Практичне заняття №1
ЗАДАЧІ ПРО УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ (РЕСУРСАМИ) ТА ТРАНСПОРТНОГО ТИПУ

1 Завдання для самостійної підготовки

Вивчити:

- класифікацію задач математичного програмування;
- суть симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування.

Скласти звіт по роботі:

- номер, найменування та мета роботи;
- класифікація задач математичного програмування;
- етапи розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом.

2 Питання для самопідготовки

2.1 Визначення «математичного програмування» та «лінійного програмування».

2.2 Особливості застосування лінійного програмування.

2.3 Чим відрізняються стандартна та канонічна задачі лінійного програмування?

2.4 Назвіть дії для переходу від однієї форми задачі ЛП до інших.

2.5 Назвіть три форми запису моделі та їх особливості.

2.6 Охарактеризуйте етапи розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом.

3 Теоретичні відомості

3.1 Класифікація задач математичного програмування

Математичне програмування виникло в 30-ті роки XX століття. Угорський математик Б. Егерварі в 1931 році вирішив задачу, звану проблемою вибору. Американський вчений Г. У. Куй узагальнив цей метод, після чого він отримав назву угорського методу. У 1939 році російський вчений Л. В. Канторович розробив метод множників, що дозволяє вирішити завдання лінійного програмування. Великий внесок у розвиток математичного програмування внесли американські вчені. У 1949 році американський вчений Дж. Данциг опублікував один з основних методів вирішення завдань лінійного програмування, що отримав назву *симплексний*. Дослідження різних, у тому числі й економічних, процесів зазвичай починається з їх моделювання, тобто відображення реального процесу через математичні співвідношення. При цьому проводиться

складання рівнянь або нерівностей, що зв'язують різні показники (змінні) досліджуваного процесу, які утворюють систему обмежень.

У цих співвідношеннях виділяються такі змінні, змінюючи які, можна отримати оптимальне значення основного показника даної системи (прибуток, дохід, витрати тощо.). Відповідні методи, що дозволяють вирішувати зазначені завдання, об'єднуються в загальну назву **«математичне програмування»** або **«математичний метод»** дослідження операцій.

Математичне програмування включає в себе такі розділи математики як **лінійне, нелінійне** і **динамічне** програмування. Сюди ж зазвичай відносять стохастичне програмування, теорію ігор, теорію масового обслуговування, теорію управління запасами і деякі інші.

Отже, ***математичне програмування*** – це розділ вищої математики, що займається вирішенням завдань, пов'язаних з перебуванням екстремумів функцій декількох змінних за наявності обмежень на змінні.

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — ***детерміновані*** задачі і ***стохастичні***. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв’язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв’язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається ***стохастичним програмуванням***.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рис. 1.1 (поділ наведений для детермінованих задач, але він такий же і для стохастичних).

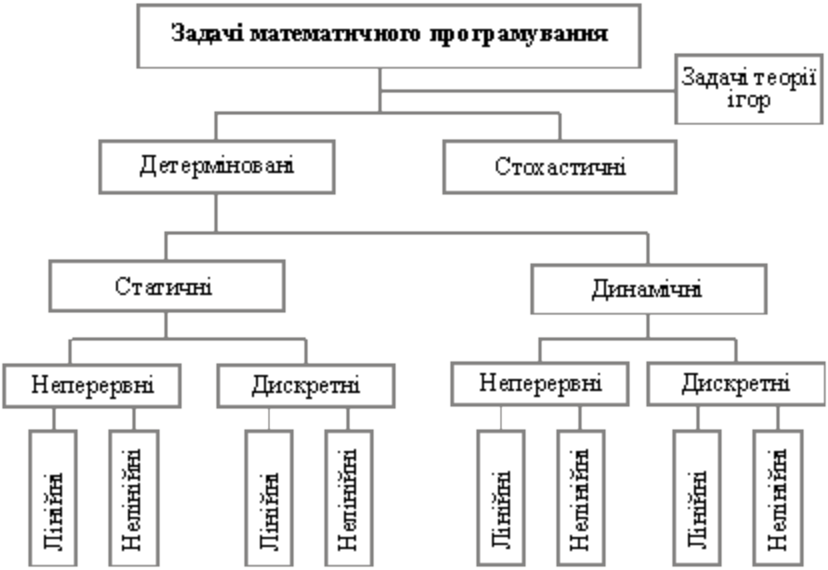

Рис. 1.1. Класифікація задач математичного програмування

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути ***статичними*** (однокроковими) або ***динамічними*** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2025 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2025 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість (динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають ***стратегічним***. У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилятися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними***. Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком

знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на ***дискретні*** і ***неперервні***. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремий тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. Їх називають задачами ***цілочислового програмування***. Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною***.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на ***лінійні*** та ***нелінійні***. Якщо цільова функція та обмеження є лінійними, тобто містять змінні x_j тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є **статичні, детерміновані, неперервні та лінійні** задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається ***симплексним методом***. Теоретично кожну задачу лінійного програму-

вання можна розв’язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв’язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв’язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв’язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв’язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв’язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, **лінійні економіко-математичні моделі.** Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. ***Задача належить до опуклого програмування*** у тому разі, коли цільова функція ***вгнута***, якщо вона мінімізується, та ***опукла***, якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу (≤) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу (≥) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. ***Квадратичне програмування*** — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Лінійне програмування – напрямок математики, що вивчає методи розв'язання екстремальних задач, які характеризуються лінійною залежністю між змінними і лінійним критерієм оптимальності.

Кілька слів про сам термін лінійне програмування. Він вимагає правильного розуміння. В даному випадку програмування – це, звичайно, не складання програм для ПЕОМ. Програмування тут повинно інтерпретуватися як планування, формування планів, розробка програми дій.

До математичних задач лінійного програмування відносять дослідження конкретних виробничо-господарських ситуацій, які в тому чи іншому вигляді інтерпретуються як завдання про оптимальне використання обмежених ресурсів.

Лінійне програмування – найбільш розроблений і широко застосовуваний розділ математичного програмування (крім того, сюди відносять: цілочисельне, динамічне, нелінійне, параметричне програмування). Це пояснюється наступним:

- математичні моделі великого числа економічних задач лінійні відносно шуканих змінних;
- даний тип задач в даний час найбільш вивчений. Для нього розроблено спеціальні методи, за допомогою яких ці завдання вирішуються, і відповідні програми для ПЕОМ;
- багато задачі лінійного програмування, будучи вирішеними, знайшли широке застосування;
- деякі завдання, які в первісної формулюванні не є лінійними, після низки додаткових обмежень і допущень можуть стати лінійними або можуть бути приведені до такої форми, що їх можна вирішувати методами лінійного програмування.

Загальною задачею лінійного програмування (ЛП) називається задача, що складається у визначенні максимального (мінімального) значення функції.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при умовах

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,k}\right) \quad (1.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = \overline{k+1,m}\right) \quad (k \le m) \quad (1.3) \\ x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,l}\,, \le n\right) \quad (1.4) \end{cases}$$

де a_{ij}, b_i, c_j – задані постійні величини.

Функція (1.1) називається **цільовою функцією (або лінійною формою)** задачі (1.1) - (1.4), умови (1.2) - (1.4) – обмеженнями даної задачі.

Стандартною (або симетричною) задачею лінійного програмування називається задача, що складається у визначенні максимуму функції $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ при виконанні умов (1.2) і (1.4), де $k = m, l = n$, тобто

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{1, m}\right) \\ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right) \end{cases}$$

Канонічною (або основною) задачею ЛП називається задача, що складається у визначенні максимального значення функції $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ при виконанні умов (1.3), (1.4), де $k = 0, l = n$, тобто

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{1, m}\right) \\ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right) \end{cases}$$

Сукупність чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що задовольняє обмеженням (1.2)-(1.4), називається **допустимим розв'язком (або планом).**

План $X^* = (x_1^*, x_2^* \ldots, x_n^*)$, при якому цільова функція (1) приймає своє максимальне (мінімальне) значення, називається **оптимальним.** Значення цільової функції при плані X позначаємо $F(X)$. Отже $F(X) \leq F(X*)$ (для задачі пошуку максимуму цільової функції) або $F(X) \geq F(X*)$ (для задачі пошуку мінімуму цільової функції).

Основна, стандартна і канонічна задачі є **еквівалентними.** Тобто з однієї форми можна шляхом деяких перетворень одержати іншу. І, якщо маємо спосіб розв'язку однієї з задач, то можна знайти оптимальний план інших.

Для того, щоб перейти від однієї форми задачі ЛП до інших, потрібно:

–переходити від задачі пошуку мінімуму до задачі пошуку максимуму;

– переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки;
– заміняти змінні, які не підкоряються умовам невід'ємності.

У випадку, коли потрібно знайти мінімум функції $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна перейти до визначення максимуму функції

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \ldots,$$

оскільки $min(F) = -max(-F)$

Обмеження-нерівності, що мають вид $\leq$, можна перетворити в обмеження-рівності додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Таким чином, обмеження-нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

перетворять в обмеження

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i,$$

де $x_{n+1} \geq 0$.

Для обмежень виду $\geq$ приводять до обмеження-рівності, віднімаючи з його лівої частини додаткову невід'ємну змінну. Обмеження

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

приводять до обмежень

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b,$$

де $x_{n+1} \geq 0$.

Обмеження-рівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

приводяться до системи нерівностей

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n \geq -b_i \end{cases}$$

Кількість додаткових невід'ємних змінних при перетворенні обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей дорівнює числу самих нерівностей.

Математичні моделі ЗЛП включають в себе систему лінійних рівнянь або нерівностей, які є виразом обмежень умов задачі і лінійну функцію, які виражає ціль задачі.

У математичному моделюванні існує **три форми запису моделі**: структурна (математична), розгорнута (числова) і матрична (таблична).

Під **структурною математичною моделлю** розуміють компактну формалізовану запис усіх умов задачі за допомогою символів індексів і інших зазначень. Структурна модель задачі складається з трьох частин: цільова функція, лінійні обмеження та умови невід'ємних змінних.

Розгорнута (числова) модель тобто запевнення конкретним числовим змістом.

Третя форма записи економіко - математичної моделі − **матрична**. Матриця це прямокутна таблиця, в якої в відповідності зі структурною і розгорнутою формами запису моделі міститься уся необхідна інформація для рішення даної задачі. Відмінність матриці від структурної і розгорнутої моделей полягає в тому, що в матриці конкретно и повністю надано значення кожної змінної, кожного обмеження, показується їх сенс.

3.2 Суть симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування

Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування заснований на переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції зростає (за умови, що надана задача має оптимальний план і кожний її опорний план невироджений).

Для розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом її необхідно записати у формі основної задачі.

Нехай необхідно знайти максимальне значення функції

$$.F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max \qquad (1.5)$$

при умовах:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{m+2} = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m \\ x_j \geq 0 j = \overline{1,n} \end{cases} \quad (1.6)$$

Коефіцієнти $a_{ij}, b_j, c_j\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$ - задані постійні числа, $m < n, b_i \geq 0$.

Розглянемо змінні $x_{n+1},\ x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, які мають коефіцієнт 1 і входить до складу тільки одного рівняння.

Визначення. Змінна, яка входить до складу тільки одного рівняння і має коефіцієнт 1 називається **базисною**.

Змінні $x_{n+1},\ x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ є базисними. Інші змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються **вільними**.

Для використання симплекс-методу розв'язання ЗЛП необхідно, щоб кількість базисних змінних дорівнює кількості обмежень.

Для визначення змінних, які є базисними, можна розглянути систему векторів P_j, що складаються з коефіцієнтів a_{ij} у системі обмежень, тобто

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, P_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

Якщо змінна x_k є базисною, то один коефіцієнт – координата вектору P_k дорівнює 1, а інші нулям, тобто

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$ вектор P_k – одиничний вектор.

Розглянемо опорний план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, у якому усі вільні змінні дорівнюють 0, тобто $x_1 = 0, x_2 = 0$ і т.д., $x_n = 0$.

Тоді система обмежень приймає вид

$$\begin{cases} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + \ldots + a_{1n} \cdot 0 + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + \ldots + a_{2n} \cdot 0 + x_{m+2} = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot 0 + a_{m2} \cdot 0 + \ldots + a_{mn} \cdot 0 + x_{m+n} = b_m \\ x_j \geq 0 j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Звідси маємо, що $x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m$. Таким чином, план має вигляд $X = (0,0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Припустимо, $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \left(j = \overline{1, n}\right); \Delta_j = z_j - c_j\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Теорема (ознака оптимальності опорного плану).

1) Опорний план $X * = (x_1 *, x_2 *, \ldots, x_m *, 0, \ldots, 0)$ є оптимальним, якщо $\Delta_j \geq 0$ для кожного $j\left(j = \overline{1, n}\right)$.

2) Якщо $\Delta_k < 0$ для деякого $j = k$ і серед чисел $a_{ik}\left(i = \overline{1, m}\right)$ немає позитивних, то цільова функція не обмежена на множині планів задачі.

3) Якщо опорний план X задачі не вироджений, $\Delta_k < 0$, але серед чисел a_{ik} є позитивні, то існує опорний план X', такий, що $F(X') > F(X)$.

Розв'язок задачі лінійного програмування симплекс-методом включає наступні етапи:

1) Приводимо ЗЛП до канонічного виду.

ЗЛП полягає у визначенні максимального значення цільової функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1.7}$$

при умовах

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_j \geq 0, i = \overline{1, m+n}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Змінні $x_{n+1}, x_{n+2} \dots x_{n+m}$ є базисними, тому що кожна з них входить до складу тільки одного рівняння системи обмежень (1.7) з коефіцієнтом 1. Змінні $x_1, x_2 \dots x_n$ є вільними.

2) Заповнюємо першу симплекс-таблицю.

Таблиця 1.1

Симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	Базис $x_{б_i}$	b_i	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0	θ_i
				x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
1	0	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	
2	0	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
m	0	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	
$m+1$			F_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	0	0	…	0	

Перша симплекс-таблиця заповнюється за наступними правилами:

– у стовпець $c_{б_i}$ записують коефіцієнти при базисних змінних в цільовій функції (1.7), у стовпець $x_{б_i}$– базисні змінні;

– у стовпець b_i записують праві частини системи обмежень (1.8);

– у стовпцях $x_1, x_2 \dots x_{m+n}$ записують коефіцієнти a_{ij} при змінних в системі обмежень (1.8);

– у $(m+1)$ -ому рядку записують значення Δ_j (Δ_j для базисних змінних дорівнюють 0):

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{б_i} a_{ij} - c_j, \ \ (j = \overline{1, m+n}), \ F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{б_i} b_i.$$

3) Опорний план задачі має вигляд

$$X_0 = (x_1, x_2 \dots x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \dots x_{n+m}).$$

Базисні змінні $x_{n+1}, x_{n+2} \dots x_{n+m}$ дорівнюють до відповідних елементів стовпця b_i, вільні змінні $x_1, x_2 \dots x_n$ дорівнюють 0. Таким чином маємо опорний план задачі лінійного програмування $X_0 = (0,0 \dots ,0, b_1, b_2, \dots, b_m)$.

4) Перевіряємо опорний план X_0 на оптимальність.

Якщо в $(m+1)$ -ому рядку (будемо називати його рядком Δ_j) усі значення $\Delta_j \geq 0$, то X_0 є оптимальним планом задачі (1.7), (1.8) і розв'язок задачі отримано. Якщо хоча б одне значення $\Delta_j < 0$, то опорний план X_0 не є оптимальним. Переходимо до наступного пункту алгоритму.

5) Вибираємо напрямний стовпець і напрямний рядок.

Для визначення напрямного стовпця k серед $\Delta_j < 0$ вибираємо максимальне за модулем значення $|\Delta_k| = \max\limits_{\Delta_j<0}|\Delta_j|$, $(j = \overline{1, n+m})$.

Заповнюємо стовпець θ_i. Для $a_{ik} > 0 (i = \overline{1, m})$ знаходимо $\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$. Для $a_{ik} \leq 0$ θ_i не обчислюємо.

Напрямний рядок r вибираємо за мінімальним значенням θ_i:

$$\theta_r = \min_{i=\overline{1,m}} \theta_i.$$

На перетинанні напрямного рядка і напрямного стовпця знаходиться дозвільний елемент a_{rk}.

6) Будуємо наступну симплекс-таблицю.

Перехід до неї здійснюється за такими правилами:

– замість змінної $x_{б_r}$, що відповідає напрямному рядку, у базис вводимо змінну x_k, що відповідає напрямному стовпцеві;

– елементи напрямного рядка поділяємо на напрямний елемент a_{rk}

$$b'_r = b_r / a_{rk} (k = \overline{1, n+m});$$

$$a'_{rj} = a_{rj} / a_{rk} \left(j = \overline{1, n+m}\right);$$

– елементи напрямного стовпця замінюємо нулями, крім дозвільного елемента, що дорівнює 1;

– всі інші елементи перераховуємо за правилом прямокутника:

$$b'_i = b_i - \frac{b_r}{a_{rk}} \cdot a_{ik} \text{ при } i \neq r, j \neq k;$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \cdot a_{ik} \text{ при } i \neq r, j \neq k;$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \cdot \Delta_k, j \neq k;$$

$$F'_0 = F_0 - \frac{b_r}{a_{rk}} \cdot \Delta_к = \sum_{i=1}^{m} c_{б_i} \cdot b'_i.$$

7) Переходимо до п. 3) і 4). Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то отриманий план X є оптимальним. У противному випадку проводимо нові обчислення і будуємо наступну таблицю за відомими правилами.

Цей алгоритм реалізує надбудова **EXCEL** «**Поиск решения**», з якою ми також познайомимося.

Завершуючи знайомство з симплексним методом, розглянемо етапи розв'язку задачі лінійного програмування симплексним методом у вигляді схеми: (рис. 1.2.)

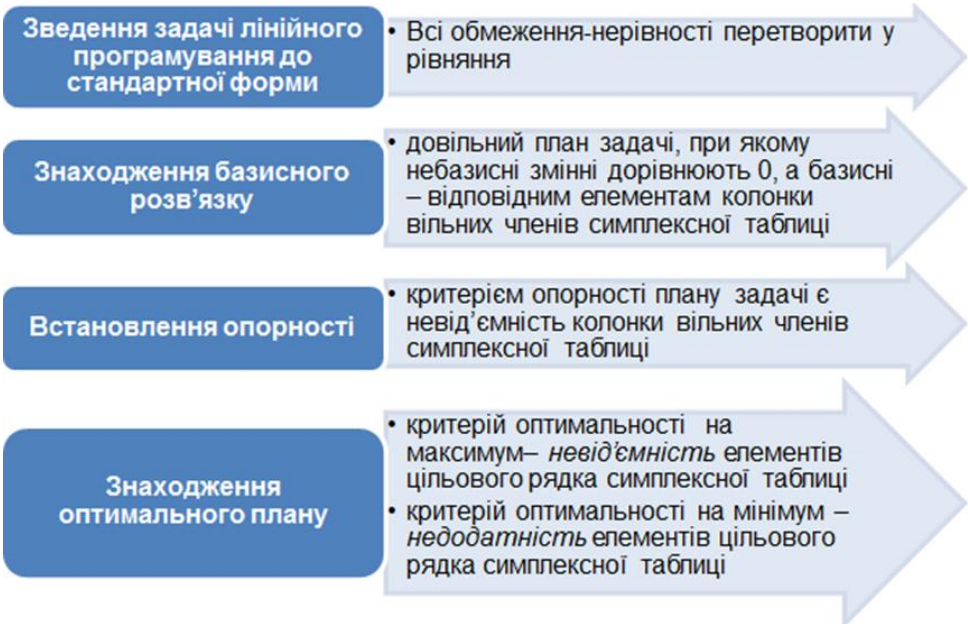

Рис. 1.2. Етапи розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом

Як уже зазначалось, симплексний метод є універсальним методом розв'язування задач лінійного програмування з неперервними аргументами. Проте окремі типи задач лінійного програмування мають такі особливості структури, що дають змогу побудувати значно простіші за симплексний методи розв'язування.

Але, як би зовні ці методи не відрізнялись від симплексного, останній є їх незмінною основою, так що при більш уважному аналізі завжди можна виявити його основні елементи, що дає можливість вважати всі методи розв'язування задач лінійного програмування більш-менш глибокою модифікацією симплексного методу.

Приклад 1.

Для виготовлення трьох видів деталей A, B і C підприємство використовує три різних види сировини $P1$, $P2$ і $P3$. В таблиці 1.2 наведені норми витрат сировини на виробництво однієї деталі кожного виду, величина отриманого прибутку, а також обсяги ресурсів, які можуть бути використані підприємством.

Таблиця 1.2

Витрати сировини, величина прибутку і загальні обсяги ресурсів

Види сировини	Витрати на виробництво 1 деталі			Обсяги ресурсів
	A	B	C	
$P1$	1	2	2	8
$P2$	4	4	0	8
$P3$	1	1	2	10
Прибуток від реалізації 1 деталі (тис. грн.)	3	4	2	-

Знайти план виробництва деталей, при якому прибуток від реалізації буде максимальним.

Розв'язання.

1) Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через x_1 – випуск деталей виду A, через x_2 – випуск деталей виду B, через x_3 – випуск деталей виду C.

Тому що маються обмеження на виділені підприємству ресурси кожного виду, змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти системі нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \end{cases}$$

Прибуток від зробленої продукції складає $3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ тис. грн.

Таким чином, задача полягає у визначенні максимального значення функції $F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ при умовах

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_2 \leq 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного виду.

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 10, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

За економічним змістом базисні змінні x_4, x_5, x_6 - це не використаний обсяг сировини при даному плані виробництва, а саме x_4 – залишок сировини $P1$, x_5 – залишок сировини $P2$, x_6 – залишок сировини $P3$.

2) Складемо першу симплекс-таблицю.

Таблиця 1.3

Перша симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	4	2	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
1	0	x_4	8	1	2	2	1	0	0	4
2	0	x_5	8	4	$\boxed{4}$	0	0	1	0	2
3	0	x_6	10	1	1	2	0	0	1	
Δ_j			0	-3	-4	-2	0	0	0	

У стовпець $x_{б_i}$ виписуємо базисні змінні.

У стовпець $c_{б_i}$ виписуємо коефіцієнти цільової функції F при базисних змінних.

У стовпець b_i виписуємо праві частини рівнянь системи обмежень, а в стовпці $x_1, \dots x_6$ – матрицю системи.

В $(m+1)$ - ому рядку виписуємо значення цільової функції $F_0 = \sum_{i=1}^{3} c_{б_i} \cdot b_i$ і $\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} c_{б_i} \cdot x_{ij} - c_j = -c_j$ для $j = 1,2\dots6$.

Таким чином,

$$F_0 = 0 \cdot 8 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 10 = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 - 3 = -3,\\
&\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 - 4 = -4,\\
&\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 2 = -2,\\
&\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,\\
&\Delta_5 = 0,\\
&\Delta_6 = 0.
\end{aligned}$$

3) Початковий опорний план має вигляд $X_0 = (0; 0; 0; 8; 8; 10)$. Це означає, що підприємство нічого не виробляє, $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\ )$. Уся сировина при цьому залишається не використаною $(x_3 = 8, x_4 = 8, x_5 = 10)$.

Прибуток становить $F(X_0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ (тис. грн.).

4) Перевіримо план на оптимальність. Тому що рядок Δ_j містить негативні елементи, то отриманий план не є оптимальним.

5) Для визначення напрямного стовпця вибираємо максимальний за модулем негативне значення рядка Δ_j. Це $\Delta_2 = -4$. Отже напрямним стовпцем є стовпець x_2.

Для визначення напрямного рядка обчислюємо $\theta_i = \frac{b_i}{a_{i2}}$ (для $a_{i2} > 0$). Тому що $\theta_2 = 2$ є мінімальним серед усіх значень θ_i, то x_5 – напрямний рядок.

6) Складемо другу симплекс-таблицю.

Змінну x_2 вводимо до базису, змінну x_5 виводимо з базису.

Всі елементи напрямного рядка поділяємо на дозвільний елемент. Всі елементи напрямного стовпця заміняємо нулями, а дозвільний елемент – одиницею. Інші елементи таблиці перераховуємо за правилом прямокутника.

Наприклад, $a'_{13} = 2 - \frac{2}{4} \cdot 0 = 2;$

$$a'_{31} = 1 - \frac{4}{4} \cdot 1 = 0 \quad \text{і т.д.}$$

Таблиця 1.4

Друга симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	4	2	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
1	0	x_4	4	-1	0	$\boxed{2}$	1	-1/2	0	2
2	4	x_2	2	1	1	0	0	1/4	0	-
3	0	x_6	8	0	0	2	0	-1/4	1	4
Δ_j			8	1	0	-2	0	1	0	

$X_1 = (0; 2; 0; 4; 0; 8)$. Відповідно до отриманого плану $x_2 = 2$, тобто підприємство виробляє 2 деталі виду B. При цьому залишаються 4 одиниці сировини $P1$ ($x_4 = 4$) і 8 одиниць сировини $P3$ ($x_6 = 8$). Сировина $P2$ витрачена цілком ($x_5 = 0$).

Прибуток підприємства складає $F(X_1) = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 8 = 8$ (тис. грн.). Але $\Delta_3 = -2$, отже отриманий план X_1 не є оптимальним. Напрямним стовпцем у другій симплекс-таблиці є стовпець x_3, а напрямним рядком – рядок x_4.

7) Заповнимо третю симплекс-таблицю.

Таблиця 1.5

Третя симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	4	2	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
1	2	x_3	2	-1/2	0	1	1/2	-1/4	0	
2	4	x_2	2	1	1	0	0	1/4	0	
3	0	x_6	4	1	0	0	-1	1/4	1	
Δ_j			12	0	0	0	1	1/2	0	

План $X_2 = (0; 2; 2; 0; 0; 6)$ є оптимальним, тому що в рядку Δ_j немає негативних значень.

При даному плані випуску продукції прибуток становить $F(X_2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12$ (тис. грн.).

Відповідь. При виготовленні підприємством 2 деталей виду B і 2 деталей виду C буде отримано максимальний прибуток, який дорівнюватиме 12 тис. грн.

Приклад 2.

У сільгосппідприємстві освоєні наступні види діяльності: розведення великої рогатої худоби, а також вирощування озимих зернових, однолітніх і багаторічних трав.

У рік норма внесення органічних добрив на кожен гектар площі, що відводиться під вирощування озимих зернових, однолітніх і багаторічних трав складає відповідно 4, 5 і 1 т. При цьому підприємство використовує власні органічні добрива, вироблені кожною коровою у кількості 7 т на рік.

Вирощування озимих зернових дозволяє одержувати 2 кормові одиниці з кожного гектара, а вирощування однолітніх і багаторічних трав – по 3 кормові одиниці з гектара. При цьому кожна корова споживає 5 кормових одиниць на рік.

Крім того, на вирощування озимих зернових однолітніх і багаторічних трав сільгосппідприємство витрачає відповідно 3,3 і 2 тис. грн. на рік і на розведення корів – 4 тис. грн.

Прибуток сільгосппідприємство одержує від вирощування озимих зернових і розведення корів, що складає відповідно 3 і 5 тис. грн. на рік з кожного гектара.

Знайти план, при якому досягається максимум прибутку, якщо загальний земельний фонд сільгосппідприємства складає 10 га, а запаси матеріально–грошових ресурсів – 30 тис. грн.

Розв'язання

1) Складемо математичну модель задачі.

Нехай сільгосппідприємство відводить x_1 га під вирощування озимих зернових, x_2 га – під вирощування однолітніх трав, x_3 га – під вирощування багаторічних трав. Позначимо через x_4 – загальне поголів'я корів.

Тому що маються обмеження на фонд земельних і матеріальних ресурсів, то справедливі наступні нерівності

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10,$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 30.$$

Тому що сільгосппідприємство використовує власні органічні добрива, то їхні витрати при вирощуванні зернових і трав не повинні перевищувати виробництва органічних добрив великою рогатою худобою, тобто

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 7x_4.$$

Тому що сільгосппідприємство для розведення корів використовує власні кормові ресурси, то їхня загальна кількість не повинна бути менше обсягу їх споживання великою рогатою худобою, тобто

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 5x_4.$$

Прибуток, який одержує сільгосппідприємство при вирощуванні озимих зернових і розведенні корів складає $3x_1 + 5x_4$ тис. грн.

Таким чином, завдання полягає у визначенні максимального значення функції $F = 3x_1 + 5x_4$ при умовах

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 30, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 \leq 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq 0, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного виду

$$F = 3x_1 + 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 10, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 = 30, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 + x_7 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_8 = 0, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Базисні змінні x_5, x_6, x_7, x_8 за своїм економічним змістом означають відповідно залишки земельних, матеріальних і кормових ресурсів, а також органічних добрив.

2) Складемо першу симплекс – таблицю.

Таблиця 1.6

Перша симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_i
1	0	x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	0	–
2	0	x_6	30	3	3	2	4	0	1	0	0	7,5
3	0	x_7	0	4	5	1	–7	0	0	1	0	–
4	0	x_8	0	–2	–3	–3	5	0	0	0	1	0
Δ_j			0	–3	0	0	–5	0	0	0	0	

Початковий опорний план $X_0 = (0; 0; 0; 0; 10; 30; 0; 0)$. Прибуток становить $F(X_0) = 0$ (тис. грн.).

Даний план не є оптимальним, тому що маються негативні значення Δ_j.

Стовпець x_4 є напрямним стовпцем, тому що $\max\limits_{\Delta_j<0}|\Delta_j| = |\Delta_4| = |-5|$, а рядок x_8 є напрямним рядком, тому що $min\,\theta_i = \theta_4 = 0$.

3) Заповнимо другу симплекс-таблицю.

Таблиця 1.7

Друга симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_i
1	0	x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	0	10
2	0	x_6	30	4,6	5,4	4,4	0	0	1	0	–0,8	6,52
3	0	x_7	0	1,2	0,8	–3,2	0	0	0	1	1,4	0
4	5	x_4	0	–0,4	–0,6	–0,6	1	0	0	0	0,2	–
Δ_j			0	–5	–3	–3	0	0	0	0	1	

План $X_1 = (0; 0; 0; 0; 10; 30; 0; 0)$ не є оптимальним, тому що маються негативні значення Δ_j. Прибуток становить $F(X_1) = 0$ (тис. грн.). Напрямним стовпцем є стовпець x_1, а напрямним рядком – рядок x_7.

4) Заповнимо третю симплекс-таблицю.

Таблиця 1.8

Третя симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_i
1	0	x_5	10	0	0,33	3,67	0	1	0	–0,83	–1,17	2,72
2	0	x_6	30	0	2,33	16,67	0	0	1	–3,83	–6,17	1,8
3	3	x_1	0	1	0,67	–2,67	0	0	0	0,83	1,17	–
4	5	x_4	0	0	–0,33	–1,67	1	0	0	0,33	0,67	–
Δ_j			0	0	0,36	–16,36	0	0	0	4,14	6,86	

План $X_2 = (0; 0; 0; 0; 10; 30; 0; 0)$ не є оптимальним, тому що мається негативне значення Δ_j. Прибуток становить $F(X_2) = 0$ (тис. грн). Напрямним стовпцем є стовпець x_3, а напрямним рядком – рядок x_6.

5) Складемо четверту симплекс-таблицю.

Таблиця 1.9

Четверта симплекс-таблиця

i	$c_{б_i}$	базис $x_{б_i}$	b_i	3	0	0	5	0	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0	x_5	3,4	0	–0,18	0	0	1	–0,22	0,01	–0,19
2	0	x_3	1,8	0	0,14	1	0	0	0,06	–0,23	–0,37
3	3	x_1	4,8	1	1,04	0	0	0	0,16	0,22	0,18
4	5	x_4	3	0	–0,1	0	1	0	0,1	–0,05	0,05
Δ_j			29,4	0	2,62	0	0	0	0,98	0,41	0,79

Отриманий план $X_3 = (4{,}8; 0; 1{,}8; 3; 3{,}4; 0; 0; 0)$ є оптимальним. Відповідно прибуток при даному плані складає $F(X_3) = 3 \cdot 4{,}8 + 5 \cdot 3 = 29{,}4$ (тис. грн.)

Відповідь. При вирощуванні озимих зернових на площі 4,8 га і багаторічних трав на площі 1,8 га, а також при розведенні трьох корів, сільгосппідприємством буде отриманий максимальний прибуток, що дорівнює 29,4 тис. грн.