МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Тези доповідей
І Всеукраїнської науково-практичної
Інтернет - конференції
студентів та магістрантів за підсумками наукових досліджень 2014 року
«ПЕРШІ КРОКИ ДО НАУКИ»
Секція «ВИЩА МАТЕМАТИКА ТА ФІЗИКА»

Мелітополь, квітень 2015 р

Програмний комітет

1. **Надикто В.Т.** – проектор ТДАТУ з наукової роботи, д.т.н., професор, член-кореспондент НААН України

2. **Ломейко О.П.** – проректор ТДАТУ з науково-педагогічної роботи, к.т.н., доцент

3. **Величко І.Г.** – завідувач кафедри вищої математики та фізики ТДАТУ, к.ф.-м.н., доцент

4. **Ткаченко І.Г.** – доцент кафедри математичного аналізу ЗНУ, к.ф.-м.н., доцент

5. **Коротун А.В.** – доцент кафедри мікро - та наноелектроніки ЗНТУ, к.ф.-м. н., доцент

Організаційний комітет

1. **Величко О.В.** – доцент кафедри вищої математики та фізики ТДАТУ, к.ф.-м.н., доцент

2. **Кашкарьов А.О.** – голова ради молодих вчених та студентів ТДАТУ, к.т.н., доцент

ЗМІСТ

Антонов С.О., Величко О.В. Експериментальне дослідження ймовірності знаходження системи в заданому стані. …… 6

Балабанова В.В., Ткаченко І.Г. Представлення трансцендентної функції раціональним дробом…… 9

Будченко А.С., Назарова О.П. Розрахунок характеристик силових трансформаторів в пакеті MATHCAD ……. 12

Грабчилева А.И., Рожкова О.П. Вплив вібрації на живі істоти 14

Гуріна В., Рожкова О.П. Рідинні кристали……. 17

Дженжера М. Коротун А.В. Температурна залежність тунельного струму острівцевої металевої плівки…….. 18

Зінченко М., Іщенко О. А. Двомірна випадкова величина, функція розподілу та числові характеристики…….. 21

Кидалов А., Демина Н.А. Числа Фибоначчи и золотое сечение в окружающем мире……. 25

Коновальский А.Р., Бойко С.Б. Розв'язування задач за допомогою графів……. 27

Кравець І., Іщенко О. А. Диференціальне числення функції кількох змінних в розрахунках граничної вартості та витрат……. 28

Кухарев В.О., Вишневецька Л.Є. Прості числа і магічні квадрати 31

Мягков П.І., Бойко С.Б. Лишки та кодування повідомлень……. 33

Островська В., Тітова Н.І. Амплітудно-частотні характеристики акустичних хвиль, які взаємодіють з метановмісними порожнинами... 35

Пилипенко О., Коротун А.В. Деградація електрофізичних параметрів резонансно-тунельних діодів…….. 39

Піхтарь О.В., Назарова О.П. Розрахунок характеристик систем опалення для теплиць запорізької області……. 43

Подрєзов В.І., Міфле-Чередниченко С.А. Побудова диференціальних моделей та їх розв'язків при розв'язуванні деяких задач механіки……. 46

Селевич А.О., Міфле-Чередниченко С.А. Застосування математичного апарату теорії диференціальних рівнянь для опису та прогнозування електричних процесів……. 48

Тішков М., Іщенко О.А. Замкнена модель СМО. Задача найкращої організації обслуговування…….. 50

Федькін В.А., Яценко В.В., Морозов М.В. Лазерна доплерівська інтерферометрія вимірювання параметрів частинок у розчинах …….. 53

Шепель М.О., Бойко С.Б., Зв'язок математики з музикою……. 55

Шпіталь К.О. Величко І.Г. Застосування методу тригонометричних сум для розв'язання комбінаторних задач……. 57

Штефан Д.І, Білоус С.Ю. Пробірка проти сили тяжіння…….. 58

Щербаков Д, Тітов І.М. Математична модель теплових процесів в катодному емітері, що має форму зрізаного конуса…… 61

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ЗНАХОДЖЕННЯ СИСТЕМИ В ЗАДАНОМУ СТАНІ

Антонов С.О. 21 СКН
Величко О.В. к.ф.-м.н., доц.
Таврійський державний агротехнологічний університет

В роботі описано імітаційну модель, яка реалізує процес переходи системи із одного стану в інший при трьох можливих станах. Система складається з двох кошиків і чотирьох куль двох білих та двох чорних. В кожному із кошиків знаходяться дві кулі. В кожному із кошиків випадковим чином вибирається одна із куль, і ці дві кулі міняються місцями. Цей процес повторюється достатньо велику кількість раз. Потрібно знайти ймовірність того, що після цього в кошиках будить знаходитися певна комбінація куль.

Основна частина. Для аналізу роботи СМО, яка описує процес перекладання куль,побудовано граф станів системи (рис 1). Під станом 1 розуміється стан, коли в лівому кошику знаходяться дві білі кулі, а у правому – дві чорні. Під станом 2 розуміється стан, коли в обох кошиках знаходяться по білій та чорній кулях. Під станом 3 розуміється стан, коли в лівому кошику знаходяться дві чорні кулі, а у правому – дві білі.

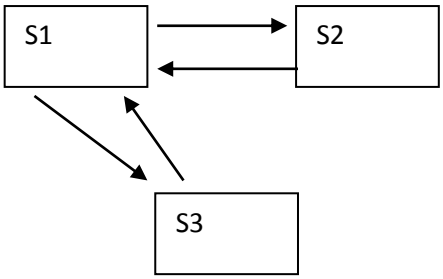


Рис.1. Граф станів системи

Значення ймовірностей

$$\lambda_{11}=\lambda_{13}=\lambda_{31}=\lambda_{33}=0,\ \lambda_{21}=\lambda_{23}=0.25,\ \lambda_{22}=0.5 \qquad (1)$$

були визначені із розв'язання відповідних задач теорії ймовірностей.

Перехід системи із стану 1 в стан 1 неможливий, оскільки якщо в лівому кошику знаходилось дві білі кульки, то після перекладання в ньому обов'язково опиниться чорна куля із правого кошику. Отже $\lambda_{11}=0$. Перехід із стану 1 в стан 3 також неможливий, оскільки за одне перекладання неможна змінити відразу колір двох куль в кошику. Отже $\lambda_{13}=0$. Із стану 1 система обов'язково переходить в стан 2, отже $\lambda_{12}=1$. Аналогічно отримуємо, що $\lambda_{31}=\lambda_{33}=0$, $\lambda_{32}=1$.

Перехід від стану 2 в стан 1 здійсниться в тому випадку, коли в першому кошику оберуть чорну кулю (ймовірність цього 0.5), а в другому – білу (ймовірність цього також 0.5). В силу незалежності подій матимемо, що $\lambda_{21}=0.5\cdot 0.5=0.25$. Аналогічно $\lambda_{23}=0.25$ і $\lambda_{22}=1-\lambda_{21}-\lambda_{23}=0.5$

Система рівнянь Ерланга для визначення граничних ймовірностей записується наступним чином:

$$\begin{cases} p_0 \cdot \lambda_{01} = p_1 \cdot \lambda_{10} \\ p_1(\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12}) = p_0\lambda_{01} + p_1\lambda_{11} + p_2\lambda_{21} \\ p_2 \cdot \lambda_{21} = p_1 \cdot \lambda_{12} \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок, з урахуванням (1), має вигляд

$$p_0 = p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{2}{3}.$$

Це означає, що якщо перекладання куль здійснюється через один і той же час, то в лівому кошику близько 17% часу будить знаходитися дві білі кулі, близько 17% часу будить знаходитися дві чорні кулі і близько 66% часу будить знаходитися одна біла і одна чорна куля.

Для перевірки цього теоретичного висновку на мові Delphi було розроблено програмний продукт, який здійснював імітаційне моделювання розглянутого процесу.

На рис.2 зображено графік, який відображає кількість перебувань системи в кожному із станіву випадку 3 експериментів по 3000 ітерацій.

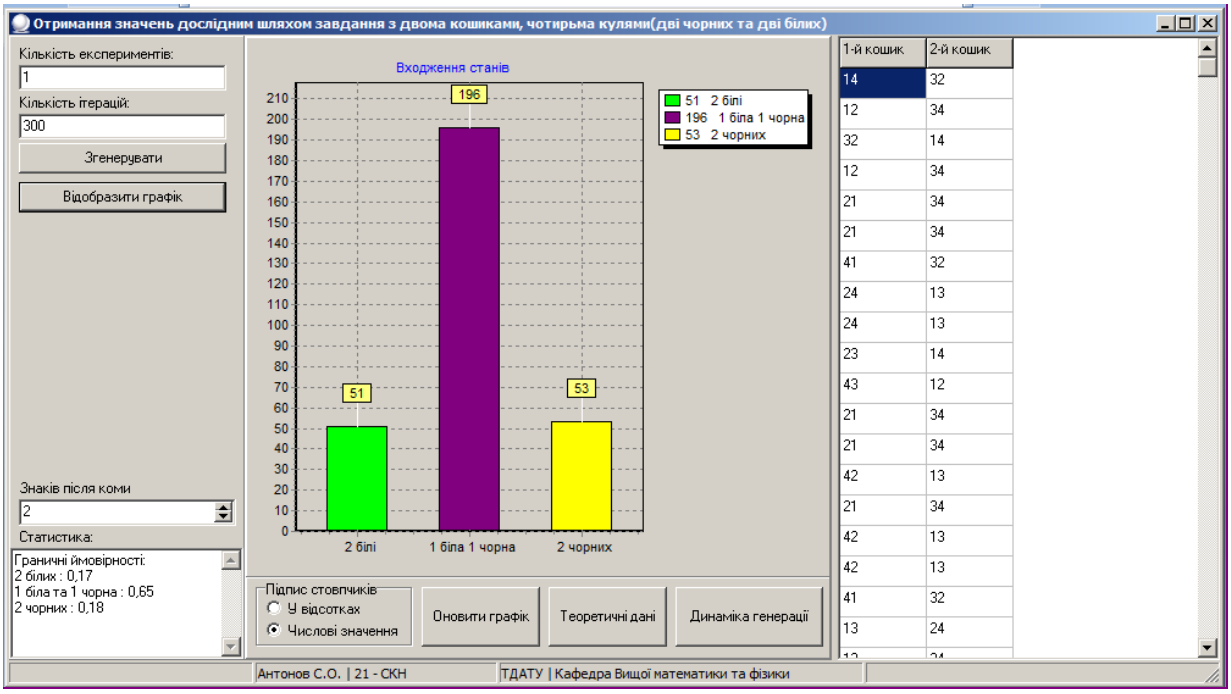


Рис.2. Кількість перебувань системи в кожному із станів.

На рис. 3. наведений графік, який показує, як відхиляється час знаходження системи в кожному із станів, обчислений за допомогою імітаційної моделі, від теоретичного значення із збільшення кількості перекладань куль.

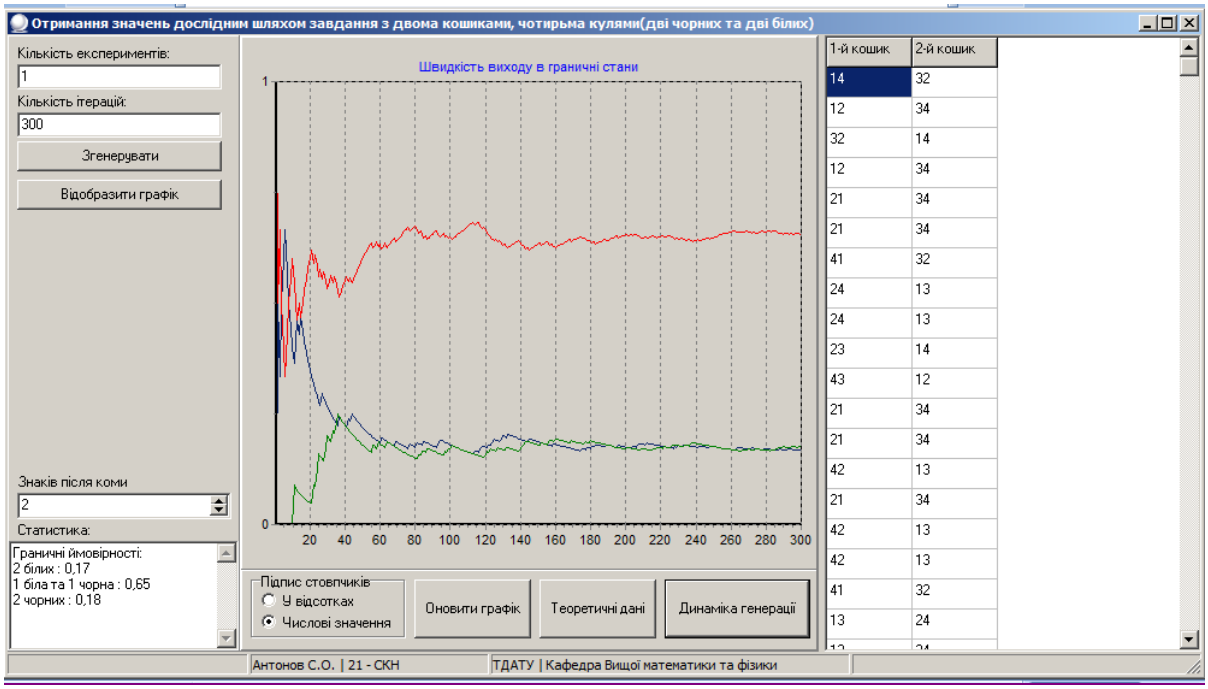


Рис 3. – Графік швидкості виходу в граничні стани

Результати моделювання підтвердили теоретичний висновок, що при збільшенні кількості перекладань куль середній час знаходження системи в кожному із станів прагне до теоретично обчисленої границі.

Висновки. В роботі розглянуто систему, яка може знаходитися в одному із трьох станів і випадковим чином переходити від одного стану в інший. Аналіз, проведений в статті, підтверджує висновок, що при достатньо великій кількості переходів дійсна та очікувана кількість знаходжень системи в кожному із станів порівняно мало відрізняються одна від одної. Це підтверджує вірогідність результатів роботи розробленого програмного продукту, а, отже, його можна адаптувати для більш складних практичних задач.

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНОЇ ФУНКЦІЇ РАЦІОНАЛЬНИМ ДРОБОМ

Балабанова В.В., 2 курс **balabanova23lera@mail.ru**
Ткаченко І.Г.к. ф.-м.н., доц. **tig81@mail.ru**
Запорізький національний університет

Багато процесів, що зустрічаються у реальному житті, використовують різного роду математичні моделі, у тому числі й диференціальні рівняння. Деякі з таких рівнянь можна розв'язати аналітично за допомогою відомих методів [3], але здебільшого потрібно застосовувати чисельні методи [1, 2]. Одним з таких методів отримання наближених розв'язків є метод ланцюгових дробів [5]. Його застосування до задачі Коші наведено у [4], де наближення до точного розв'язку отримані у вигляді апроксимацій Паде.

У представленій роботі описано алгоритм побудови функціонального ланцюгового дробу для функції $y=\sin x$.

Розглянемо задачу Коші

$$y''+y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1, \tag{1}$$

розв'язком якої є функція $y=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$. Запишемо рівняння (1) у вигляді системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y'=z, \\ z'+y=0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y'-z=0, \\ z'+y=0, \end{cases} \tag{2}$$

з початковими умовами $y(0)=0, z(0)=1$. Розкладемо ліві частин $f_1=y'-z$ та $f_2=z'+y$ рівнянь системи (2) в ряди Маклорена:

$$f_1=y'(0)-z(0)+\ldots;\ f_2=[z'(0)+y(0)]+[z''(0)+y'(0)]x+\ldots.$$

З урахування початкових умов маємо:

$$f_1=y'(0)-1.$$

Так як функції f_1 та f_2 мають бути нескінченно малими функціями в околі точки $x=0$, то

$$y'(0)-1=0\Rightarrow y'(0)=1.$$

Тоді для $f_2=[z'(0)+y(0)]+[z''(0)+y'(0)]x+\ldots$:

$$z'(0)+y(0)=0\Rightarrow z'(0)=0,$$
$$z''(0)+y'(0)=0\Rightarrow z''(0)=-1.$$

Отже, маємо перші наближення

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x=x,\ z(x)=z(0)+\frac{z'(0)}{1!}x++\frac{z''(0)}{2!}x^2=1-\frac{x^2}{2}.$$

Запишемо представлення для наступної ітерації:

$$y(x)=\frac{x}{1+y_1(x)},\ z(x)=1-\frac{\frac{x^2}{2}}{1+z_1(x)}, \tag{3}$$

в яких нові невідомі функції $y_1(x), z_1(x)$ задовольняють нульовим початковим умовам $y_1(0)=0, z_1(0)=0$. Підставляємо вирази (5) в систему (2):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+y_1}-\dfrac{xy_1'}{(1+y_1)^2}-1+\dfrac{x^2}{2(1+z_1)}=0, \\ -\dfrac{x}{1+z_1}+\dfrac{x^2z_1'}{2(1+z_1)^2}+\dfrac{x}{1+y_1}=0. \end{cases}$$

Ліві частини f_1^1 та f_2^1 відповідно отриманих рівностей розкладаємо в ряди Маклорена до першого ненульового доданку:

$$f_1^1=4y_1'(0)x+\left[3y_1''(0)+2y_1'^2(0)-1+4y_1'(0)z_1'(0)\right]x^2,$$
$$f_2^1=[2y_1'(0)-3z_1'(0)]x^2+\left[y_1''(0)+y_1'(0)z_1'(0)-2z_1''(0)-2z_1'^2(0)\right]x^3.$$

Враховуючи початкові умови та той факт, що функції повинні бути нескінченно малими в околі початку координат, отримаємо:

$$y_1'(0)=0,\ y_1''(0)=\frac{1}{3},\ z_1'(0)=0,\ z_1''(0)=\frac{1}{6}.$$

Тобто

$$y_1(x)=\frac{x^2}{6},\ z_1(x)=\frac{x^2}{12}$$

А тоді другі наближення $y(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{x^2}{6}}=\dfrac{6x}{6+x^2}=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{36}+o\left(x^5\right),$

$$z(x)=1-\frac{\dfrac{x^2}{2}}{1+\dfrac{x^2}{12}}.$$

Продовжуючи запропонований алгоритм і надалі, можна отримати розвинення функції $y=\sin x$ з більшою точністю. Зауважимо, що отримані наближення є апроксимаціями Паде цієї функції.

Побудуємо графіки точного розв'язку рівняння (1) $y(x)=\sin x$ та його

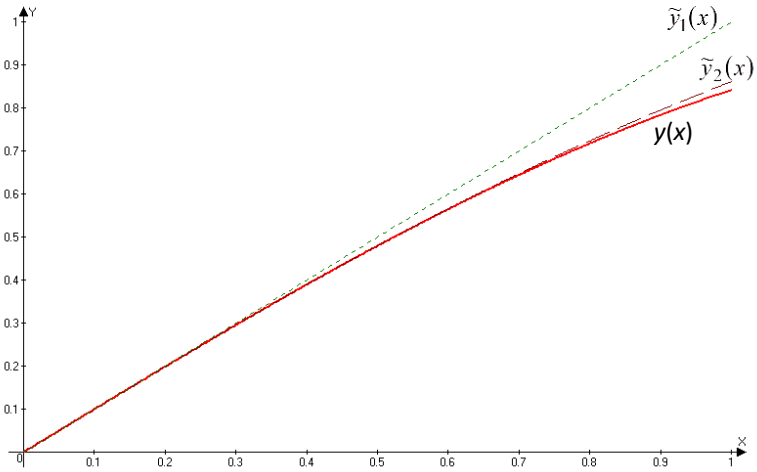


Рисунок 1 – Графіки точного розв'язку диференціального рівняння (1) та його перших двох наближень

двох наближень $\tilde{y}_1(x) = x$, $\tilde{y}_2(x) = \dfrac{x}{1+\dfrac{x^2}{6}} = \dfrac{6x}{6+x^2}$ на відрізку $[0;1]$ (рис. 1).

Як видно з рисунка, уже друге наближення $\tilde{y}_2(x) = \dfrac{x}{1+\dfrac{x^2}{6}} = \dfrac{6x}{6+x^2}$ дає непогану точність.

У роботі показано застосування метода ланцюгових функціональних дробів до знаходження раціонального представлення функції $y = \sin x$, яка є розв'язком диференціального рівняння другого порядку. Раніше цей метод застосовувався лише до рівнянь першого порядку.

Список використаних джерел.

1. Липанов А.М. Неявный метод численного решения дифференциальных уравнений [Текст] / А.М. Липанов, С.А. Карсканов // Мат. моделирование. – 2013. – Т. 25. – № 3. – С.25-32.

2. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений [Текст] / В.Э. Милн. – М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1955. – 290 с.

3. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи [Текст] / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

4. Ткаченко И.Г. Аппроксимации Паде решений задач Коши [Электронный ресурс] / И.Г. Ткаченко, В.В. Балабанова. – Суми: СумДУ, 2014. (Режим доступа http://elitconf.sumdu.edu.ua/data/IMA-2014.pdf).

5. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа [Текст] / А.Н. Хованский. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 204 с.

РОЗРАХУНОК ХАРАКТЕРИСТИК СИЛОВИХ ТРАНСФОРМАТОРІВ В ПАКЕТІ MATHCAD

Будченко А.С., студент 22 МБЕН ,
Назарова О.П., к.т.н., доцент
Таврійський державний агротехнологічний університет

Постановка проблеми. Одним з головних завдань експлуатації трансформаторів є контроль режиму їх роботи. Цей контроль здійснюється шляхом перевірки навантаження трансформатора, напруги на обмотках, температури масла і інших параметрів. На підстанціях з постійним чергуванням персоналу контроль здійснюється з періодичністю 1... 2 години з фіксацією параметрів режиму в добовій відомості.

Основні матеріали дослідження. В науковій роботі в пакеті MathCad автоматизовано розрахунок характеристик, визначено номінальні струми та напруги первинної і вторинної обмоток силових трансформаторів 10/0,4 кВ. На підстанціях без постійного чергування персоналу контроль режиму трансформаторів здійснюється при кожному відвідуванні підстанції оперативним персоналом, але не рідше 1 разу на місяць.

Силові трансформатори можуть працювати в різних режимах, які характеризуються навантаженням, напругою, умовами навколишнього середовища та іншими факторами.

При навантаженні, що не перевищує номінальну, допускається тривала робота трансформатора при підвищенні напруги на будь-якому відгалуженні будь обмотки на 10% понад номінальної напруги даного відгалуження.

При паралельній роботі трансформаторів і змінному графіку їх сумарного навантаження можлива оптимізація кількості працюючих трансформаторів протягом доби. Критерій оптимальності - мінімум втрат активної потужності.

В роботі в пакеті MathCad автоматизовано розрахунок характеристик, номінальні струми та напруги первинної і вторинної обмоток силових трансформаторів 10/0,4 кВ. Розраховано залежність змінювання вторинної напруги трансформатора від характеру навантаження.

Проведено розрахунки зовнішньої характеристики трансформатора при активно-індуктивному навантаженні і ємнісному навантаженні. Розраховані залежності ккд трансформатора від величини навантаження при різних значеннях cos φ2 .

Визначено економічне навантаження при якому втрати потужності будуть мінімальними. Визначено повні втрати енергії за рік в період експлуатації двох силових трансформаторів, які встановлено на ТП 10/0,4 кВ

Висновки. Розраховано залежність змінювання вторинної напруги трансформатора від характеру навантаження і визначено, що при активному навантаження змінювання напруги дорівнює 1,144% U2.

Встановлено, що характеристика представляє собою пряму лінію, яка при активно-індуктивному навантаженні має слабо падаючий характер, (при ємнісному навантаженні збільшується).

Трансформатор досягає найбільшого ККД у роботі при навантаження рівному βмакс = 0,429. Визначено економічне навантаження при якому втрати потужності будуть мінімальними. Визначено повні втрати енергії за рік в період експлуатації двох силових трансформаторів,які встановлено на ТП 10/0,4 кВ

При забезпеченні максимального навантаження найменші втрати активної і реактивної потужності будуть при паралельній роботі;

Під час роздільної роботи трансформаторів на те ж навантаження втрати активної і реактивної потужності будуть більші, відповідно, на 37,33% і 0,068%.

Література

1. Вольдек А.И. Электрические машины. - Л., Энергия, 1974. - 818 с.

2. Ермолаев С.А., Масюткин Е.П., Яковлев В.Ф. Эксплуатация энергооорудования в сельском хозяйстве / под ред. С.А. Ермолаева.: Фирма «Инкоос», 2005.-670с.

3. Єрмолаєв С.О., Мунтян В.О., Яковлєв В.Ф. Експлуатація енергообладнання та засобів автоматизації в системі АПК: Підручник/За ред.. С.О. Єрмолаєва. - К.: Мета, 2003. - 543 с.

4. Правила будови електроустановок електрообладнання спеціальних установок. - К.: Основа, 2001. - 121с.

5. Єрмолаєв С.О., Яковлєв В.Ф. Експлуатація і ремонт електрообладнання та засобів автоматизації / за ред. проф. С.О. Єрмолаєва. - К.: Урожай, 1996, 336 с.

ВПЛИВ ВІБРАЦІЇ НА ЖИВІ ІСТОТИ

Грабчилева А.И., студентка 11Аг
Рожкова О.П., ст.викладач
Таврійський державний агротехнологічний університет

Місце, де живуть, називається будинком. Будинком для людини зазвичай служать квартири у будівлях.

Природа - будинок для диких тварин. Для птахів, звірів і комах, змій і черв'яків. Вони знаходяться на природі постійно - вони постійно удома.

Але по відношенню до диких тварин людина дозволяє собі усе. Без попиту приходить до них у будинок, зве тисячі гостей, встановлює апаратуру і влаштовує концерти. Люди називають це по-різному - фестивалями просто неба, концертами в живописних місцях і так далі. Забуваючи при цьому, що природа - чийсь будинок.

Звук і коливання

Що таке звук? Згадаємо про фізичне явище - коливання. Коливання - це зміни деякого стану, що повторюються. Наприклад, коливається маятник - його вантажень здійснює рухи від крайньої лівої точки до крайньої правої і потім зворотним ходом повертається у вихідну ліву точку. Рухи ці повторюються - значить, ми говоримо про коливання маятника.

І так 440 разів в секунду стан повітря коливатиметься - розріджені місця стають ущільненими, а ущільнені розрідженими, поперемінно.

Коливання передаються в різних середовищах - у воді, повітрі. Коливання щільності повітря і є звук. У коливанні є не лише частота, але і розмах - амплітуда. Амплітуда - це найбільше відхилення від точки рівноваги. Наприклад, чим вище піднімається важіль маятника або чим сильніше коливається повітряне середовище, тим більше амплітуда. Чим більше амплітуда, тим голосніше чутний звук і на більшу відстань він передається.

Гучність

Ось тут ми переходимо до важливої теми гучність. Взагалі теоретично науково для позначення гучності використовують такі одиниці, як "сон" (точне числове значення) і "фон" (один з рівнів гучності).

На практиці гучність змішують з таким поняттям, як звуковий тиск (sound pressure) - його-то і заміряють прилади-фонометри і видають результат в децибелах.

Кажан уловлює звук власного писку, відбитий від нитки, натягнутої через поле. Кішка чує звичайну мишу за 500 метрів. Дощові черв'яки (позбавлені звичних нам вух, але уловлюють вібрацію тілом) відчувають підземні рухи кротів.

Ви коли-небудь замислювалися, чому цих черв'яків називають дощовими? Під час дощу і небагато після нього вони виповзають на

поверхню. Вібрація грунту від крапель, що падають, буквально приголомшує черв'яків, примушує панічно бігти з нір.

Ви ставили собі питання - що відчувають дощові черв'яки, коли на полі, під яким вони живуть, споруджують сцену і закочують концерт з гучністю під 130 і більше децибел? Додамо до цього неминучі низькочастотні (про них трохи пізніше) вібрації грунту - від музики і від тупоту ніг.

А любителі голосно слухати музику у будинку, включаючи на повну котушку акустичні системи з сабвуферами, часто виявляють, що помирає риба в акваріумах.

Не витримує не лише живе. Від гітарного комбика (підсилювач + гучномовець в одному корпусі) на 60 Ватів вилітає скло у вікнах. Що говорити про концертну апаратуру потужністю більше тисячі Ватів?

За законами акустики, якщо однаковий сигнал виходить з двох однакових гучномовців, що стоять поряд, то сприйманий рівень сигналу зростає в два рази - або, виражаючись в децибелах, на 6 дБ. Чим більше гучномовців в масиві - тим голосніше звук, тим сильніше звуковий тиск.

Чим далі розвивається цивілізація людей, тим більше шуму чинить людина. Городянин вже так звик до постійного шуму від автомобілів, що сприймає його як нормальний фон. Транспорт, гучна музика в нім і в навушниках, на дискотеках і концертах привели до того, що слух людини суб'єктивно погіршав. Люди звикають усе до гучніших звуків.

Отже, від року до року RMS підвищується. З масової музики зникають тонкощі, зникають тихі звуки, залишаються тільки гучні і дуже гучні. За допомогою спеціальних пристроїв і програм RMS підтягують до можливого максимуму, намагаючись "перекричати" інші альбоми і пісні.

Звукові норми

Те, що одні роблять музику голосніше, відтворюють її голосно і хочуть слухати її на межі больового порогу, не означає, що інші не намагаються цю справу якось обмежити. У деяких країнах проведення заходів на відкритому повітрі оточили "звуковими нормами".

Між тим в Євросоюзі зараз дуже строго стежать за гучністю, за так званим шумовим забрудненням (noise polloution). Наприклад в Англії, якщо на робочому місці рівень шуму перевищує 85 дБ, працедавець зобов'язаний забезпечити працівників захистом для вух. При рівні шуму 90 дБ, співробітники ЗОБОВ'ЯЗАНІ використовувати затички, а працедавець - понизити рівень шуму. Чому мобільні плейєри і телефони стали раптом відносно тихими при прослуховуванні музики через навушники? Тому, що вступило в дію законодавство по обмеженню рівня звуку.

Наш кровообіг само по собі - коливальна система, і якщо вона увійде до резонансу з інфразвуком, станеться розрив артерій, а якщо фаза інфразвуку зворотна до коливань крові, то кровообіг почне гальмуватися і серце зупиниться.

Улюблені екологами "вітряки" - вітряні електрогенератори - також потужне джерело інфразвуку, який виникає при обертанні лопатей. Власне, завдяки лопатям шкода інфразвуку була виявлена ще в 60-тих роках, коли вентиляційна система одного із заводів у Франції ледь не знищила працівників довколишньої лабораторії, а самі робітники заводу почали сліпнути.

Дистрофічні зміни - це ушкодження клітин і міжклітинної речовини. Руховий розлад, схожий із заціпенінням, - кататонічний ступор. У науковій медицині є така справа - експериментальна кататонія. Собаці або щурові вводять аміназин і дивляться, що вийде. Приблизно у той же стан впадали співробітники Гавро і сотні тисяч демонстрантів, проти яких використовувалася акустична зброя.

Вібрації

Вібрації - не звук, а коливання твердих порід. Вібрує грунт. Тіло тварини може почати вібрувати під впливом як звукових хвиль, так і вібрації грунту. На записі великих концертів, записуючі системи встановлюють частенько метрах в 30 і більше від сцени, у фургонах - щоб понизити вібрацію, до якої чутливі записуючі голівки, а також жорсткі диски цих систем. Крім того, вібрації на гучних концертах чинять вплив навіть на камери - частенько операторам технічно не вдається зробити наплив. Оператори і фотографи на концертах, щоб зробити нормальні кадри, частенько вимушені використовувати такі подушечки особливої конструкції, що гасять вібрації - подушечки підкладають під ніжки штатива.

Вилуплення курчат сповільнюється, якщо застосовувати до яєць звук частотою до 60 до 500 герц. Не лише окремі особини, але навіть окремі клітини схильні до впливу звуку.

Зате як весело на фестивалях на лоні природи! Кому яка справа до життя полівок, до кротів і коників, до птахів, до витоптаної ногами і наметами трави. Можна нарвати квітів, забравши чийсь пилок, і прикрасити себе вінком, щоб потім викинути його. Можна танцювати до упаду, не замислюючись про те, що під землею корчиться і виходить кров'ю миша. Танцюють і веселяться цілком милі, добрі люди. Це не адже середньовічні солдати, які, узявши вороже місто, в запалі веселощів вбивали і насилували місцевих жителів. Але солдати теж не думали, що комусь погано. Вони просто веселилися. Нормально. Але те була ще і війна, а фестивалі з концертами серед лугів і лісів, та ще іноді з екологічними гаслами - яка вже війна. Ми прийшли із миром.

РІДИННІ КРИСТАЛИ

Гуріна В., студентка 11ХТІ .
Рожкова О.П., ст.. викладач
Таврійський державний агротехнологічний університет

Рідинно-кристалічним (мезоморфним) складом речовини називають такий склад, властивостями якого є проміжок між властивостями твердого кристала і рідини. Згідно законам термодинаміки, агрегатні стани речовини поділяються на три вида: тверде, рідке і газоподібне. Деякі органічні матеріали переходять з твердого стану в рідину, при цьому відбувається поява нової фази, яку называють рідинно-кристалічним складом речовини (рідинним кристалом).

Вперше появу нової, незвичної фази було помічено австрійським ботаніком Рейнитцером в 1888, коли він визначав властивості отриманої ним нової органічної речовини. Ця речовина плавиться в дві стадії: спочатку утворюється мутний розплав, а подальше підвищення температури перетворює цей розплав в прозору рідину. При дослідженні оптичних властивостей цієї речовини було помічено, що при нагріванні воно переходить з кристалічої фази в рідину через проміжуточну форму з анізотропними оптичними властивостями. Інтервал цього перехода достатньо великий і складає 34°С.

Будова Рідкі кристали утворюються з молекул, які мають різну геометричну форму (частіше всього – подовжених або дископодібних). Електричними міжмолекулярними силами визначається характер «упаковки» молекул, тобто те, як вони геометрично співвідносяться друг з другом.

Переваги та недоліки застосування рідинних кристалів в екранах

Рідинні кристали – субстанція достатньо «неповоротлива». Тому, після подачі або зміни напруги на електродах, проходить певний час, перш ніж рідинні кристали займуть нове положення. Ще один недолік пов´язан з тим, що світло проходить через два поляризатора – після цього кут комфортного обзору у рідинно-кристалічних екранів малий. Поглянувши на екран під маленьким кутом (сильно відхилившись від нормалі до екрану), помітно падіння яркості і контрастності зображення.

Також, в силу своєї неідеальності, не дають достатню контрастність кольори, бо, включений піксель все одно пропускає деяку невелику кількість світла від лампи підсвітки. Тому не вдається досягти дійсно глибокого чорного. А от яркість рідинно-кристалічних екранів велика.

Більш того, при яркій зовнішній засвітці рідинно-кристалічні екрани забеспечують як велику яркість, так і велику контрастність зображення.

ТЕМПЕРАТУРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ТУНЕЛЬНОГО СТРУМУ ОСТРІВЦЕВОЇ МЕТАЛЕВОЇ ПЛІВКИ

Дженжера Максим, магістр e-mail: jenjeramaks@yandex.ru
Коротун Андрій Віталійович, к. ф.-м. н., доцент кафедри мікро- та наноелектроніки e-mail: andko@zntu.edu.ua
Запорізький національний технічний університет

Вступ. Інтерес до вивчення розмірних ефектів у електропровідності острівцевих наноплівок зумовлений технічними задачами мініатюризації пристроїв мікро-, опто- і терагерцової електроніки [1-3]. Електропровідність таких плівок характеризується низкою закономірностей, що суттєво відрізняються від суцільних плівок: нелінійність вольт-амперної характеристики, від'ємний температурний коефіцієнт опору (ТКО), значна тензочутливість [4].

Отже, метою даної роботи є дослідження температурної залежності електропровідності острівцевих плівок.

Постановка задачі та основні співвідношення.

Розглянемо проходження тунельного струму через вакуумний проміжок між двома металевими острівцями за таких припущень [5]:

- форма бар'єру трапецеїдальна, тобто нехтуватимемо силами електричного зображення;
- електричне поле у вакуумному проміжку вважатимемо однорідним;
- функцію Фермі – Дірака розраховуватимемо за $T = 0$ K.

На основі цих припущень, вольт-амперні характеристики тунельного струму можна представити у вигляді:

$$j = \begin{cases} -\dfrac{e^2\sqrt{2m^*\phi}}{4\pi^2\hbar^2 b} U \mathrm{e}^{-\frac{2b}{\hbar}\sqrt{2m^*\phi}}, & eU \ll \phi; \\ \dfrac{3e}{8\pi^2 b\hbar}\left\{\left(\phi - \dfrac{eU}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2b\sqrt{2m^*}}{\hbar}\sqrt{\phi-\frac{eU}{2}}} - \left(\phi + \dfrac{eU}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2b\sqrt{2m^*}}{\hbar}\sqrt{\phi+\frac{eU}{2}}}\right\}, & eU < \phi; \\ \dfrac{3e\phi}{16\pi^2 b\hbar}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{2b\sqrt{m^*\phi}}{\hbar}} - 3\mathrm{e}^{-\frac{2b\sqrt{3m^*\phi}}{\hbar}}\right\} + \dfrac{e^3U^2}{16\pi^2\hbar b^2\phi}\mathrm{e}^{-\frac{4b}{3\hbar eU}\sqrt{2m^*\phi^3}}, & eU > \phi; \\ -\dfrac{e^3U^2}{16\pi^2\hbar b^2\phi}\mathrm{e}^{-\frac{4b}{3\hbar eU}\sqrt{2m^*\phi^3}}, & eU > \phi + \varepsilon_\mathrm{F}, \end{cases} \quad (1)$$

де ϕ - висота потенціального бар'єра, яка дорівнює термодинамічній роботі виходу електрона з метала у вакуум; b – ширина бар'єру; ε_F - енергія Фермі.

З наведених рівнянь видно, що вже при значеннях напруги $eU < \phi$ лінійність вольт-амперних характеристик втрачається.

Врахування сил електростатичного зображення в параболічному наближенні призводить до виразів, де спостерігається лінійна залежність тунельного струму від напруги в області малих напруг. В області високих напруг лінійність характеристики втрачається.

Вплив температури на величину тунельного струму можна врахувати за допомогою виразу:

$$\frac{j(U,T)}{j(U,0)} = \frac{\pi B_T k_B T}{\sin \pi B_T k_B T}, \qquad (2)$$

де $B_T \equiv \frac{2b}{\hbar}\sqrt{2m^*}$, а $j(U,0)$ для відповідного діапазону напруг визначається співвідношеннями (1).

Врахування діелектричних властивостей підкладки призводить до наступних виразів для густини струму:

$$j(U,T) = \frac{8\pi m^* e}{h^3 B^2} \operatorname{sh}\left(\frac{eU}{k_B T}\right) \cdot \begin{cases} \dfrac{\pi B_T k_B T}{\sin \pi B_T k_B T} e^{A\sqrt{\phi}} e^{-\frac{E_a}{k_B T}}, & E_a > k_B T; \\ \dfrac{(\pi B_T k_B T)^2}{\sin \pi B_T k_B T} e^{-A\sqrt{\phi}} e^{\frac{k_B T}{E_a}}, & E_a < k_B T. \end{cases} \qquad (3)$$

де введені позначення: $A \equiv \frac{\sqrt{8m^*}}{\hbar}$; $B \equiv \frac{A}{\sqrt{\phi}}$.

За наявності підкладки величина тунельного струму зростає, оскільки висота потенціального бар'єру менша за термодинамічну роботу виходу на величину електронної спорідненості. Крім того прозорість потенціального бар'єру ще більше зростає, якщо на поверхні підкладки є вільні йони лужних металів, що утворюють поверхневі електронні стани в підкладці.

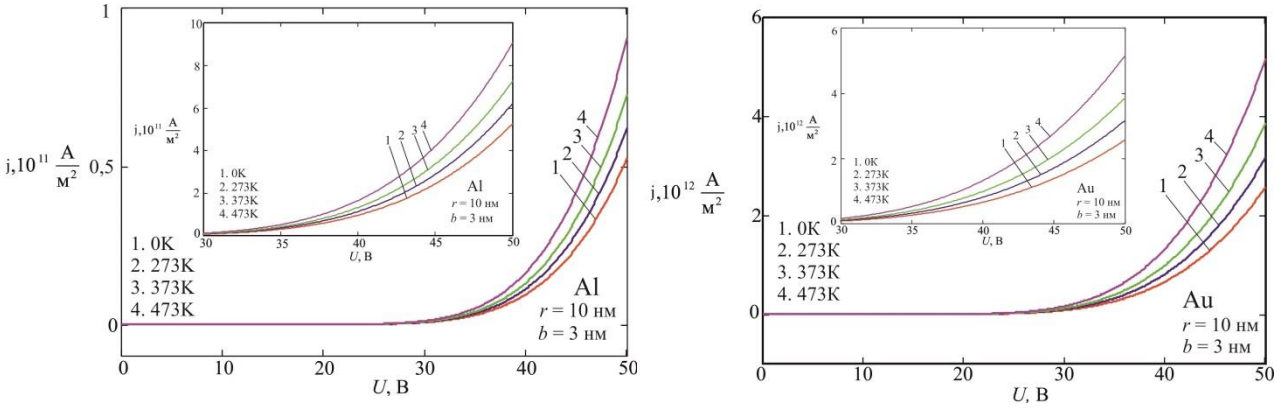
Результати розрахунків та їх обговорення

Розрахунки було проведено для острівцевих плівок алюмінію і золота на склі з відповідними значенням роботи виходу $\phi = 5{,}32$ еВ і $\phi = 4{,}3$ еВ та енергії Фермі $\varepsilon_F = 11{,}7$ еВ і $\varepsilon_F = 5{,}53$ еВ.

На рис. 1, *а* наведено залежність густини тунельного струму острівцевих плівок Al від напруги за різних температур. Для малих значень (до 0,5 В) залежність між струмом і напругою лінійна. Зі збільшенням напруги до значень $eU < \phi$ лінійний характер ВАХ порушується, тому що в цьому інтервалі напруг провідність сама стає функцією напруги. При чому залежність провідності від напруги носить складний характер. Збільшення температури не призводить до істотних змін ВАХ і відграє помітну роль лише в області високих значень напруги ($eU > \phi + \varepsilon_F$).

З порівняння результатів розрахунків тунельного струму для різних металів видно, що для плівок Au густина струму збільшується приблизно вдвічі. Це пояснюється виключно різними значеннями роботи виходу та енергії Фермі, які для золота є меншими.

Як видно з рис. 1, *б*, для золота температурна залежність тунельного струму виражена більш яскраво, ніж для алюмінію. Причому це справедливе як для малих значень радіусу острівців і зазору між ними, так і для великих.



а *б*

Рисунок 1 – Температурна залежність ВАХ тунельного струму острівцевих металевих плівок алюмінію (*а*) та золота (*б*) на склі

Висновки. В роботі досліджено електропровідність острівцевих металевих нанометрових плівок Al та Au діелектричних підкладках. Розрахунок ВАХ показав, що в області малих значень напруги залежність густини струму від напруги носить лінійний характер. Зі збільшенням напруги лінійність ВАХ порушується, оскільки провідність стає функцією напруги.

Продемонстровано, що врахування теплового збудження електронів для тунельного струму стає суттєвим лише в області високих напруг або для острівцевих плівок із розміром острівців порядку 10 нм.

Встановлено, що врахування підкладки призводить до зростання величини тунельного струму внаслідок зменшення висоти потенціального бар'єра на межі „острівець – діелектрик" на величину електронної спорідненості.

Список використаних джерел.

1. К.Л. Чопра**.** Электрические явления в тонких пленках. – М.: Мир, 1972. – 436 с.
2. П.Г. Борзяк, Ю.А. Кулюпин. Электронные процессы в островковых металлических пленках. – К.: Наукова думка, 1980. – 240 с.
3. Т.А. Вартанян, И.А. Гладских, Н.Б. Леонов, С.Г. Пржибельский. Тонкие структуры и переключение электропроводности в лабиринтных пленках серебра на сапфире // ФТТ. – 2014. – Т. 56, №4. – С. 783 – 789.
4. І.М. Пазуха, І.Ю. Проценко, І.В. Чешко. Фізичні властивості плівкових матеріалів мікро- і наноелектроніки: у 2 ч. / За заг. ред. проф. І. Ю. Проценка. – Суми : Сумський державний університет, 2014. – Ч. 1. – 230 с.
5. А.К. Джоншер, Р.М. Хилл. Электропроводность неупорядоченных неметаллических пленок // Современное состояние исследований и технические применения / Под ред. Г. Хасса. – М.: Мир, 1978. Т. 8. – С. 180 – 263.

ДВОМІРНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Зінченко Марина, ст.21 КН
Іщенко О. А. ст. викладач
Таврійський державний агротехнологічний університет

Дуже часто результат випробування характеризується не однією випадковою величиною, а деякою системою випадкових величин $X_1,X_2,...,Xn$, яку називаються також багатовимірною (n-мірною) випадковою величиною або випадковим вектором $X=(X_1,X_2,...,X_n)$. Наприклад, успішність випускника вузу характеризується системою n випадкових величин $X_1,X_2,...,X_n$ - оцінками з різних дисциплін, проставленими в додатку до диплома. Погода в даному місці в певний час доби може бути охарактеризована системою випадкових величин: X_1 - температура; X_2 - вологість; X_3 - тиск; X_4 - швидкість вітру тощо.

Найбільш повним, вичерпним описом багатовимірної випадкової величини є закон її розподілу. При кінцевій множині можливих значень багатовимірної випадкової величини такий закон може бути створений у формі таблиці (матриці), що містить різні поєднання значень кожної з одновимірних випадкових величин, що входять в систему, і їх ймовірностей.
Так, якщо розглядається двовимірна дискретна випадкова величина (X,Y), то її двовимірний розподіл можна представити у вигляді таблиці розподілу, в кожній клітині (i,j), яка розташовує ймовірності добутку подій $P[(X=x_i)(Y=y_i)]$

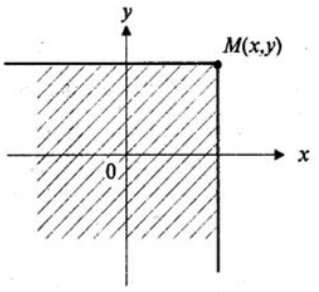
y_j / x_i	y_1	…	y_j	…	y_m	$\sum_{j=1}^{m}$
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1m}	p_1
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{im}	p_i
…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	…	p_{nj}	…	p_{nm}	p_n
$\sum_{i=1}^{n}$	p_1	…	p_j	…	p_m	1

Функцією розподілу n-мірної випадкової величини $(X_1,X_2,...,X_n)$ називається функція $F(X_1, X_1,..., X_n)$, що виражає ймовірність спільного виконання n нерівностей $X_1<X_1, X_2<X_2,..., X_n<X_n$, тобто

$$F(X_1, X_1,..., X_n) = P(X_1<X_1, X_2<X_2,..., X_n<X_n).$$

У двовимірному випадку для випадкової величини (X, Y) функція розподілу $F(x,y)$ визначиться рівністю: $F(X,y) = P(X<X, Y<y)$.

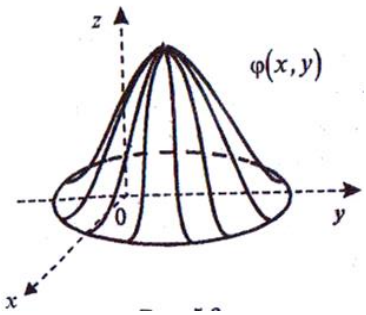
Геометрично функція розподілу $F(x,y)$ означає ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в заштриховану область – нескінченний квадрант, що лежить лівіше і нижче точки $M(x,y)$. Права і верхня межі області в квадрат не



включаються – це означає, що функція розподілу неперервна зліва по кожному з аргументів.

Двовимірна випадкова величина (X, Y) називається неперервною, якщо її функція розподілу F (x,y) – неперервна функція, диференційована по кожному з аргументів, і існує друга змішана похідна $F_{xy}''(X, y)$.

Для двовимірної випадкової величини, так само як і для одновимірної, вводиться поняття *щільності ймовірності (*щільністю розподілу або спільною щільністю) неперервної двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*) називається друга змішана часткова похідна її функції розподілу:



$$\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = F''_{xy}(x,y).$$

Геометрично щільність ймовірності двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*) – це поверхня розподілу в просторі *Oxyz*. Щільність ймовірності *φ(x,y)* має властивості, аналогічними властивостям щільності ймовірності одновимірної випадкової величин:

1. Щільність ймовірності двовимірної випадкової величини є невід'ємна функція: $\varphi(x,y) \geq 0$.
2. Ймовірність влучення неперервної двовимірної величини (*X*,*Y*) в область *D* дорівнює $P[(X,Y) \in D] = \iint_D \varphi(x,y)dx\,dy$.
3. Функція розподілу неперервної двовимірної випадкової величини може бути виражена через її щільність ймовірності *φ(x, y)* за формулою:
$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi(x,y)\ \mathrm{dx\ dy}.$$
4. Подвійний невласний інтеграл у нескінченних межах від щільності ймовірності двовимірної випадкової величини дорівнює одиниці:
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\ \mathrm{dx\ dy} = 1$$

Нехай є двовимірна випадкова величина (*X, Y*), розподіл якої відомо. Тоді можна знайти математичні очікування $M(X)=a_x$, $M(Y)=a_y$ і дисперсії $D(X) = \sigma_x^2$ и $D(Y) = \sigma_y^2$, одновимірних складових *X* і *Y*. Однак математичні очікування і дисперсії випадкових величин *X* і *Y* недостатньо повно характеризують двовимірну випадкову величину (*X, Y*), так як не виражають ступінь залежності її складових *X* і *Y*. Цю роль виконують коваріація і коефіцієнт кореляції.

Коваріацією (або кореляційним моментом) K_{xy} випадкових величин *X* і *Y* називається математичне очікування добутку відхилень цих величин від своїх математичних очікувань, тобто

$$K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]$$

або $K_{xy} = M[(X - a_x)(Y - a_y)]$, де $a_x = M(X)$, $a_y = M(Y)$.

З визначення випливає, що $K_{xy=}\ K_{xy}$.

Для дискретних випадкових величин: $K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - a_x)(y_j - a_y)p_{ij}$

Для неперервних величин: $K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - a_x)\big(y - a_y\big)\,\varphi(x,y)dxdy.$

Коваріація двох випадкових величин характеризує як ступінь залежності випадкових величин, так і їх розсіювання навколо (a_x, a_y).

Коваріація характеризує не тільки ступінь залежності двох випадкових величин, але і їх розсіювання. Крім того, вона – величина розмірна, її розмірність визначається добутком розмірностей випадкових величин. Це ускладнює використання коваріації для оцінки ступеня залежності для різних випадкових величин. Цих недоліків позбавлений коефіцієнт кореляції.

Коефіцієнтом кореляції *двох випадкових величин називається відношення їх коваріації до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:* $\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$.

Випадкові величини називаються некорельованими, якщо їх коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Таким чином, *з незалежності випадкових величин слідує їх некорельованість.*

Зворотне твердження, взагалі кажучи, невірно: *з некорельованості двох випадкових величин ще не слідує їх незалежність.*

3.Якщо коефіцієнт кореляції двох випадкових величин дорівнює (за абсолютною величиною) одиниці, то між цими випадковими величинами існує лінійна функціональна залежність.

Наприклад, проаналізуємо залежність якість зберігання продукції (*X*) від температури зберігання (У) за даними, які згруповані в таблиці

x_i / y_j	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Для цього визначимо коваріацію і коефіцієнт кореляції випадкових величин *X,Y.*

Розв’язок. Для початку знайдемо закони розподілу одновимірних величин *X,Y.*

Випадкова величина X може приймати значення:

X=1 з імовірністю $p_1 = 0{,}10+0{,}25+0{,}30+0{,}15=0{,}8$

X=2 з імовірністю $p_2 = 0{,}10+0{,}05+0{,}00+0{,}05=0{,}2$

X:

x_j	*1*	*2*
p_j	*0,8*	*0,2*

Y:

y_j	*-1*	*0*	*1*	*2*
p_j	*0,2*	*0,3*	*0,3*	*0,2*

Для визначення коваріації скористуємося формулою $K_{xy}=M(XY)-a_x a_y$. Знайдемо: $a_x = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;\ a_y = \sum_{j=1}^{4} x_j p_j = 0{,}5.$

M(XY) знайдемо з таблиці розподілу двовимірної випадкової величини за формулою: $\mathrm{M(XY)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$. $\mathrm{M(XY)} = 0{,}5.$

Отже, маємо $K_{xy}=0{,}5-1{,}2 \cdot 0{,}5=-0{,}1$. Знайдемо: $M(X^2) = 1{,}6.\ M(Y^2) = 1{,}3.$

Тепер розрахуємо дисперсію і середні квадратичні відхилення випадкових величин X і Y : $D(X) = M(X^2) - a_x^2 = 1{,}6 - 1{,}2^2 = 0{,}16; \sigma_x = \sqrt{D(X)} = {,}4;$

$D(Y) = M(Y^2) - a_y^2 = 1{,}3 - 0{,}5^2 = 1{,}05; \sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 1{,}025.$

Отже, коефіцієнт кореляції $\rho = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}1}{0{,}4 \cdot 1{,}025} = -0{,}244$

Висновок: так як коефіцієнт кореляції дорівнює *-0,244*, то треба змінити умови зберігання, які недостатні для забезпечення якості продукції.

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ОКРУЖАЮЩЕМ МИРЕ

Кидалов А., студ. 11 МБ
Демина Н. А., к.т.н.,
Таврический государственный агротехнологический университет

Постановка проблемы. «Извечное стремление человека познать себя и окружающий мир двигало науку вперёд». До сих пор еще не все законы жизни и законы природы разгаданы. Каждый новый взгляд на обычные повседневные вещи может заканчиваться новым открытием. Оказывается, закономерность явлений природы, строение и многообразие живых организмов на нашей планете, строение микромиров и даже строение вселенной, законы мироздания, движение человеческой мысли и достижения науки – всё это можно объяснить последовательностью Фибоначчи. Последовательность Фибоначчи, ставшая известной большинству благодаря фильму «Код да Винчи», это числа, выведенные итальянским математиком Пизанским Леонардо, более известным под псевдонимом Фибоначчи, в тринадцатом веке. Последователи ученого заметили, что особенность, которой подчинена данная последовательность чисел, находит свое отображение в окружающем нас мире и перекликается с другими математическими открытиями. Данная работа посвящена теории последовательности Фибоначчи и золотого сечения, а также проблеме проявления гармонии, красоты и пропорции в природе и жизни. Была выдвинута гипотеза: если золотое сечение – универсальная мировая константа, то она встречается в окружающем нас мире.

Основные материалы исследования. Последовательность Фибоначчи - это числовая последовательность, в которой каждый последующий член представляет собой сумму двух предыдущих: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 и т.д. Эта последовательность имеет много математических нюансов. Проанализировав поведение последовательности, было выявлено более десяти свойств (на самом деле их гораздо больше), среди которых существует одна очень интересная особенность: при делении любого числа из последовательности на число, стоящее перед ним в ряду, результатом всегда будет величина, колеблющаяся около иррационального значения 1.61803398875... и через раз то превосходящая, то не достигающая его. Более того, после 13-ого числа в последовательности этот результат деления становится постоянным до бесконечности ряда. Именно это постоянное число деления в средние века было названо божественной пропорцией, а в наши дни именуется как золотое сечение. Золотое сечение – это деление отрезка на две части таким образом, что большая его часть относится так к меньшей, как весь отрезок относится к большей части.

Последовательность Фибоначчи могла бы остаться только математическим казусом, если бы не то обстоятельство, что все

исследователи золотого сечения и в растительном, и в животном мире, не говоря уже об искусстве и архитектуре неизменно приходили к этой последовательности.

Принято считать, что объекты, содержащие в себе золотое сечение, воспринимаются людьми как наиболее гармоничные. В своей практической деятельности человек сравнивает окружающий его мир с естественными эталонами. Один из таких эталонов - его собственное тело. Кости человека выдержаны в пропорции, близкой к золотому сечению. И чем ближе пропорции к формуле золотого сечения, тем более идеальным выглядит внешность человека. Чтобы проверить гармоничность в строении телосложения людей, были произведены некоторые измерения моих одногруппников: рост, высота от стопы до пупочной линии. Наблюдая за растениями, обнаружено, что во многих можно увидеть «золотую» пропорцию в расположении листьев на стеблях (орхидея, ветви берёзы и тополя). Получено экспериментальное подтверждение неосознанного эстетического чувства гармонии и красоты при изображении геометрических фигур. Было предложено изобразить рамку для фотографии прямоугольной формы. Большинство участников эксперимента отдали предпочтение форме, близкой к золотому сечению. Также было прослежено присутствие «золотой» пропорции в бытовой технике (соотношение размеров мониторов компьютеров, экранов телевизоров).

Выводы. В результате проведенной работы было выявлено, что числа Фибоначчи являются универсальными, так как справедливы независимо от области применения, золотое сечение является одним из ярких примеров использования последовательности чисел Фибоначчи и проявляет себя в мире живой природы, в строении человека, в науке, технике и искусстве. Отношение размеров предметов прямоугольной формы, привлекающее наше внимание, близко к «золотому». Таким образом, можно сделать вывод о том, что золотое сечение – универсальная мировая константа и она, действительно, встречается в окружающем нас мире. Следовательно, числа Фибоначчи и золотое сечение требуют подробного изучения.

Література

1. *Васютинский, Н. А.* Золотая пропорция / Н. А. Васютинский – М.: Молодая гвардия, 1990.

2. *Ковалев, Ф. В.* Золотое сечение в живописи / Ф. В. Ковалев**.** – Высшая школа, 1989г.

3. Википедия. Свободная энциклопедия. [Электронный ресурс]. Золотое сечение.

4. Википедия. Свободная энциклопедия. [Электронный ресурс]. Числа Фибоначчи.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІВ

Коновальский А.Р., студент 11гр. КН
Бойко С.Б., ст. викл.
Таврійський державний агротехнологічний університет

Запропоновано метод розв'язання задач, які застосовуються у практичній діяльності, за допомогою графів. Наприклад, ця теорія широко використовується для побудови електричних та молекулярних схем, встановлення різних видів відповідностей. Теорія графів в останній час застосовується і в таких областях, як економіка, психологія і біологія. Вивчаючи теорію графів, ставиться мета: навчитись застосовувати графи та складати задачі, тематика яких є актуальною в нинішньому суспільстві. У своїй роботі ми розглянули питання теорії графів для створення чіткого розуміння природи графів.

Розглянуто задача «про призначення на посаду», яка має наступну умову: нехай є кілька різних вакантних посад і група людей, які бажають їх зайняти, причому кожен із претендентів достатньо кваліфікований для кількох, але не для всіх наявних посад. Ставилося питання: чи можна кожному з цих людей надати одну з тих посад, які йому підходять? Завдяки побудові певного графа та за допомогою методів, які застосовуються для оптимізації шляхів у графі, ми можемо оптимально розподілити посади між людьми. Вищенаведена задача може використовуватись працівниками служби зайнятості для правильного розміщення працівників на посади.

Також була розглянута задача «про засоби сполучення», поставивши її спочатку формі питання про проведення доріг. Є декілька міст *A, B, C,...,* які потрібно з'єднати між собою мережею шосейних або залізних доріг. Для кожної пари міст *A, B* відома вартість ***c*** (*A, B*) будівництва, доріг яки їх сполучають. Завдання полягає в тому, щоб побудувати найдешевшу з можливих мереж доріг. Замість того, щоб говорити про мережу залізниць, можна було б говорити про електричні лінії, або про водопроводи, або про нафтопроводи і тому подібне. Ця задача може бути вирішена за допомогою побудови графа-дерева для пошуку найдешевшого варіанту прокладення комунікації. Таким методом доцільно користуватися фірмам або держустановам які працюють в сфері комунікацій задля більш економного розрахунку їх розбудови.

Цікавими виявились також і другі задачі, наприклад, про спортивні змагання, про односторонній рух та інші. Ці задачі мають власний підхід до розв'язання, який базується на методах теорії графів.

Сформульовано алгоритми розв'язання задач за допомогою графів для кожної задачі окремо. Розглянуто, як можна використовувати теорію графів на практиці, наприклад: прокладання комунікацій, розподіл посад між претендентами, складання турнірних таблиць та планування руху у містах. Працюючи над роботою, можна зробити висновок, що дана тема є актуальною і перспективною в наш час.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ В РОЗРАХУНКАХ ГРАНИЧНОЇ ВАРТОСТІ ТА ВИТРАТ

Кравець І., ст. 11 сЕП
Іщенко О. А. ст. викл.
Таврійський державний агротехнологічний університет

Корисність - задоволення, яке отримує споживач у процесі споживання товарів та послуг. Математичною моделлю корисності є функція корисності.

Для аналізу поведінки споживача необхідно формально описати його цільові установки, тобто залежність рівня корисності від набору споживчих благ. Така залежність представляє собою функцію корисності - співвідношення між обсягами споживаних благ і рівнем корисності, який досягається при цьому споживачем. Функція корисності - одне з базових понять економічної теорії. Багатовимірний її аналог - це функція, що виражає корисність від n благ:

$$U = f(Q_{X_1}; Q_{X_2}; \dots; Q_{X_n}),$$

де U - рівень корисності, ютілів;

$Q_{X_1}; Q_{X_2}; \dots; Q_{X_n}$ - кількість спожитих благ $X_1, X_2, \dots, X_n$, одиниць.

Для спрощення припустимо, що модель включає тільки два товари, тоді в загальному вигляді функція корисності записується у вигляді:

$$U = f(Q_X; Q_Y),$$

де Q_X, Q_Y - кількість товарів X та Y, які споживач хотів придбати.

Споживач має намір отримувати максимум корисності від придбаних товарів та послуг. Для визначення максимальної корисності (MU), яку отримає споживач від певного набору благ, розраховують граничну корисність кожного блага. Якщо Q_Y – постійна величина, то $MU = MU(Q_X)$; якщо Q_X - постійна, то $MU = MU(Q_Y)$.

Гранична корисність – це приріст загальної корисності товарного набору при збільшені споживання певного товару на одну одиницю. Тобто, гранична корисність (MU) - додана корисність, що вилучається споживачем з однієї додаткової одиниці конкретної продукції.

При диференційованості функції корисності $U = f(Q_X; Q_Y)$ гранична корисність є першою частинною похідною функції корисності, яка виражає загальний рівень добробуту даного споживача в даній ситуації:

$$MU_{Q_X} = \frac{\partial f(Q_X, Q_Y)}{\partial Q_X};\ MU_{Q_Y} = \frac{\partial f(Q_X, Q_Y)}{\partial Q_Y}\ .$$

Зазвичай на вибір споживача впливають такі фактори як обмеження доходу та ціна товару, який він прагне придбати. Найважливішою передумовою теоретичної моделі дослідження поведінки споживача в умовах цінових та грошових обмежень є така умова: величина грошового доходу споживача дорівнює його витратам на споживчий кошик, у якому є товари X та Y. Математично ця умова виражається рівнянням бюджетного обмеження:

$$I = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y,$$

де I - грошовий дохід споживача;

P_X - ціна одиниці товару X;

P_Y - ціна одиниці товару Y;

X – обсяг товару X, який хоче купити споживач;

Y - обсяг товару Y, який хоче купити споживач.

В економіці лінії рівня називають ізоквантами. Вони дозволяють геометрично ілюструвати рішення задачі про оптимальний розподіл ресурсів. Комбінації ліній рівня функцій дозволяють робити висновки про перевагу того чи іншого значення факторів X та Y. Очевидно, наприклад, що пара значень (X_1, Y_1) більш краща, ніж пара (X_2, Y_2), так як забезпечує той же випуск, але з меншими витратами. Оптимальними ж значеннями факторів будуть значення (X_0, Y_0) - координати спільної точки лінії рівня функції випуску і функції витрат.

Лінії рівня функції корисності (вони називаються кривими байдужості) також дозволяють розглядати питання заміщення одного товару іншим і ілюструвати розв'язок задачі про оптимальне споживання (споживчого вибору).

Розглянемо наступну ситуацію: власник ресторану щотижня купує дві групи товарів: X - огірки, Y – помідори. Нехай функція корисності для даного набору рівноцінних товарів має вигляд U=(X+4)·(Y+2). Ціна одиниці товару X – 1 грн., ціна одиниці товару Y — 2 грн. Бюджет власника на ці два блага (товари) складає 40 грн. (I). Для власника важливо знати:

- як розподілити свої кошти, щоб корисність була максимальною;
- що станеться з привілейованим ринковим кошиком, якщо ціна огірків підвищиться до 2 грн.;
- на скільки зменшиться добробут споживача.

Відповідно до умови рівняння бюджетного обмеження за даних цін виглядає: I = X + 2Y

Визначимо граничні корисності благ та запишемо умову максимізації корисності: $\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$

Математично гранична корисність блага є похідною функції загальної корисності від кількості цього блага, тому:

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial X} = Y + 2; \;\; MU_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = X + 4$$

Згідно умови рівноваги: $\frac{Y+2}{1} = \frac{X+4}{2}$ - комбінація благ за даного співвідношення цін і будь-якого бюджету, що дає споживачеві максимум корисності.

Щоб визначити, яку комбінацію товарів придбає споживач за наявного бюджету, необхідно підставити одержане співвідношення у рівняння бюджетного обмеження: $40 = 2Y + 2Y$ => $Y = 10$; $40 = X + 2 \cdot 10$ =>$X = 20$

Отже, 10 одиниць товару Y та 20 одиниць товару X - оптимальний набір товарів за даного бюджету, а корисність становитиме:

U = (X + 4)·(Y + 2) = (20 + 4)·(10 + 2) = 288

Рівняння кривої байдужості матиме вигляд U_1: $X=\frac{286-4Y}{Y+2}$.

Збільшення ціни огірків призведе до скорочення споживчого кошика. Нове бюджетне обмеження матиме вигляд: 40 = 2X + 2Y. Новий набір товарів розраховується аналогічно попередньому: $\frac{Y+2}{2}=\frac{X+4}{2}$, звідки

Підставляємо одержане співвідношення у рівняння бюджетного обмеження: $40 = 2(Y-2)+2Y$ =>Y= 11; $40 = 2X + 22$ =>X= 9

Отже 11 одиниць товару Y та 9 одиниць товару X - новий оптимальний набір товарів за даного бюджету, а корисність становитиме:

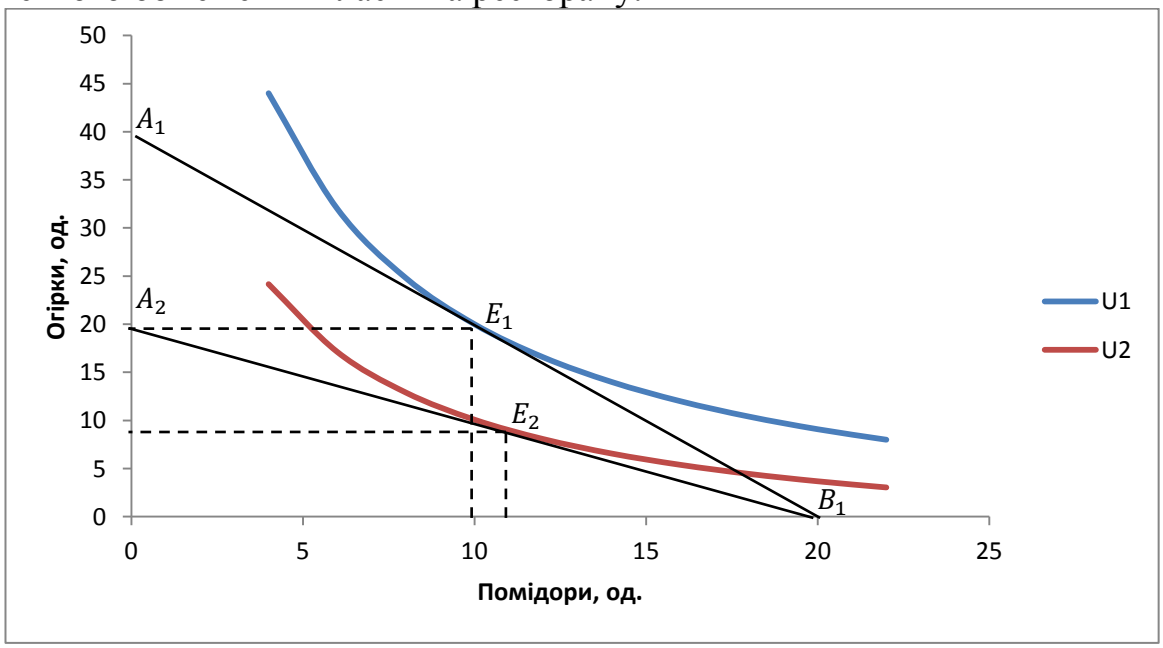
U = (X + 4)·(Y + 2) = (9 + 4)·(11 + 2) = 169

Рівняння кривої байдужості матиме вигляд U_2: $X=\frac{161-4Y}{Y+2}$.

Отже, за 40 грн. споживач може придбати або 40 одиниць товару X, або 20 одиниць товару Y. Для визначення рівноваги споживача будуємо бюджетну лінію A_1B_1. Спільна точка бюджетної лінії A_1B_1 та кривої байдужості U_1 є точкою рівноваги споживача E_1

За 40 грн. споживач може придбати або 20 одиниць товару X, або 20 одиниць товару Y. Для визначення рівноваги споживача будуємо бюджетну лінію A_2B_1. Спільна точка бюджетної лінії A_2B_1 та кривої байдужості U_2 є точкою рівноваги споживача E_2

Побудуємо графік функцій кривих байдужості U_1 та U_2, лінію бюджетного обмеження власника ресторану:



Висновок: за допомогою математичного апарату диференціювання функції кількох змінних можна розв'язати задачі щодо вибору благ споживачем в умовах конкурентного ринку, тобто при підвищенні ціни огірків до 2 грн. власник ресторану зменшить їх споживання з 20 до 9 одиниць, а споживання помідорів збільшить на 1 одиницю. Корисність від споживання благ зменшиться на 119 грн. Отже, добробут власника ресторану зменшиться майже в 2 рази.

ПРОСТІ ЧИСЛА І МАГІЧНІ КВАДРАТИ

Кухарев В.О., студент ІІІ курсу відділення „Фінанси і кредит”
Вишневецька Л.Є., викладач математики
ВСП “Ногайський коледж ТДАТУ”

З часів стародавніх греків прості числа виявляються настільки привабливими, наскільки і невловимими. Одною із семи головних проблем, яку 24 травня 2000 року висунули експерти математичного інституту імені міліардера Лендона Клея в Кембриджі, є проблема простих чисел.

В наш час не досліджені до кінця як властивості простих чисел, так і способи побудови магічних квадратів із непослідовних чисел.

Метою роботи є вивчення історії та властивостей простих чисел і магічних квадратів, виявлення залежностей і закономірностей, які існують при побудові магічних квадратів із простих чисел, побудова магічних квадратів.

Об’єктом дослідження є таблиця простих чисел. Предметом дослідження є прості числа, якими можна заповнити магічні квадрати.

Новизна роботи полягає у нестандартному підході до побудови магічних квадратів, виявленні та дослідженні закономірностей побудови.

Спочатку я розглядав магічні квадрати щоб знайти схожі принципи побудови.

Це був Квадрат Ло шу - єдиний нормальний магічний квадрат 3 × 3. Був відомий ще в Стародавньому Китаї, перше зображення на черепаховому панцирі датується 2200 роком до н. е..

Було

4	9	2
3	5	7
8	1	6

помічено, що він складається з послідовних чисел, різниця між ними однакова і дорівнює 1, отже це арифметична прогресія. Ці числа також розташовані в особливому порядку.

Також був розглянутий

a+3d	a+8d	a+d
a+2d	a+4d	a+6d
a+7d	a	a+5d

магічний квадрат із простих чисел, що першим побудував Генрі Дьюдені.

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Однак простих чисел в цьому квадраті лише 8, так як число «1» не є простим. Проте, якщо його відобразити згори вниз, то помічаємо, що спосіб побудови такий самий як і в попередньому квадраті.

За винятком того, що числа в ньому не складають арифметичну прогресію. Загалом, різниця залишається сталою, окрім третьої і шостої пари.

Знаючи, що із кожних дев'яти послідовних членів будь-якої арифметичної прогресії можна скласти магічний квадрат, розмістивши їх в такому порядку:

a+3d	a+8d	a+d
a+2d	a+4d	a+6d
a+7d	a	a+5d

досліджував таблицю простих чисел і знайшов цю прогресію:

199,409,619,829,1039,1249,1459,1669,1879,2089.

Розмістивши ці числа належним чином, отримав наступні магічні квадрати.

1039	2089	619
829	1249	1669
1879	409	1459

829	1879	409
619	1039	1459
1669	199	1249

Способи знайти ще групи простих чисел, які б були послідовними членами арифметичної прогресії були невдалі.

Намагаючись знайти члени арифметичної прогресії знаходив різниці між наступним і попереднім членами послідовності.

181-151=30	643-613=30
211-181=30	673-643=30
511-211=360	823-673=150
601-571=30	853-823=30
631-601=30	883-853=30
991-631=360	1033-883=150
1021-991=30	1063-1033=30
1051-1021=30	1093-1063=30

Побудувати магічні квадрати вдалось із інших простих чисел, які не є членами арифметичної прогресії.

571	1051	181
211	601	991
1021	151	631

1451	1931	1061
1091	1481	1871
1901	1031	1511

823	1093	643
673	853	1033
1063	613	883

307	607	97
127	337	547
577	67	367

В цих випадках різниця залишається сталою, окрім третьої і шостої пари так само як і у квадраті Дьюдені.

Вивчаючи історію простих чисел і магічних квадратів, їх властивості отримав стартовий майданчик для захоплюючих подорожей в світ математики. Математичні дослідження – це похід в невідомість, в якому ти намагаєшся знайти той самий шлях, яким йшли великі математики.

ЛИШКИ ТА КОДУВАННЯ ПОВІДОМЛЕНЬ

Мягков П.І., студент 11гр. КН
Бойко С.Б., ст. викладач
Таврійський державний агротехнологічний університет

Постановка проблеми: С давніх часів відомо, що одну і ту ж інформацію, наприклад, відомості про небезпеку ми можемо висловити різними способами: просто крикнути; залишити застережливий знак (малюнок); за допомогою міміки та жестів; передати сигнал «*SOS*», використовуючи азбуку Морзе або семафорну чи прапорцеві сигналізації. У кожному з цих способів ми повинні знати правила, за якими можна відобразити інформацію, щоб отримати та зрозуміти її.

***Аналіз останніх досліджень*:** Поняття порівняння, введене Гаусом, знайшло широке застосування в математиці і позначається: $a \equiv b \pmod{m}$, де a і b - числа, що дають при діленні на число m (модуль) рівні залишки, і називаються порівнянними за даним модулем.

Приклад: 2,9,16 та 23 - порівнянні між собою за модулем 7, бо при діленні кожного числа на 7, виходять залишки, які дорівнюють 2.

$2 \equiv 5 \pmod{3}$; $22 \equiv 12 \pmod{5}$; $1000 \equiv 1 \pmod{37}$.

Знак порівняння «≡» нагадує знак рівності і це не випадково, тому що властивості порівнянь схожі на властивості рівностей.

Але поглянувши на порівняння з іншого боку: взявши певний модуль, наприклад, $m = 5$. При діленні будь-якого числа на 5 вийшли залишки 0,1,2,3 і 4. Всі натуральні числа можна розбити на 5 категорій залежно від того, який залишок виходить при діленні цих чисел на 5. Числа кожної категорії утворюють необмежено-продовжувану арифметичну прогресію.

Ось ці п'ять прогресій:

÷1, 6, 11, 16, 21, 26,…
÷2, 7, 12, 17, 22, 27,…
÷3, 8, 13, 18, 23, 28,…
÷4, 9, 14, 19, 24, 29,…
÷5, 10, 15, 20, 25, 30,…

Всі числа, які входять до складу написаних вище прогресій, називаються лишками за модулем 5 (mod 5).

Числа такої системи стали додавати, віднімати і множити за звичайними правилами, але кожен отриманий результат замінювати найменшим позитивним лишком того ж класу.

Лишки мають різні корисні властивості. Лишки можна використовувати при шифруванні повідомлень. Розглянули найпростішу систему, якою користувався Юлій Цезар. Він застосовував циклічний зсув латинського алфавіту на три літери. Замість «*a*» він ставив «*d*», замість «*b*» ставив «*e*» і т.д. Замість «*x*», «*y*», «*z*» відповідно «*a*», «*b*», «*c*» Тобто букви замінені на їхні порядкові номери, які розглядаються за модулем 23 (mod 23), так як в латинському алфавіті 23 літери.

Ця ідея заміни символів на відрахування вельми корисна і застосовується в сучасних криптосистемах. Узагальненням системи Цезаря служить Афінна криптосистема.

Розглянули шифрування англійських текстів за допомогою наступного методу. Зіставили кожній букві англійського алфавіту лишок за модулем 26.

Обрали два числа k и m ($1 \le k \le 25$; $0 \le m \le 25$), причому НОД (k,26)=1. Шифрували так: лишок замінюється на лишок.

Враховуючи, які різні значення можна надати k і m, отримуємо 312 способів шифрування англійських текстів. Однозначно дешифрувати повідомлення можна, якщо відомі k і m (зворотний лишок до лишка).

Висновки. Розглядаючи теорію лишків і кодування можна побачити, що цей розділ математики посідав й посідає дуже важливе місце у житті людини, як в минулому, так і зараз, бо секретність будь-якої важливої інформації можливо зберегти лише за допомогою кодування або шифрування її. Ще не варто забувати, що один з найважливіших винаходів людини - комп`ютер, працює саме через постійне кодування.

Література.

1. Берман Г.Н. Число и наука про него / Г.Н. Берман. - М. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.-157 с.
2. Илларионова О.Г., Солодов В.В. Комплексные числа, алгебраические структуры / О.Г. Илларионова, В.В.Солодов - М.: МГТУ ГА, 2005. - 24 с.

АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ, ЯКІ ВЗАЄМОДІЮТЬ З МЕТАНОВМІСНИМИ ПОРОЖНИНАМИ

Островська Вікторія, учениця 11 кл. ЗОШ №13
Тітова Н.І., вчитель фізики ЗОШ №13 natalkatitova@gmeil.com

У гірському масиві контакт породи з газом, рідкою фазою або деякою породою, що заповнює порожнечі, через досить контрастні розходження акустичних міцностей, буде реєструватися досить чітко. Шари, що мають низькі акустичні властивості (вугільні шари, насичені рідинами, газами та ін.) і порожнечі не є шарами-резонаторами. На спектрограмі вони проявляються ділянками зі зниженими значеннями щільності спектра. Тому розпізнавання таких порожнеч, а також визначення таких кількісних характеристик, як глибина залягання, кут нахилу склепіння, є можливим за допомогою аналізу форм спектрограми, одержаної за результатами послідовного геоакустичного зондування. Ці методи засновані на вивченні амплітудно-частотної характеристики полів пружних сил. Тому задачі про розрахунок пружних полів геоакустичних хвиль, що розсіюються на порожнинах різної форми викликають великий науковий і практичний інтерес.

Поширення та розсіювання згасаючих пружних хвиль у геологічному середовищі, що містить сферичну порожнину, описується рівнянням Ламе для радіального зміщення частинок середовища з урахуванням сферичної симетрії задачі (вважаємо, що початок координат співпадає із центром порожнини)

$$\rho\ddot{u} + \alpha\dot{u} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) - \mu\frac{2u}{r^2}, \qquad (1)$$

або

$$\ddot{u} + \beta\dot{u} = C_l^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) + C_t^2\frac{u}{r^2}$$

де $\beta = \alpha/\rho$ – приведений коефіцієнт згасання, $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ і $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ – швидкості пружних поздовжніх і поперечних хвиль, ρ - густина середовища, λ - модуль стиснення (розтягнення), μ - модуль зсуву.

З урахуванням попереднього напружено-деформованого стану середовища початкові умови будуть мати вигляд:

$$\dot{u}\big|_{t=0} = 0, \;\; u\big|_{t=0} = u_0. \qquad (2)$$

Оскільки на нескінченності пружні хвилі згасають, а на границі порожнини має місце стан механічної рівноваги, то в якості граничних умов візьмемо наступні співвідношення:

$$u\big|_{r\to\infty}=0;\ \sigma_{rr}\big|_{r=R}=-P'\big|_{r=R}, \tag{3}$$

де R – радіус порожнини.

З урахуванням того, що тиск метану та радіальна компонента тензора напружень визначаються виразами:

$$P'=P-P_*=-3\gamma P_*\frac{u}{R},$$

$$\sigma_{rr}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}+2\lambda\frac{u}{r}\bigg|_{r=R},$$

де γ – показник адіабати газу; P_* – статичний тиск газу в порожнині; гранична умова на порожнині матиме вигляд

$$\frac{3\gamma P_*-2\lambda}{R}u\big|_{r=R}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \tag{4}$$

Таким чином, розв'язок задачі (1)-(4) визначає поля зміщень частинок середовища в пружній хвилі, яка розсіюється сферичною порожниною, і має вигляд

$$\bar{u}(x,t)=\frac{\beta^2R^2x^2}{c_l^2\left(\frac{25}{4}-\nu^2\right)}\left[\frac{3\gamma P_*-6\lambda-8\mu}{3\gamma P_*-2\lambda-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2\mu)}x^{\nu-\frac{5}{2}}-1\right]* \tag{5}$$

$$*(1-\beta t)\exp(-\beta t).$$

де введено безрозмірну радіальну координату $x=r/R$, безрозмірне зміщення точок середовища $\bar{u}(x,t)=u(r,t)/u_0$, а $\nu=\frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{8c_t}{9c_l}}$.

Розрахунки проводилися за наступних значень радіуса порожнини, параметрів геологічного середовища та метану: $R=5$ м, $c_l=2000$ м/с, $c_t=1000$ м/с, $\rho=2000\frac{кг}{м^3}$, $\beta=0{,}01c^{-1}$, $\gamma=1{,}33$, $P=10^6$ Па. Результати розрахунків, проведених за допомогою формули (5), наведено на рисунках 1 - 3.

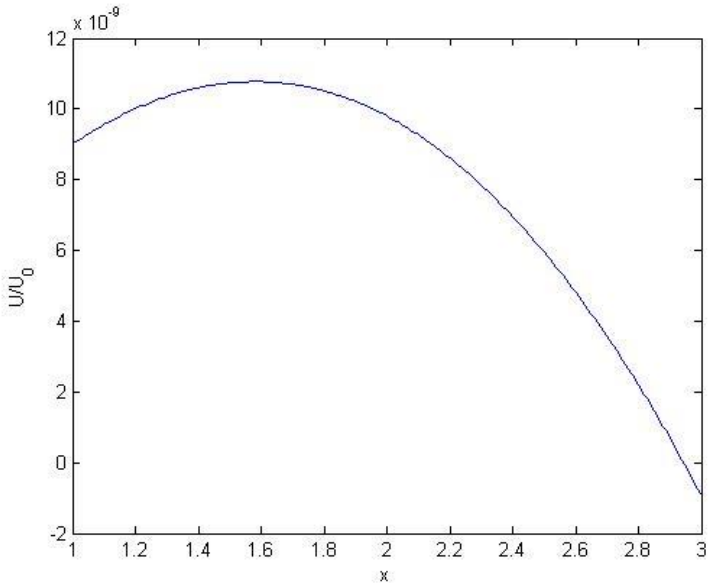


Рисунок 1 – Радіальний розподіл зміщень частинок середовища в момент часу $t = 1c$

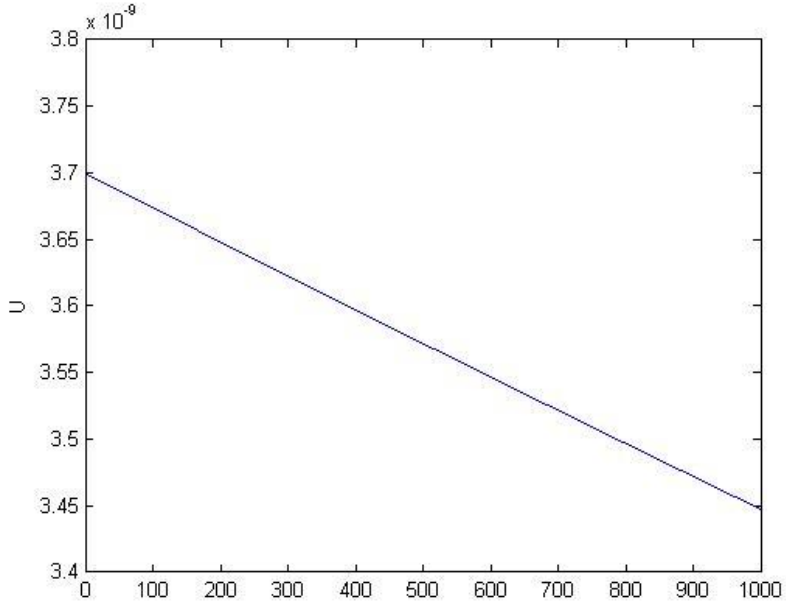


Рисунок 2 - Залежність зміщень частинок середовища на відстані $r = 1,7R$ від центру сферичної порожнини від частоти в момент часу $t = 1c$

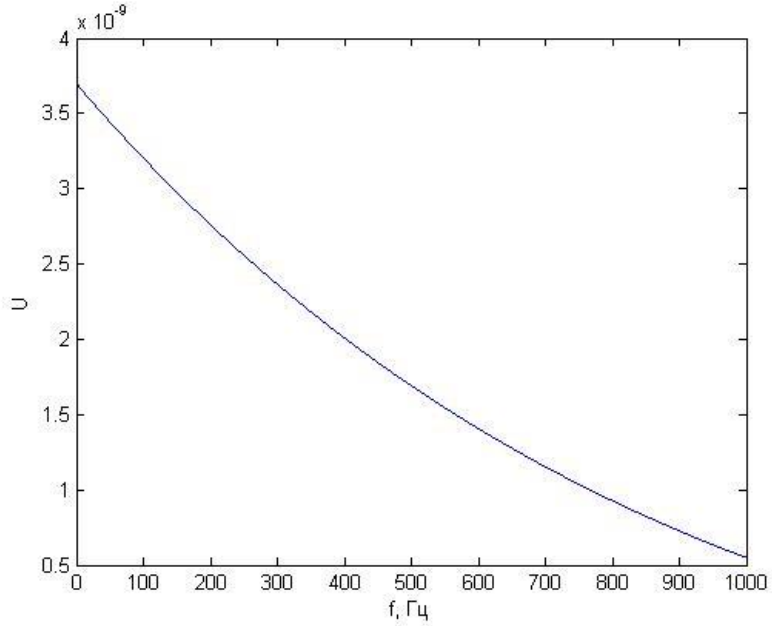


Рисунок 3 - Залежність зміщень частинок середовища на відстані $r = 1,7R$ від центру сферичної порожнини від частоти в момент часу $t = 20c$

Результати розрахунків, наведених на рисунку 1, свідчать про наявність максимумів зміщень точок середовища на відстані $r = 1,7R$ від центру порожнини. Це дозволяє говорити про практичну доцільність розміщення сейсмодатчиків у цій області простору з метою надійної реєстрації розсіяної хвилі. Аналіз амплітудно-частотних характеристик (рисунки 2, 3) свідчить про те, що в області частот $f = 0,1 \div 1000$ Гц при часі $t \geq 1c$ від початку розповсюдження хвилі має місце зменшення радіальних зміщень точок середовища за лінійним законом, яке достатньо швидко (вже при $t \geq 20c$) змінюється зменшенням за експоненціальним законом для частот $f > 300$ Гц.

Максимум зміщення точок середовища знаходиться на відстані $r = 1,7R$ від центру сферичної порожнини. Тому в цій області простору необхідно розмістити прилади, які реєструють зміщення точок середовища. При розсіюванні поздовжніх хвиль на порожнинах сферичної форми в області частот $f = 0,1 \div 1000$ Гц при часі $t \geq 1c$ від початку розповсюдження хвилі має місце зменшення радіальних зміщень точок середовища за лінійним законом, яке достатньо швидко (вже при $t \geq 20c$) змінюється зменшенням за експоненціальним законом для частот $f > 300$ Гц.

ДЕГРАДАЦІЯ ЕЛЕКТРОФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ РЕЗОНАНСНО-ТУНЕЛЬНИХ ДІОДІВ

Пилипенко Олександра, V курс e-mail: sasha.pilipenko.second@mail.ru
Коротун Андрій Віталійович, к. ф.-м. н., доцент кафедри мікро- та наноелектроніки e-mail: andko@zntu.edu.ua
Запорізький національний технічний університет

Вступ.Розвиток радіоелектронних систем (РЕС) телекомунікацій, зв'язку, радіолокації тощо передбачає поліпшення їх функціональних характеристик: зменшення спотворень сигналів, збільшення робочих частот, розширення смуги частот і динамічного діапазону оброблюваних сигналів. Одним із шляхів підвищення якості РЕС є використання напівпровідникових приладів, що функціонують на основі квантоворозмірних ефектів. До таких приладів відносяться резонансно-тунельні діоди (РТД) на базі багатошарових напівпровідникових гетероструктур із поперечним струмопереносом [1,2].

Змінюючи параметри шарів гетероструктури (товщину, хімічний склад), можна управляти формою вольт-амперної характеристики (ВАХ). Така властивість РТД дозволяє створювати на його базі різні нелінійні перетворювачі радіосигналів: змішувачі, випрямлячі, помножувачі і генератори, функціональні характеристики яких можуть бути оптимізовані за рахунок вибору найкращої для конкретних умов застосування форми ВАХ нелінійного елемента. Незважаючи на відносно простий принцип функціонування даного приладу, фізика та його моделювання досить складні. Це пов'язано з дуже високою чутливістю РТД до впливу різних факторів. Якщо властивості самих РТД [3,4] і проблеми їх радіотехнічних застосувань [5] вивченні достатньо повно, то залишаються питання про надійність їх роботи.

Структура РТД включає власне резонансно-тунельну структуру (РТС), приконтакті області й омічні контакти. Виходячи з цього, форма ВАХ РТД визначається головним чином умовами струмопереносу в резонансно-тунельної структурі, опором приконтактної області напівпровідника та омічного контакту. Відповідно до цього основними напрямками вивчення термічної деградації РТД є дослідження міжшарової дифузії в РТС, дифузії в приконтактних областях і деградаційних явищ в омічних контактах у процесі виготовлення РТД та експлуатації приладів на їх основі.

Отже, метою даної роботи є дослідження зміни форми ВАХ РТД під впливом деградаційних процесів у резонансно-тунельних структурах.

Основні співвідношення.

Густина струму через активну частину РТД розраховується за формулою Цу – Есакі [4]:

$$j = \frac{2m^* e k_B T}{(2\pi)^2 \hbar^3} \int_0^\infty \mathcal{T}(E_z)\, g(E_z)\, dE_z , \qquad (1)$$

де $g(E_z) \equiv \dfrac{\ln\left(1+e^{-\frac{E_z-E_F}{k_B T}}\right)}{\ln\left(1+e^{-\frac{E_z-(E_F-eV)}{k_B T}}\right)}$ – функція „постачання електронів“, $\mathcal{T}(E_z)$ – функція проходження електрона.

При заданій концентрації атомів донорної домішки рівень Фермі задається як корінь рівняння:

$$N_d = 4\pi\left(\frac{2m^*}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E}}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}+1} dE \,. \tag{2}$$

При великих концентраціях домішки, коли електронний газ є виродженим, рівень Фермі можна наближено знайти з рівняння:

$$E_F = \frac{h^2}{2m^*}\left(\frac{2N_d}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Для пошуку $\mathcal{T}(E_z)$ вважатимемо, що потенціальна енергія електрона в двобар'єрній квантовій структурі за нульової напруги визначається лише розривами відповідних зон. Тоді можна записати:

$$\mathcal{T}(E_z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Gamma_i^2}{\Gamma_i^2 + 4(E_z - E_i)^2}, \tag{4}$$

де E_i – енергія i-го енергетичного рівня; Γ – «природне» розширення i-го енергетичного рівня – має смисл невизначеності в енергії, що виникає за рахунок скінченного часу руху електрона в квантовій ямі, оточеній бар'єрами скінченної ширини. З принципу невизначеності для енергії:

$$\Gamma_i = \frac{\hbar}{\tau_i}, \tag{5}$$

де τ_i – це середній час руху електрона на i-му енергетичному рівні. Його можна визначити з виразу:

$$\tau_i = \frac{a}{v_i \mathcal{T}_{b,i}}, \tag{6}$$

a – ширина квантової ями; $v_i = \sqrt{\dfrac{2E_i}{m_w^*}}$ – швидкість руху електрона на i-му рівні в класичному наближенні (m_w^* – ефективна маса електрона в квантовій ямі); $\mathcal{T}_{b,i}$ – коефіцієнт проходження через потенціальний бар'єр при енергії, що дорівнює енергії i-го енергетичного рівня: $\mathcal{T}_{b,i} = \mathcal{T}_b(E_i)$ та визначається як і для одинарного потенціального бар'єру, для якого він має вигляд:

$$\mathcal{T}_{b,i} = \frac{4C_i^2}{(C_i+1)^2 \operatorname{sh} b_i + 4C_i^2}, \tag{7}$$

де b – ширина бар'єру;

$$C_i = \frac{k_i}{\text{i}_i}\frac{m_w^*}{m_b^*}, \qquad \hbar k_i = \sqrt{2m_w^* E_i}\,; \qquad \hbar \text{i}_i = \sqrt{2m_b^*\left(U_b - E_i\right)}\,,$$

U_b – висота потенціального бар'єру; m_b^* – ефективна маса носіїв заряду всередині потенціального бар'єру.

Результати розрахунків та їх обговорення.

Розрахунки було проведено для РТС на основі $In_{0,52}Al_{0,48}As/In_{0,53}Al_{0,47}As$ за температур $T = 70$, 300 і 400 К (рис.1). Як видно з рисунку, в діапазоні малих напруг вольт-амперні характеристики є практично лінійними і близькими для різних значень температури. Починаючи з напруг $U \approx 0{,}13$ В ВАХ стають істотно нелінійними, а їх відмінність для різних температур стає суттєвою та збільшується при подальшому зростанні напруги. Збільшення струму за одних і тих же значень напруги для різних температур зумовлене температурною деградацією резонансно-тунельної структури. З фізичної точки зору це пояснюється зростанням коефіцієнту дифузії атомів домішки, що, в свою чергу, викликає збільшення їх концентрації і, як наслідок, підйом рівня Фермі. При цьому збільшується кількість електронів, що проходять крізь резонансно-тунельну структуру, а, відповідно, коефіцієнт її прозорості, провідність та густина струму.

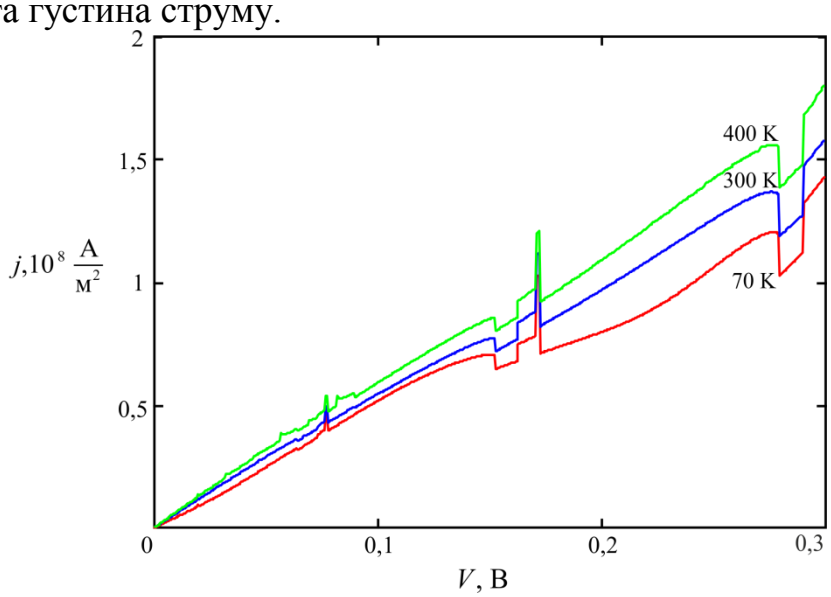


Рисунок 1 – Вольт-амперні характеристики РТС за різних температур

Отже, для оцінки деградаційних процесів у резонансно-тунельних приладах може бути запропонована наступна методика:

- розрахунок коефіцієнта дифузії атомів домішки та визначення на його основі їхньої концентрації;
- знаходження рівня Фермі;
- розрахунок ВАХ.

Висновки.

В роботі досліджено зміну форми вольт-амперних характеристик резонансно-тунельних структур та запропоновано методику теоретичної оцінки їх температурної деградації.

Розрахунки показали, що збільшення температури призводить до активації дифузійних процесів, внаслідок чого зростає провідність і густина струму.

Список використаної літератури.

1. Иванов Ю.А., Мешков С.А., Синякин В.Ю., Федоренко И.А, Федоркова Н.В., Федоров И.Б., Шашурин В.Д. Повышение показателей качества радиоэлектронных систем нового поколения за счет применения резонансно-туннельных нанодиодов // *Наноинженерия*, 2011, № 1, с. 34–43.
2. Алкеев Н.В., Аверин С.И., Дорофеев А.А., Гладышева Н.Б., Торгашин М.Ю. Резонансно-туннельный диод на основе гетеросистемы GaAs/AlAs для субгармонического смесителя. *Микроэлектроника*, 2010, т. 39, № 5, с. 356–365.
3. Прохоров Э.Д. *Квантово-размерные эффекты в твердотельных сверхвысокочастотных приборах*. Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2005 – 220 с.
4. Абрамов И.И., Гончаренко И.А., Коломийцева Н.В. Комбинированная модель резонансно-туннельного диода. *Физика и техника полупроводников*, 2005, т. 39, № 9, с. 1138–1145.
5. Алкеев Н.В. *Анализ шумовых и динамических свойств субгармонического смесителя на резонансно-туннельном диоде*, Радиотехника и электроника, 2004, т. 49, № 104, С. 1258 – 1263.

РОЗРАХУНОК ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ ОПАЛЕННЯ ДЛЯ ТЕПЛИЦЬ ЗАПОРІЗЬКОЇ ОБЛАСТІ

Піхтарь О. В. студентка 11МБ Ен,
Назарова О.П., к.т.н., доцент
Таврійський державний агротехнологічний університет

Постановка проблеми. В даний час все більшого практичного значення набуває вирішення завдань, спрямованих на теплофізичну достовірність розрахунків, що характеризують процеси формування енергетичних режимів в сільськогосподарських виробничих будівлях, на поліпшення теплозахисних якостей огороджувальних конструкцій і вдосконалення систем опалення та вентиляції цих будівель [3] Обгрунтувати субстрат грунтових теплиць електричною енергією в залежності від кліматичної зони. Процес теплообміну в наземних теплицях істотно відрізняється від теплообміну, що відбувається в теплиці, так як бічні стіни з грунтовою масою володіють великою інерційністю. Природно, це впливатиме на формування температурно-вологісного, радіаційного та режиму освітленості теплиці.

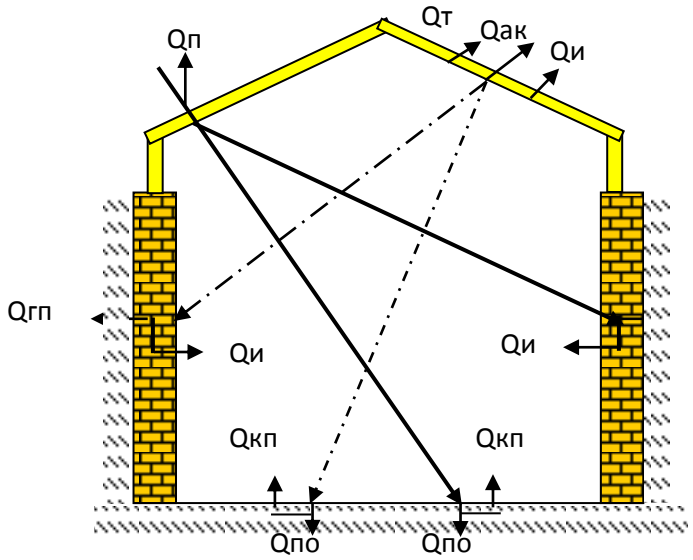
Основні матеріали дослідження.

Для вирішення різноманітних завдань (проектування, економічних розрахунків і наукових досліджень) необхідно прогнозувати можливий рівень параметрів мікроклімату теплиць траншейного типу при різних зовнішніх умовах. Знання енергетичних можливостей неопалюваних будівель дозволить проводити їх районування на такій великій території України, де, природно, кліматичні умови відрізняються.

Розраховуючи математичну модель, умовно переміщуємо культиваційну споруда в різні кліматичні зони: в Лісостеп (Вінницька, Київська, Полтавська, Сумська, Тернопільська, Харківська, Хмельницька, Черкаська, Чернівецька області), в зону полісся і Західного регіону (Волинська, Житомирська, Закарпатська, Івано-Франківська, Львівська, Рівненська, Чернігівська області), в Агрокліматичну зону (Дніпропетровська, Донецька, Запорізька, Кіровоградська, Луганська, Миколаївська, Одеська, Херсонська області) - розглядаючи умови в теплиці в даних зонах протягом року.

Характер протікання теплових процесів в траншейної теплиці відрізняється від характеру протікання процесів в наземній теплиці, вона володіє великою інерційністю. Це вимагає більш реального обліку інерційності й точного рішення рівнянь теплопровідності.

Фізична картина процесу сонячної теплиці представлена на рисунку 1.

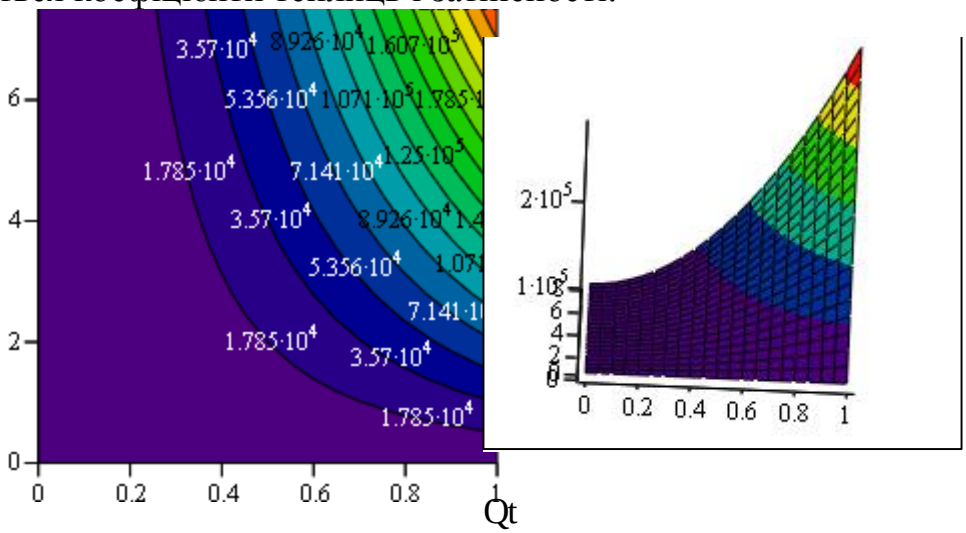


Характер протікання теплових процесів в траншейної теплиці відрізняється від характеру протікання процесів в наземній теплиці, вона володіє великою інерційністю. Це вимагає більш реального обліку інерційності й точного рішення рівнянь теплопровідності.

Рисунок 1 - Схема перетворення надходження сонячної радіації

Уміння розраховувати температурний режим неопалюваних споруд необхідно і для визначення термінів включення і відключення обігріву в опалюємих культиваційних спорудах, що і призведе до економії енергоресурсів і отриманню високоякісних сільськогосподарських продуктів.

У роботі вирішується математична модель теплотехнічних розрахунків по регіонам країни протягом року з урахуванням зміни розподілу температури ґрунту по глибині, сонячної радіації, швидкості вітру, а також вводяться коефіцієнти теплиць і затіненості.



Qt

Рис.2. Залежність потужності ґрунтового підігріву від коефіцієнту тепловіддачі

В роботі розглядаються:

1. характеристики захищеного грунту,
2. основи математичного моделювання мікроклімату теплиці

траншейного типу,

3. складання моделі і її рішення.

На основі математичної моделі розроблена номограма визначення температури повітря в теплиці в залежності від кількості сонячної радіації по регіонах країни протягом року.

Висновки. Процес обігріву ґрунту можна досліджувати та отримувати залежності енергомасообміну за допомогою сучасної комп'ютерної програми MathCad. Розроблена математична модель обігріву ґрунту електричним способом, зроблений розрахунок основних параметрів обігріву ґрунту.

Література.

1. Піхтарь О. В. Действие вибрации на уплотнение почвы / О. В. Піхтарь, О.П. Узун // Матеріали науково – технічної конференції студентів та магістрантів. Випуск X. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011.- С. 25-30.
2. Куртенер Д.А., Чудновский А.Ф. Расчет и регулирование теплового режима в открытом и защищенном грунте. –Л.:Гидрометеоиздат, 1969.
3. Пенжиев А.М. Математическое моделирование теплотехнических расчетов микроклимата и аг-роклиматическое районирование гелиотеплицы// Гелиотехника. 2001. №3. Ташкент: Изд-во«Фан».
4. Справочник инженера-электрика сельскохозяйственного производства: Учебное пособие/ В. М. Баутин и др. –М.: Информагротех, 1999.-536 с.
5. Кочкин С.В. Математическое моделирование обогрева почвы грунтовых теплиц // Сборник научных трудов НГТУ. – 2006. - №1(43) – С. 81-86.

ПОБУДОВА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

Подрєзов В.І., студент гр. 122 (2М-13)
Міфле-Чередниченко С.А., викл.,
ВСП «Мелітопольський коледж ТДАТУ»

Постановка проблеми. Диференціальне рівняння є одним з основних математичних понять. Диференціальне рівняння, отримане в результаті дослідження деякого реального явища чи процесу, називають математичною або диференціальною моделлю цього явища чи процесу. Математичними моделями у вигляді диференціальних рівнянь користуються при математичному описі різноманітних явищ, процесів і залежностей, що містять елементи рухів. Поставимо задачу розглянути приклади математичного моделювання деяких задач механіки за допомогою диференціальних рівнянь і показати їх роль у їх розв'язанні.

Основні матеріали дослідження. Розглянемо простий приклад. Вожатий трамваю, вимикаючи реостат, поступово збільшує потужність вагонного двигуна таким чином, що сила тяги двигуна зростає від нульового значення прямо пропорційно часу за законом: $F_т$=120t Н, де t – час з моменту вимикання реостату. Знайти рівняння кривої відстаней руху вагона при наступних даних: вага вагона Р=10т; сила опору стала і дорівнює $F_{оп}$=200Н; початкова швидкість трамвая дорівнює нулю.

Нехай центр тяжіння вагона трамваю рухається по горизонтальній прямій, вздовж якої в напрямку його руху направимо координатну вісь Ох. Вісь Оу направимо вертикально вгору. Початок координат сумістимо з початковим положенням центру тяжіння вагону. Записуючи другий закон Ньютона і проектуючи зовнішні сили, прикладені до вагону, на вісь абсцис, отримаємо два доданки – силу тяги $F_т$=120t Н, проекція якої додатна і силу опору рухові $F_{оп}$=200 Н, проекція якої від'ємна, де t – час з моменту вимикання реостату. Прирівнюючи рівнодійну цих сил до добутку маси вагона на прискорення згідно з другим законом Ньютона, отримаємо диференціальне рівняння його руху:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=120t-200. \qquad (1)$$

Момент початку руху вагона не співпадає з моментом вимикання реостату. Момент часу t_0 , що відповідає початку руху, визначається з умови рівності сили тяги і сили опору:

$$120t_0=200, \text{ звідки } t_0=\frac{5}{3}\text{ с.} \qquad (2)$$

Для зручності обчислень проміжок часу від моменту початку руху до моменту вимикання реостату позначимо через t_1:

$$t_1 = t - \frac{200}{120} = t - \frac{5}{3}. \quad (3)$$

Тоді рівняння (1) прийме вид:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt_1^2} - 120t_1 = 0. \quad (4)$$

Інтегруючи рівняння (4), отримаємо:

$$\frac{dx}{dt_1} = \frac{120g}{P} \cdot \frac{t_1^2}{2} + C_1. \quad (5)$$

Визначимо постійну інтегрування C_1:

$$\text{при } t_1 = 0,\ \frac{dx}{dt_1} = 0, \text{ тому } C_1 = 0. \quad (6)$$

Інтегруючи рівняння (5), знайдемо загальний розв'язок рівняння (4):

$$x = \frac{120g}{P} \cdot \frac{t_1^3}{6} + C_2. \quad (7)$$

Визначаємо значення сталої інтегрування C_2:

$$\text{при } t_1 = 0,\ x = 0, \text{ тому } C_2 = 0. \quad (8)$$

Шукане рівняння руху вагона трамваю тоді має вид:

$$x = \frac{120g}{6P} \cdot (t - \frac{5}{3})^3. \quad (10)$$

Підставляючи значення P = 10000 кг та g = 9,81 м/с ^{2}, отримаємо:

$$x = \frac{120 \cdot 9{,}81}{6 \cdot 10000} \cdot (t - \frac{5}{3})^3 = 0{,}01962 \cdot (t - \frac{5}{3})^3 \text{ (м)}. \quad (11)$$

Можна навести і багато інших прикладів математичного моделювання задач механіки за допомогою диференціальних рівнянь, які також показали б можливості застосування цих рівнянь у процесі пізнання і пояснення різних видів рухів.

Висновки. Отже, різні приклади демонструють важливість розділу вищої математики «Диференціальні рівняння», оскільки диференціальні рівняння широко застосовуються у процесі пізнання та пояснення цілого ряду процесів та явищ, які нас оточують, описують закономірності роботи багатьох фізичних і технічних приладів та механізмів.

Література.

1. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.

2. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 160 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ОПИСУ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Селевич А. О., студент гр. 221 (1Е-13)
Міфле-Чередниченко С. А., викл.,
ВСП «Мелітопольський коледж ТДАТУ»

Постановка проблеми. Теорія звичайних диференціальних рівнянь знаходить свої застосування у різних областях. Візьмемо за мету показати застосування та роль звичайних диференціальних рівнянь для розв'язання практичних задач на пояснення та керування процесами в електричних колах.

Основні матеріали дослідження. В якості прикладу розглянемо процеси в закритому коливальному контурі - електричному колі, до складу якого входять котушка індуктивністю L та конденсатор ємністю C. Закритим його називають тому, що він майже не випромінює енергії у навколишній простір. Зарядивши конденсатор від джерела постійного струму та замкнувши його на котушку, можна отримати затухаючі електричні коливання. Причина затухань – активний опір провідників контуру. Електричні коливання зумовлені періодичними перетвореннями енергії електричного поля конденсатора в енергію магнітного поля котушки зі струмом і навпаки.

Диференціальне рівняння затухаючих електричних коливань в контурі одержимо на основі узагальнення закону Ома для кола, що містить джерело ЕРС (у коливальному контурі діє лише ЕРС самоіндукції):

$$U_R + U_C = E_{si}, \text{ або } IR + U = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

де $E_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ - ЕРС самоіндукції, $U_R = IR$ - напруга на активному опорі, $U_C = U$ - напруга на конденсаторі. Перейдемо до миттєвих значень величин.

$$\text{Оскільки } i = q', \; u = \frac{q}{C}, \text{ а } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = i' = q'', \text{ то}$$

$$q'R + \frac{q}{C} = -Lq'' \text{ або } Lq'' + q'R + \frac{q}{C} = 0 \text{ чи } q'' = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}q'.$$

Це і є диференціальне рівняння затухаючих електричних коливань у контурі. Якщо позначити

$$\frac{1}{LC} = \omega^2, \text{ а } \frac{R}{L} = 2\beta,$$

рівняння та його розв'язок відповідно приймуть вид:

$$q'' = -2\beta q' - \omega^2 q, \quad q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha),$$

де β - коефіцієнт затухання. Як бачимо, заряд на конденсаторі змінюється з часом по гармонічному закону. Період затухаючих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \text{ або } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}},$$

з чого робимо важливий висновок: коливання в контурі можливі за умови:

$$\frac{1}{LC} \rangle \left(\frac{R}{2L}\right)^2, \text{ тобто при } R \langle 2\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ або } L \rangle \frac{CR^2}{4}.$$

Якщо активний опір кола дорівнює нулю (ідеальний випадок), наведена вище формула періоду затухаючих коливань переходить у формулу Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

а отримане диференціальне рівняння затухаючих електричних коливань у контурі переходить у рівняння незатухаючих коливань:

$$q'' = -\frac{1}{LC}q.$$

Розв'язком цього рівняння є функція:

$$q = q_m cos(\omega t + \varphi),$$

де q_m - амплітуда коливань заряду на конденсаторі з циклічною частотою $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, φ - початкова фаза коливань.

Аналіз рівнянь показує, що існує повна аналогія між коливаннями різних видів - електричними та механічними, наприклад, тягарця на пружині, рівняння яких та його розв'язок відповідно:

$$x'' = -\frac{k}{m}x, \quad x = x_m cos(\omega t + \varphi),$$

де x_m - амплітуда, ω - циклічна частота, φ - початкова фаза коливань.

Висновки. Таким чином, досліджуючи диференціальні рівняння різних видів коливань (навіть якісно), можна зробити цілий ряд висновків про закономірності тих процесів, які вони описують, про аналогію цих процесів, тощо. Розглядання конкретних задач на дослідження електричних коливань та багатьох інших електричних процесів показує: математичний апарат диференціальних рівнянь дає можливість глибоко проникнути у світ цих процесів та явищ, описати механізм їх протікання та розвитку, передбачити і спрогнозувати їхнє майбутнє.

Література.

1. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. – К. : Техніка, 2003. – 368 с.

2. Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой: Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 208 с.

ЗАМКНЕНА МОДЕЛЬ СМО. ЗАДАЧА НАЙКРАЩОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Тішков Максим, ст.21 КН
Іщенко О. А., ст. викладач
Таврійський державний агротехнологічний університет

Розглянемо системи масового обслуговування, для яких інтенсивність вхідного потоку заявок λ, залежить від стану системи, причому джерело вимог є внутрішнім і генерує обмежений потік заявок. У розглянутій моделі ємність джерела вимог слід вважати обмеженою. Вхідний потік вимог виходить з обмеженого числа експлуатованих машин (наприклад, комп'ютерів) (N - k), які у випадкові моменти часу виходять з ладу і потребують обслуговування. При цьому кожна машина (комп'ютер) з (N-k) знаходиться в експлуатації. Генерує пуассоновскнй потік вимог з інтенсивністю X незалежно від інших об'єктів, загальний (сумарний) вхідний потік має інтенсивність $(N\text{-}k)\cdot\lambda$. Вимога, що надійшла в систему в момент, коли вільний хоча б один канал, негайно йде на обслуговування. Якщо вимога застає всі канали зайнятими обслуговуванням інших вимог, то воно не залишає систему, а стає в чергу і чекає, поки один із каналів не стане вільним. Таким чином, в замкненій системі масового обслуговування вхідний потік вимог формується з вихідного.

Стан S_k системи характеризується загальним числом вимог, що знаходяться на обслуговуванні та в черзі, дорівнює k. Для даної замкненої системи, очевидно, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$. При цьому якщо система знаходиться в стані S_k, то число об'єктів, що перебувають в експлуатації, дорівнює (N - k). Якщо λ - інтенсивність потоку вимог у розрахунку на один канал, то:

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\cdot\lambda, & 0 \le k \le N \\ 0. & k > N; \end{cases} \quad \mu_k = \begin{cases} k\cdot\mu, & 0 \le k \le R, \\ R\cdot\mu, & R \le k \le N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Система алгебраїчних рівнянь, що описують роботу замкненої СМО в стаціонарному режимі, виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} 0 = -\psi\cdot N\cdot P_0 + P_0; \\ 0 = (N-k+1)\cdot\psi\cdot P_{k-1} - [(N-k)\cdot\psi + k]\cdot P_k + (k+1)\cdot P_{k+1}, & 0 < k < R \\ 0 = (N-k+1)\cdot\psi\cdot P_{k-1} - [(N-k)\cdot\psi + R]\cdot P_k + R\cdot P_{k+1}, & R \le k < N \\ 0 = \psi\cdot P_{N-1} - R\cdot P_N. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо ймовірність k-го стану:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\cdot\psi^{\mathrm{k}}}{k!\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & 1 \le k < R \\ \dfrac{N!\cdot\psi^{\mathrm{k}}}{R!\cdot R^{k-R}\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & R \le k \le N \end{cases} \qquad (1)$$

Величина P_0 визначається з умови нормування $\sum_{k=0}^{N} P_k$ отриманих за формулою (1) результатів для P_k, *k = 0, 1, 2, ... , N*.

Визначимо наступні імовірнісні характеристики системи:

- середнє число вимог в черзі на обслуговування: $L_q = \sum_{k=R}^{N}(k-R)\cdot P_k$; (2)
- середнє число вимог, що знаходяться в системі: $L_S = \sum_{R=1}^{N} k \cdot P_k$; (3)
- середнє число каналів, які «простоюють» із-за відсутності роботи: $\overline{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1}(R-k)\cdot P_k$; (4)
- коефіцієнт простою обслуговуваного об'єкта (машини) в черз $\alpha_1 = \frac{L_q}{N}$; (5)
- коефіцієнт використання об'єктів (машин): $\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N}\right)$; (6)
- коефіцієнт простою обслуговуючих каналів: $\alpha_3 = \frac{\overline{R}_n}{R}$; (7)
- середній час очікування обслуговування (час очікування обслуговування в черзі): $W_q = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu}$. (8)

Нехай для обслуговування десяти персональних комп'ютерів (ПК) виділено два інженера однакової продуктивності. Потік відмов (несправностей) одного комп'ютера - пуассонівський з інтенсивністю *λ = 0,2*. Час обслуговування ПК підпорядковується показовому закону. Середній час обслуговування одного ПК одним інженером становить: *t =1,25 год*. Можливі наступні варіанти організації обслуговування:- обидва інженера обслуговують всі десять комп'ютерів, так що при відмові ПК його обслуговує один з вільних інженерів, в цьому випадку *R = 2, N = 10*;- кожен з двох інженерів обслуговує за п'ять закріплених за ним ПК. В цьому випадку *R = 1, N = 5*.Необхідно обрати найкращий варіант організації обслуговування ПК.

1. Обчислимо параметр обслуговування: $\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$

2. Наведена інтенсивність: $\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25.$

3. Обчислимо імовірнісні характеристики СМО для двох варіантів організації обслуговування ПК.

Варіант 1. 1. Визначимо ймовірності станів системи

$$:P_k = \begin{cases} \frac{N!\cdot\psi^k}{k!\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & 1 \le k < R \\ \frac{N!\cdot\psi^k}{R!\cdot R^{k-R}\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & R \le k \le N \end{cases};$$

$P_1 = 2{,}5\cdot P_0$; $P_2 = 2{,}812\cdot P_0$; $P_3 = 2{,}812\cdot P_0$; $P_4 = 2{,}416\cdot P_0$;
$P_5 = 1{,}864\cdot P_0$; $P_6 = 1{,}154\cdot P_0$; $P_7 = 0{,}577\cdot P_0$; $P_8 = 0{,}216\cdot P_0$;
$P_9 = 0{,}054\cdot P_0$; $P_{10} = 0{,}007\cdot P_0$.

Враховуючи, що $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$ і використовуючи результати розрахунку P_k, обчислимо P_0: враховуючи, що $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$ та використовуючи результати розрахунку P_k, обчислимо $P_{0:}\sum_{k=0}^{N} P_k = P_0 + 2{,}5\cdot P_0 + \ ... \ + 0{,}07\cdot P_0 = 1$. Звідки $P_0 = 0{,}065$. Тоді $P_1 \approx 0{,}162$; $P_2 \approx 0{,}183$; $P_3 \approx 0{,}182$; $P_4 \approx 0{,}16$; $P_5 \approx 0{,}11$; $P_6 \approx 0{,}075$; $P_7 \approx 0{,}037$; $P_8 \approx 0{,}014$; $P_9 \approx 0{,}003$; $P_{10} \approx 0{,}000$.

-Визначимо середнє число комп'ютерів в черзі на обслуговування:

$L_q = \sum_{k=R}^{N}(k-R)P_k = 0{,}18 + 0{,}32 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}183 + 0{,}084 + 0{,}021 =$ 0,42 Визначимо середнє число ПК, що знаходяться в системі (на обслуговуванні і в черзі):$L_S = \sum_{R=1}^{N} k \cdot P_k = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + 5 \cdot P_5 + 6 \cdot P_6 + 7 \cdot P_7 + 8 \cdot P_8 + 9 \cdot P_9 + 10 \cdot P_{10} = 3{,}11$

Визначимо середнє число інженерів, що простоюють через відсутність роботи: $\overline{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1}(R-k) \cdot P_k = (2-0) \cdot P_0 + (2-1) \cdot P_1 = 0{,}292;$

Коефіцієнт простою персон. комп'ютера в черзі:$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{1{,}42}{10} = 0{,}142.$

Коефіцієнт використання комп'ютерів визначається:$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N}\right) = 0{,}689.$

Коефіцієнт простою обслуговуючих інженерів:$\alpha_3 = \frac{\overline{R}_n}{R} = \frac{0{,}292}{2} = 0{,}146.$

Середній час очікування обслуговування ПК: $W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu} = 1{,}01$ час.

Варіант 2. Визначимо ймовірності станів системи:

$P_1 \approx 0{,}249;\ P_2 \approx 0{,}249;\ P_3 \approx 0{,}187;\ P_4 \approx 0{,}093;\ P_5 \approx 0{,}023.$

Звідки: P_0 = 0,199. Середня кількість комп'ютерів у черзі на таке обслуговування:$L_q = \sum_{k=R}^{N}(k-R) \cdot P_k = 0{,}994.$

Середня кількість комп'ютерів, що знаходяться на обслуговуванні та в черзі розраховується так: $L_S = \sum_{R=1}^{N} kP_k = 1 \cdot P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 = 1{,}8$

Середнє число інженерів, що простоюють через відсутність роботи:

$$\overline{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1}(R-k) \cdot P_k = (1-0) \cdot P_0 = 0{,}199.$$

Коефіцієнт простою комп'ютера в черзі:$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{0{,}994}{5} = 0{,}199.$

Коефіцієнт використання комп'ютерів:$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N}\right) = 1 - \left(\frac{1{,}8}{5}\right) = 0{,}64.$

Коефіцієнт простою обслуговуючих інженерів:$\alpha_3 = \frac{\overline{R}_n}{R} = \frac{0{,}199}{1} = 0{,}199.$

Середній час очікування обслуговування ПК:$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu} = 1{,}56$ час.

Зведемо отримані результати по двум варіантам в наступну таблицю:

Підсумкові імовірнісні характеристики	**Варіанти**	
	1	2
$\boldsymbol{\alpha_1}$	0,142	0,199
α_2	0,689	0,64
α_3	0,146	0,199
W_q, час	1,01	1,56

Таким чином, у варіанті 1 кожен комп'ютер стоїть у черзі в очікуванні початку його обслуговування приблизно *0,142* частини робочого часу, що менше цього показника при варіанті 2 організації робіт. Далі у варіанті 1 ймовірність того, що ПК у будь-який момент часу буде працювати вищий, ніж у варіанті 2, і дорівнює $\alpha_2^1 = 0{,}689 > \alpha_2^2 = 0{,}64$. Очевидно, варіант 1 організації робіт по обслуговуванню ПК ефективніше, ніж варіант 2.

ЛАЗЕРНА ДОПЛЕРІВСЬКА ІНТЕРФЕРОМЕТРІЯ ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧАСТИНОК У РОЗЧИНАХ

Федькін В. А., Яценко В.В. ст. 12 Ен,
Морозов М. В., к. ф.-м. н., доц..
Таврійський державний агротехнологічний університет

Постановка проблеми. Оптичні методи лазерної доплерівської інтерферометрії застосовуються в різних галузях науки й техніки, у тому числі при вимірюванні швидкості частинок при електрофорезі [1]. Тому актуальні дослідження, які направлені на вдосконалення та використання лазерних методів вимірювання параметрів домішок у водних розчинах.

Основні матеріали дослідження. Для проведення вимірювання параметрів частинок домішок у воді використовується диференційна схема доплерівського інтерферометра [2] (рисунок 1).

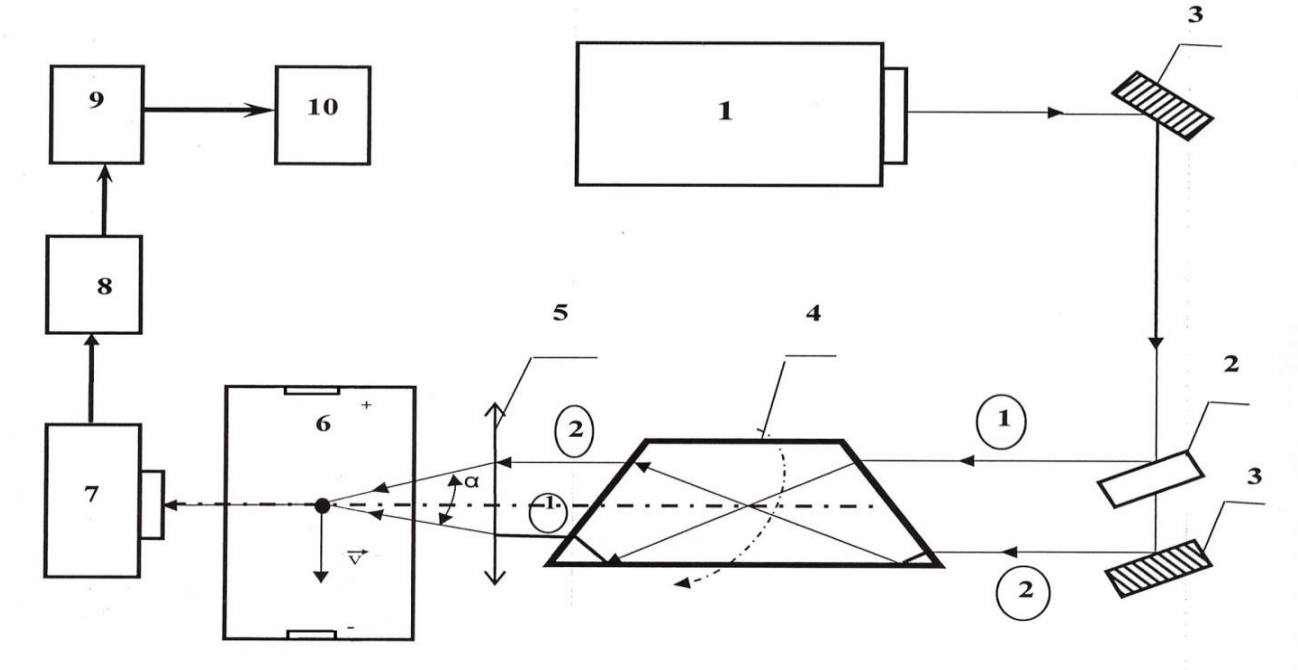


Рисунок 1 – Блок-схема доплерівського інтерферометра для вимірювання швидкості частинок: 1 – лазер ЛГН-222; 2 – світлоподільник; 3 – дзеркала; 4 – призма Дове; 5 – лінза; 6– вимірювальна камера; 7 – фотоприймач (ФЕП 84-5); 8- осцилограф (С 9-8); 9 – аналогово-цифровий перетворювач; 10 – персональний комп'ютер

Частота f доплерівського сигналу визначається швидкістю υ руху частинки:

$$f = \frac{2 \cdot \upsilon \cdot n}{\lambda} \cdot \sin \alpha / 2, \qquad (1)$$

де λ – довжина хвилі випромінювання лазера;
n – показник заломлення розчину;
$\alpha/2$ – кут розсіювання випромінювання.

Якщо система інтерференційних смуг орієнтована у горизонтальній площині, вимірюється електрофоретична швидкість υ_1 руху частинки та відповідно формули Смолуховського визначається електрокінетичний дзета-потенціал частинки [3]:

$$\xi = \frac{3 \cdot \upsilon_1 \cdot \eta}{2 \cdot E \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_o}, \tag{2}$$

де η – в'язкість розчину;

ε – відносна діелектрична проникність;

ε_0 – електрична стала;

E – напруженість електричного поля.

Потім повертають призму Дове на кут 45^0. При цьому система інтерференційних смуг повертається на кут 90^0. Реєструється частота f_2 доплерівського сигналу, обчислюється вертикальна складова υ_2 швидкості частинки при седиментації або флотації та, використовуючи закон Стокса, визначається діаметр частинки:

$$D = \sqrt{\frac{18 \cdot \eta \cdot \upsilon_2}{g \cdot (\rho - \rho_1)}}, \tag{3}$$

де g – прискорення вільного падіння;

ρ – густина домішок;

ρ_1 – густина розчину.

Необхідні обчислення, обробка та аналіз експериментальних даних виконуються за допомогою персонального комп'ютера. Метод лазерної доплерівської інтерферометрії використовують також для контролю якості питної води шляхом вимірювання концентрації частинок домішків.

Висновки. Розглянуто методи лазерної доплерівської інтерферометрії для вимірювання швидкості, ефективного діаметра, дзета-потенціала і концентрації частинок домішків у водному розчині. Представлені технічні характеристики методу вимірювання при оптимальних параметрах лазерної доплерівської установки та методика визначення концентрації домішків у розчині.

Література.

1. Морозов М. В. Методи лазерної доплерівської інтерферометрії вимірювання швидкості та діаметру частинок домішок стічних вод промислових підприємств / М. В. Морозов, С. І. Мовчан // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 12. Т. 1. – Мелітополь: 2012. – С. 75 – 79.

2. Патент № 58534 Україна, МПК[7] G 01 N 15 / 00. Пристрій для вимірювання швидкості частинок домішок у рідині / М. В. Морозов, С. І. Мовчан. - №2010 14210; заявл. 29. 11. 2010, опубл. 11. 04. 2011, Бюл. № 7.

3. Патент на корисну модель № 89040 Україна, МПК[7] (2014.01) G 01 N 15 / 00. Спосіб вимірювання швидкості частинок у розчині / М. В. Морозов, Л. Є. Нікіфорова, С. І. Мовчан. – Заявка № u 2013 12593; заявл. 28. 10. 2013, опубл. 10. 04. 2014, Бюл. № 7.

ЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИКИ З МУЗИКОЮ

Шепель М.О., студент 11гр. КН
Бойко С.Б., старший викладач кафедри ВМ та Ф
Таврійський державний агротехнологічний університет

Постановка проблеми. Слухаючи музику, ми потрапляємо в чарівний світ звуків. Вирішуючи завдання, занурюємося в суворий простір чисел. І не замислюємося про те, що світ звуків і простір чисел здавна сусідять один з одним. Зв'язок математики і музики обумовлений як історично, так і внутрішньо.

Основні матеріали дослідження. Давньогрецький філософ і математик Піфагор в області теорії музики зробив відкриття, суть якого полягає в тому, що поєднання звуків, що видаються струнами, найбільш милозвучно, якщо довжини струн музичного інструменту знаходяться в правильному чисельному відношенні один до одного. Використавши монохорд - напівінструмент, напівприбор, він описав математично звучання натягнутої струни. Архит встановив, що висота тону (або частота коливання струни) обернено пропорційна її довжині. Є кілька назв тетрахорду - чотириступеневого звукоряду в межах кварти: дорійський, фрігійський і лідійський лад музичної гами. Лише 12 квінт наближено рівні 7 октавам, а інтервал, що розділяє їх, називається Піфагоровою комою. Незважаючи на свою малість, Піфагорова кома протягом століть "різала вухо" музикантам. Взявши відношення (3/2) 12:27, можна знайти чисельне значення Піфагорової коми (1,0136). У першій половині XVII ст. І.Кеплер встановив сім основних гармонійних інтервалів: октаву - 2/1, більшу сексту - 5/3, малу сексту - 8/5, чисту квінту - 3/2, чисту кварту - 4/3, велику терцію - 5/4 і малу терцію - 6/5.

Близько 1700 року німецький органіст А. Веркмайстер здійснив геніальне рішення: відмовився від досконалих і недосконалих консонансів Піфагорової гами. Зберігши октаву, він розділив її на 12 рівних частин. Піфагорова кома зникла. Новий музичний лад дозволив виконувати транспонування мелодії. Виявилося, для побудови гами набагато зручніше користуватися логарифмами відповідних частот: : $\log_2 W_0$, $\log_2 W_1,...,\log_2 W_m$. Октава $(W_0, 2W_0)$ при цьому перейде в проміжок від $\log_2 W_0$ до $\log_2 W_0 + 1$, тобто в проміжок довжиною, який дорівнює одиниці. Геометрична прогресія $W_0, W_1,...,W_m$ буде відповідати арифметичній $\log_2 W_0$, $\log_2 W_1,...,\log_2 W_m$. Таким чином, на осі логарифмів шкала буде складатися з точок *A, A + 1/m; A + 2/m; ...; A + 1*, де *A* - величина. На скільки ж частин повинна бути розділена музична шкала, чому дорівнює *m*? Аналіз багатьох традиційних прикладів

народної музики показав, що найчастіше в ній зустрічаються інтервали, що виражаються за допомогою відносин частот: 2 (октава), 3/2 (квінта), 5/4 (терція), 4/3 (кварта), 5 / 3 (секста), 9/8 (секунда), 15/8 (септима). Ці та інші висновки показали, що музична шкала повинна бути розділена на 12 частин. Відношення сусідніх частот рівномірно-темперованого ладу постійне і рівне.

З'ясовано, що в основу прийомів диригування покладені дводольні, трьохдольні і чотиридольні фігури помахів.

Музикант Девід Макдональд вирішив перекласти цифри числа π на ноти, записав, як звучить число з точністю до *122* знаку після коми та виконав на піаніно. Отримано дуже захоплюючій твір.

Висновки. Досліджуючи зв`язок математики з музикою можна зробити певні висновки: дві струни, що звучать, визначають консонанс, якщо їх довжини відносяться як цілі числа, що утворюють трикутне число *10 = 1 + 2 + 3 + 4*, тобто як *1: 2, 2: 3, 3: 4*. Причому, чим менше число *n* у відношенні *n: (n + 1),* де *n = 1,2,3,* тим співзвучніший інтервал, що отримується. Комп'ютери складають музику, правда, досить посередню. У ній немає гри і вільного дихання, які важко вкладаються в математичні канони. До цих пір нікому не вдавалося знайти алгоритм, який породжує просту і красиву мелодію. Геніальний твір - це результат натхнення і майстерності його творця.

Література.

1. Вахромеев В. Елементарная теория музики / В. Вахромеев. – МУЗГИЗ, 1962. – 255 с.

2. Зильберман Ю., Муратова В. Музыка без границ // Киев. ведомости. – 2005. – 17 авг.

3. Дилецький М. Граматика музикальна: фотокопія рукопису 1723 р. / М.Дилецький. – К.: Музична Україна, 1970. – 109 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СУМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ.

Шпіталь К.О. студ. 41 КН,
Величко І.Г. к.ф.-м.н., доц.
Таврійський державний агротехнологічний університет

Класична задача про щасливі білети формулюється наступним чином. Є пачка квитків, кожен з яких має номер, який складається з 6 цифр. Перший білет має номер 000000, а останній 999999. Білет вважається щасливим, коли сума перших трьох цифр його номера дорівнює сумі трьох останніх цифр номера. Так, наприклад, щасливим є квіток з номером 331520. Требі визначити кількість щасливих білетів в пачці.

Задача зводиться до визначення кількості розв'язків діофантового рівняння $i+j+k=l+m+q$, де кожна зі змінних є цифрою. В узагальненому вигляді розглядається рівняння $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j$, де кожна зі змінних є елементом множини $\{0,1,2,\ldots,M-1\}$. Розглянутий вище випадок відповідає значенням параметрів $n=3$, $M=10$. Введемо в розгляд функцію $\delta(x)$, визначену на множині цілих чисел, таку що $\delta(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\in Z\setminus\{0\}\end{cases}$. В цьому випадку шукана кількість дорівнює

$$S=\sum_{x_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{y_n=0}^{N-1}\delta\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right). \qquad (1)$$

Функцію $\delta(x)$ можна задати аналітично виразом

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(tx)dt \qquad (2)$$

Після підстановки (2) в (1), після тотожних перетворень, матимемо остаточну формулу

$$S=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}Mt}{\sin^{2n}t}dt \qquad (3)$$

В доповіді обговорюються питання порівняння чисельної реалізації обчислень за формулами (1) та (3).

ПРОБІРКА ПРОТИ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Штефан Д.І., учень 9 класу ЗТЛ dimka1105@rambler.ru
Білоус С.Ю., к. п. н., iator@mail.ru
Лабораторія Національного центру «МАН України»

Постановка проблеми. В запропонованій роботі досліджено парадоксальний експеримент, в якому спостерігається, як пробірка, занурена в рідину, налиту в іншу пробірку, при перевертанні рухається вгору всупереч тяжінню. Опис цього досліду наводиться у посібнику [1].

Аналіз останніх досліджень. Автор посібника [1], шкільний вчитель, зробив велику, корисну і ґрунтовну роботу, представивши в своїй книжці більш ніж 400 цікавих дослідів з фізики. На жаль, багато з цих дослідів передруковується без посилань на джерело.

Наведемо опис та пояснення цього досліду так, як це пропонується в [1, С.18]: «Підберіть дві пробірки таким чином, щоб одна входила всередину іншої з невеличким зазором. Заповніть більшу пробірку наполовину водою і вставте усередину неї меншу. Потім перекиньте їх. З більшої пробірки вода витікатиме, а внутрішня пробірка підіймається вгору. Поясніть, чому внутрішня пробірка не падає, а підіймається вгору».

В коротких поясненнях до дослідів автор зазначає: «Внутрішня пробірка утримується атмосферним тиском та силами взаємодії між молекулами води і скла. Під дією цих сил пробірка і підіймається вгору». Зрозуміло, що це пояснення лише двома реченнями є тільки першим кроком до розуміння, чому пробірка, не зважаючи на силу тяжіння, вперто підіймається вгору.

Мета статті. Ретельно розібратися в досліді із «парадоксальною пробіркою» ми й поставили собі за мету: дослідити умови і особливості руху пробірки, яка всупереч тяжінню, підіймається всередині більшої пробірки при витіканні з більшої пробірки води. З точки зору розвитку фізики взагалі, а також методичного наповнення навчання, *вважаємо актуальним* розробляти теоретичне підґрунтя оригінальних дослідів, оскільки саме це й складає науковий підхід за принципом: «спостереження – відтворення в експерименті – теоретичне пояснення з точки зору обраних фізичних моделей».

Основні матеріали дослідження. Задача розв’язувалася за допомогою фізичної моделі, в якій було враховано як вплив тяжіння та атмосферного тиску, так і властивості рідини: її в’язкість та поверхневий натяг. Щоб врахувати роль поверхневого натягу, розглянуто дві моделі:

1) із проміжку між пробірками витікає потік води, який має форму тонкостінного циліндра (діаметром $2R$, товщина стінок l);
2) витікає потік крапель діаметром l.

Показано, що результати, одержані за різними моделями, відрізняються в півтора рази. Для спрощення викладок скористаймось далі першою моделлю - *тонкостінним циліндром.* Знайдемо поверхневу енергію

(коефіцієнт поверхневого натягу σ, причому врахуймо те, що це коефіцієнт поверхневого натягу на межі вода-скло дотик, поки вода не витікає з пробірки, і коефіцієнт поверхневого натягу на межі вода-повітря після цього):

$$dW_{пов} = \sigma dS = \sigma \cdot 4\pi R \cdot udt = 4\pi R\sigma v \frac{R}{2l} dt\,. \qquad (1)$$

Запишемо закон збереження енергії під час руху внутрішньої пробірки:

$$\frac{2\pi R^3 L\eta}{l^3} v + \frac{2\pi R^3 \sigma}{l} + \left(\frac{\pi R^4 \rho v^2}{8l^2} + \frac{\pi R^3 \rho H_n a}{4l} \right) - \pi R^2 \rho g H_n + ma + mg = 0. \qquad (2).$$

Виразивши із (2) прискорення, отримаємо диференціальне рівняння, увівши сталі (або вирази, які залежать тільки від координати):

$$\ddot{x} = \frac{D - B(\dot{x})^2 - C\dot{x}}{A}\,. \qquad (3)$$

Наведемо вирази для сталих, які ми увели в рівняння (3), для зручності:

$$A = m + \frac{\pi R^3 \rho H_n}{4l}, \qquad B = \frac{\pi R^4 \rho}{8l^2}, \qquad C = \frac{2\pi R^3 L\eta}{l^3}, \qquad D = \pi R^2 \rho g H_n - \frac{2\pi R^3 \sigma}{l} - mg\,.$$

Рівняння (3) потребує чисельного інтегрування [2]. Тому нами була розроблена комп'ютерна програма в середовищі візуального програмування Delphi 7 мови програмування Object Pascal.

Можливості програми:

– дозволяє побудувати графіки прискорення, координати та швидкості від часу;
– здійснює побудову сім'ї графіків в залежності від параметрів;
– дозволяє змінювати масштаб побудови.

Інтерфейс програми представлено на рис.1.

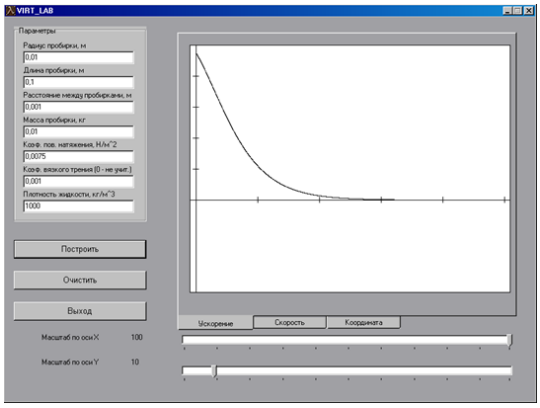


Рисунок 1. Інтерфейс програми.

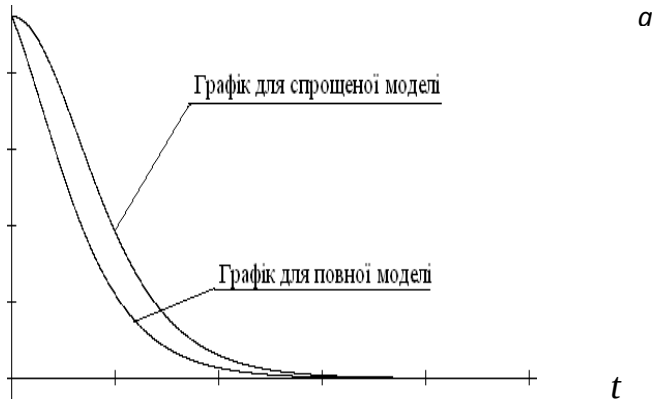


Рисунок 2. Порівняння графіків.

В результаті були встановлені залежності прискорення, швидкості та координати при русі пробірки від її розмірів та зазору між пробірками.

Крім того, розглянуто спрощений підхід, який дає змогу отримати розв'язок аналітично, для цього знехтуємо поверхневим натягом та в'язкістю води, а також вважатимемо $L = H_0$, тобто внутрішня пробірка повністю занурена у воду. Із урахуванням зроблених припущень встановлено швидкість руху внутрішньої пробірки:

$$v_{вст.} = \sqrt{\frac{Z}{K}} = \sqrt{\frac{\left(\pi R^2 \rho g L - mg\right) \cdot 8l^2}{\pi \rho R^4}}.$$

Якщо в обраній моделі змінювати поверхневий натяг у 10-1000 разів, помітних відмінностей між графіками (Рис.2) не спостерігається. Тобто, якщо говорити про властивості рідини, то, виявляється, що вплив на рух пробірки відбувається лише при суттєвих змінах (у 100-1000 разів) коефіцієнту в'язкості. Для обраного нами масштабу, графік рис.2 при значенні в'язкості для масла в порівнянні з тим, що ми отримали для води, взагалі перетворюється в ледь помітну точку.

Тобто використана нами модель та її комп'ютерне представлення прогнозують взагалі *відсутність* ефекту руху пробірки вгору. Щоб упевнитися в слушності моделі, ми провели експеримент, де замість води використовувалася олія з коефіцієнтом в'язкості 0,968 *Па·с* або гліцерин з в'язкістю 1,5 *Па·с* проти значення в'язкості для води 10^{-3} *Па·с*.[3] При цьому ми переконалися в тому, що рух пробірки вгору для в'язких рідин *не спостерігається*, є лише певний ледь помітний поштовх. Поверхневий натяг в цих випадках не відіграє ролі, оскільки коефіцієнти поверхневого натягу гліцерину (64 *мН/м*) та олії (близько 40 *мН/м*) практично такі ж самі, як у води (близько 70 *мН/м*) [3].

Висновок. Розглянута задача розв'язувалася за допомогою фізичної моделі, в якій було враховано як вплив тяжіння та атмосферного тиску, так і властивості рідини: її в'язкість та поверхневий натяг. Внаслідок складності отриманого диференціального рівняння, для опису руху пробірки було розроблено комп'ютерну програму в середовищі візуального програмування Delphi 7 на мові програмування Object Pascal.

Експериментальні дані підтверджують закономірності руху пробірки, виявлені за допомогою фізичної моделі та її комп'ютерного втілення. Аналіз отриманих результатів призвів до висновку, що для реальних рідин з невеликими значеннями в'язкості розв'язок спрощеного рівняння практично співпадає з розв'язком "повного" рівняння. Поверхневий натяг практично не впливає на закономірності руху пробірки. Це дає змогу уточнити наведені в літературі пояснення до експерименту [1].

Практичне значення дослідження полягає в тому, що отримані висновки можуть бути використані при навчанні фізики на поглибленому рівні на шкільних заняттях, а також у гуртках Малої академії наук, факультативних заняттях тощо.

Список використаних джерел.

1. Горев Л.А. Занимательные опыты по физике. Кн. для учителя. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1985. – 175 с., ил.

2. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 710 с.

3. Енохович А.С. Справочник по физике и технике: Уч. пособие. – 3 изд. перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1989. – 224 с.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В КАТОДНОМУ ЕМІТЕРІ, ЩО МАЄ ФОРМУ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

Щербаков Дмитро, ст. гр. 11МБ
Тітов І.М., ст.викл. titovigorn@gmail.com
Таврійський державний агротехнологічний університет

На сьогодні розроблено багато моделей, які описують перебіг процесів на катоді, але вони не в повній мірі відповідають отриманим експериментальним результатам. Однією з проблем, які потребують вирішення, є розробка такої моделі розрахунку розподілу тепла на катоді при виникненні вакуумної дуги, яка б в явному вигляді враховувала залежність коефіцієнту теплопровідності та теплоємності від температури, які для кожного металу різні. Це необхідно для підбору оптимальних параметрів, які дозволять отримувати потоки плазми з оптимальними характеристиками, оскільки процеси на катоді, надають основний внесок в іонний склад плазмового струменя, визначають енергію іонів, що у свою чергу впливає на результат їх взаємодії з підкладкою і тим самим визначає властивості покриттів, що наносяться. Другою проблемою є питання про геометрію (форму) катодного емітера. До теперішнього часу запропоновані тільки математичні моделі, в яких катодний емітер має циліндричну форму. Тому розробка та використання моделі, яка б дозволила оптимальні параметри вирахувати аналітично та враховувала реальну форму емітера, яка близька до зрізаного конуса, є актуальним питанням.

Для багатьох металів, залежності теплоємності і теплопровідності від температури можна представити у вигляді наступних лінійних рівнянь відповідно:

$$c(T)=c_0(1+\alpha T), \qquad \lambda(T)=\lambda_0(1+\beta T).$$

Рівняння теплопровідності для емітера у формі зрізаного конуса в циліндричній системі координат з урахуванням аксіальної симетрії задачі (температура не залежить від полярного кута φ) має вигляд

$$\rho C_0(1+\alpha T)\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_0\left(\left(\bar{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\bar{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(1-\beta T)\left(\bar{e}_r\frac{\partial T}{\partial r}+\bar{e}_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right)-j_e\frac{C_e}{e}\frac{\partial T}{\partial z}+j_e\chi \quad (1)$$

де $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_z$ - орти циліндричної системи координат, j_e - густина автоелектронного струму з катоду, ρ - густина матеріалу емітера, c_e – електронна теплоємність, χ - питомий опір, що змінюється за лінійним законом $\chi=\chi_0 T$.

Рівняння теплопровідності (1) необхідно доповнити:

початковою умовою: $T(r,z,0)=T_0,$ (2)

та граничними умовами: біля основи емітера $T(r,0,t)=T_0,$ (3)

на границі емісії: на верхній поверхні (при $z=H$, H - висота емітера)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=H} = -\frac{j_e}{e}\Delta\varepsilon, \qquad (4)$$

на боковій поверхні емітера у формі зрізаного конуса $\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = -\frac{j_e}{e}\Delta\varepsilon.$ (5)

Граничні умови (4) і (5), на емісійних поверхнях, обумовлені тим, що середня енергія електронів провідності може відрізнятися від тієї енергії , що уносять емітовані електрони. Ця обставина, разом з джоулевим джерелом тепла, може призводити до додаткового розігріву чи охолодження катода. Вперше на важливість цього ефекту звернув увагу Ноттінгам. Отже граничні умови (4) і (5) є аналітичним записом ефекту Ноттінгама.

В граничній умові (5) знайдемо $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$ - похідну від температури уздовж напрямку, перпендикулярного до бічної поверхні зрізаного конуса. Вектор нормалі визначається співвідношенням $\vec{n} = \frac{grad\,U}{|grad\,U|}$, де

$U = z - \frac{R_2 H}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{r}{R_2}\right) = U(r,z)$ – рівняння бічної поверхні зрізаного конуса в циліндричній системі координат, R_1 та R_2 - радіуси верхньої та нижньої основ емітера. Обчислюючи $grad\,U = \frac{H}{R_2 - R_1}\vec{e}_r + \vec{e}_z$ $|grad\,U| = \sqrt{1 + \frac{H^2}{(R_2 - R_1)^2}}$, звідки для похідної за напрямком матимемо

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{H^2}{(R_2 - R_1)^2}}}\left(\frac{H}{R_2 - R_1}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z}\right). \qquad (6)$$

Оскільки $z = r \Big/ tg\frac{\alpha}{2} = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$, то $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial r} tg\frac{\alpha}{2}$ $\frac{H}{R_2 - R_1}\frac{\partial T}{\partial r}$,

де α - кут розгортки конуса. Остаточно для $\partial T / \partial \vec{n}$, отримуємо вираз

$$\lambda \frac{tg\frac{\alpha}{2} + \frac{H}{R_2 - R_1}}{\sqrt{1 + \frac{H^2}{(R_2 - R_1)^2}}} \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r = z tg\frac{\alpha}{2}} = -\frac{j_e}{e}\Delta\varepsilon. \qquad (7)$$

Гранична умова (7) є аналітичним записом ефекту Ноттінгама на бічній поверхні катодного емітера, що має форму зрізаного конуса.

Запропонована математична модель, що складається зі співвідношень (1)-(4) і (7), враховує залежність коефіцієнту теплопровідності та теплоємності від температури, а також реальну форму катодного емітера, яка близька до зрізаного конуса, і дозволить розрахувати оптимальні параметри першої стадії вакуумного катодно-дугового процесу.

Укладачі:

Величко І.Г. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри Вища математика та фізика ТДАТУ

Величко О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, докторант, відповідальна за наукову роботу кафедри Вища математика та фізика ТДАТУ

Тези друкуються в авторських редакціях з мінімальними редакторськими правками

ТДАТУ, 72312, м. Мелітополь, пр. Б. Хмельницького, 18

Кафедра Вищої математики та фізики

тел. 42-68-74, email: *vmf@tsatu.edu.ua*

Науково-дослідна частина ТДАТУ, тел/факс (0619) 42-04-35