виникнення напруженого елементарного режиму для інших елементів, що збільшує ймовірність їх відмов в подальшому; 3 – заміна відновлених елементів новими призводить до того, що наступна відмова скоріше станеться у елементів, які замінені раніше, ніж у щойно поставлених.

3. Ординарність. Термін ординарний говорить про те, що за невеликий проміжок часу Δt малоімовірна поява двох та більше подій.

Найважливішими чисельними параметрами випадкового потоку є інтенсивність потоку $\mu(t)$ та параметр потоку $\lambda(t)$.

Інтенсивністю потоку називають математичне сподівання кількості подій за одиницю часу в даний момент:

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{N}(t, t + \Delta t)}{\Delta t},$$

тобто, це границя відношення середньої кількості подій (N) на інтервалі $(t, t + \Delta t)$ до довжини цього інтервалу, що прямує до нуля.

Параметром потоку називається границя відношення ймовірності надходження хоча б однієї події на інтервалі $(t, t + \Delta t)$ до довжини цього інтервалу, що прямує до нуля:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{i \geq 1}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Для стаціонарного процесу інтенсивність та параметр потоку – величини постійні не залежать від часу, тобто $\lambda(t) = \lambda$ та $\mu(t) = \mu$. Для ординарних потоків величина параметра потоку та інтенсивність потоку збігаються, тобто $\lambda = \mu$.