

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО**

Факультет енергетики і комп'ютерних технологій

Кафедра «Вища математика і фізика»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

РОБОЧИЙ ЗОШИТ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр»
зі спеціальностей 201 «Агрономія» та
203 «Садівництво, плодоовочівництво та виноградарство»
(заочна форма навчання)

Запоріжжя, 2024

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО**

Факультет енергетики і комп'ютерних технологій

Кафедра «Вища математика і фізика»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

РОБОЧИЙ ЗОШИТ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр»

зі спеціальностей 201 «Агрономія» та

203 «Садівництво, плодоовочівництво та виноградарство»

(заочна форма навчання)

Запоріжжя, 2024

*Рекомендовано методичною комісією Навчально-наукового інституту
загальноуніверситетської підготовки
Таврійського державного агротехнологічного університету
імені Дмитра Моторного
(протокол № ____ від « ____ » _____ 2024 р.)*

Укладач:

Дяденчук А. Ф., кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри «Вища математика і фізика», Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного.

Рецензенти:

Кравець В.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і фізики, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного;

Сімченко С.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, математичного моделювання та фізики, Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій.

Дяденчук А. Ф.

Д 99 Вища математика: робочий зошит до практичних занять для здобувачів вищої освіти освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» зі спеціальностей 201 «Агрономія» та 203 «Садівництво, плодовоовочівництво та виноградарство» заочної форми навчання. Запоріжжя : ТДАТУ, 2024. 58 с.

© Дяденчук А. Ф.

© Таврійський державний
агротехнологічний університет імені
Дмитра Моторного, 2024

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Практичне заняття ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	5
Практичне заняття ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ	9
Практичне заняття ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦЯ ЗМІННОЇ ВЕЛИЧИНИ ТА ФУНКЦІЇ	19
Практичне заняття ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.....	26
Практичне заняття ІНТЕГРАЛ.....	35
Практичне заняття ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	43
Практичне заняття ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.....	50
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	58

ВСТУП

Робочий зошит до практичних занять з дисципліни «Вища математика» рекомендовано для здобувачів вищої освіти освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» зі спеціальностей 201 «Агрономія» та 203 «Садівництво, плодоовочівництво та виноградарство» заочної форми навчання.

Зошит призначений для здобувачів вищої освіти, які вивчають курс вищої математики в рамках освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр». Він створений з метою надання практичної підтримки та удосконалення вмінь та навичок у виконанні математичних завдань.

Розробка містить різноманітні завдання та вправи, спрямовані на розвиток математичного мислення, аналітичних здібностей та креативного підходу до розв'язання проблем. Кожен розділ охоплює ключові теми та концепції, що допоможуть студентам усвідомити сутність математичного аналізу та диференціального числення, лінійної алгебри, теорії ймовірностей та статистики, а також інших важливих аспектів вищої математики.

Практичне заняття
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Мета роботи: сформулювати поняття лінійної алгебри: виродженої, оберненої матриці, навички її знаходження, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) методом оберненої матриці.

Після вивчення теми «Елементи лінійної алгебри» здобувач освіти повинен:

- а) *знати*: види матриць, елементарних перетворень та дій над ними; методи знаходження оберненої матриці, алгоритми розв'язання СЛАР;
- б) *вміти*: застосовувати метод оберненої матриці при розв'язанні практичних задач; обчислювати суму, різницю, добуток матриць, виконувати елементарні перетворення над матрицями, знаходити транспоновану та обернену матрицю.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Розв'язати системи рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}.$$

Розв'язання. а) Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 3 + 2 - 0 + 2 = 11 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок та обернену матрицю.

Знайдемо обернену матрицю, для цього знайдемо алгебраїчні доповнення :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \qquad A_{23} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 4) = -8$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \qquad A_{32} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 3) = -5 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

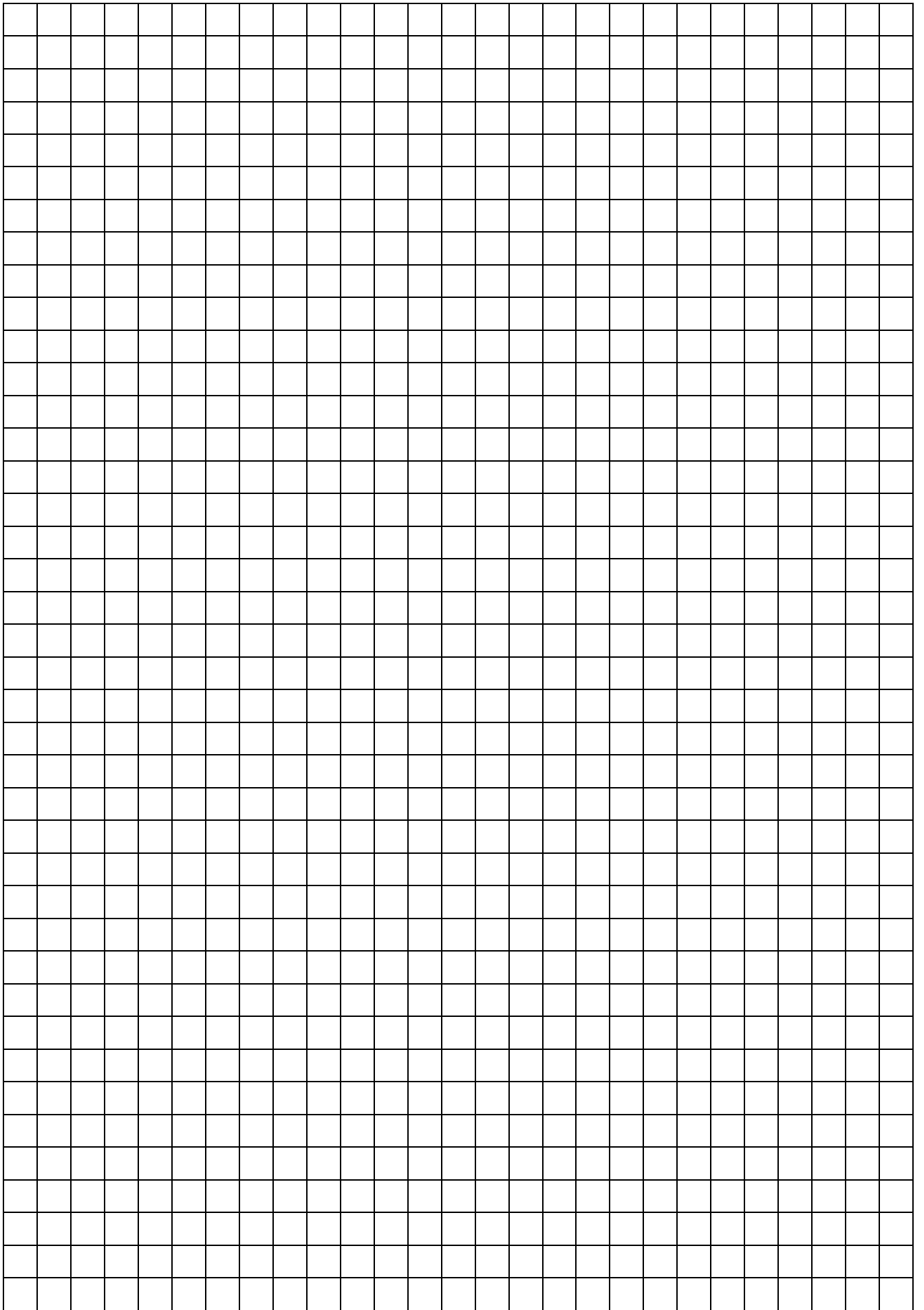
Оскільки $X = A^{-1} \cdot H$, то

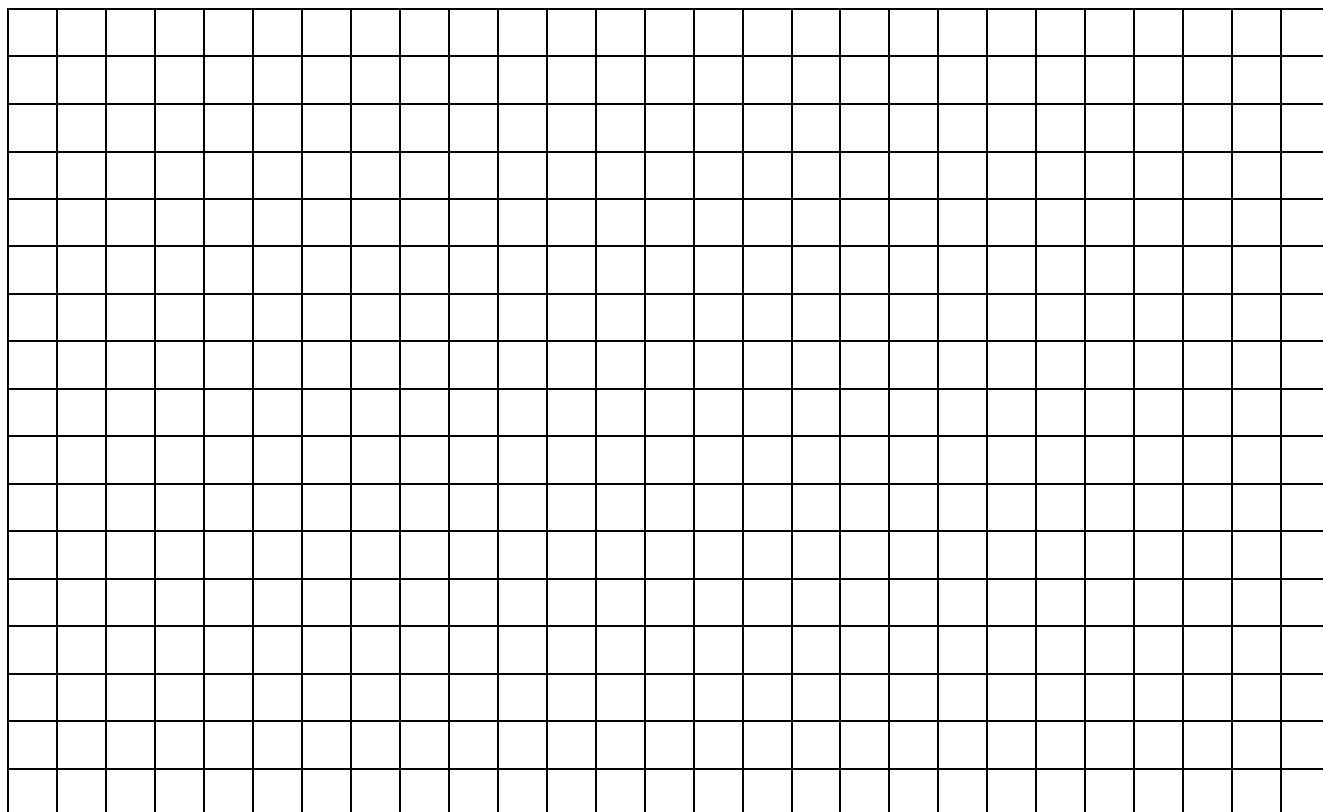
Відповідь. $(-1; 1; -3)$.

Номер завдання відповідає Вашому порядковому номеру в списку групи

1.	$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x + 5y + z = 10 \\ 4x - 7y + 5z = 7 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 7 \\ x + 3y - z = 3 \\ 4x + y + 3z = 8 \end{cases}$	3.	$\begin{cases} 5x - 8y - 4z = 6 \\ 7x - 5z = 9 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2y + 4z = 3 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \end{cases}$	5.	$\begin{cases} x - 5y + 3z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ -3x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 3x + 5y - 6z = -1 \\ 2x + 4y + 3z = 7 \\ -3x + y + z = 2 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 8x - y - z = 6 \\ 5x - 5y - z = -1 \\ 10x + 3y + 2z = 15 \end{cases}$	9.	$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} x + 3z = 4 \\ 3x + y + 7z = 10 \\ 2x + y + 8z = 10 \end{cases}$	11.	$\begin{cases} 6x + 7y + 3z = 16 \\ 3x + y = 4 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 6x + 9y + 4z = 19 \\ -x - y + z = -1 \\ 10x + y + 7z = 18 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x + 7y + 3z = -11 \\ -4x + 9y + 4z = -9 \\ -3y + 2z = -5 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 4y + z = -4 \\ 4x - 3y + z = 2 \end{cases}$	15.	$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1 \\ 8x - 7y - 6z = 1 \\ -3x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$
16.	$\begin{cases} 2x - y - 4z = 0 \\ 4x - 9y + 3z = 11 \\ 2x - 7y - z = 3 \end{cases}$	17.	$\begin{cases} 5x + 4y + 2z = -1 \\ x + 2y + 4z = 1 \\ 3x + 5z = -3 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} 3x + y + 2z = 6 \\ -x + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 12 \\ 3x + 3y + 6z = 9 \\ 4x + 3y + 4z = 8 \end{cases}$	20.	$\begin{cases} 8x + 5y - z = 14 \\ x + 5y + 3z = 8 \\ x + y = 2 \end{cases}$	21.	$\begin{cases} -6x + y + 11z = 12 \\ 9x + 2y + 5z = 7 \\ 3y + 7z = 10 \end{cases}$
22.	$\begin{cases} 3x - 7y + 2z = -2 \\ x - 8y + 3z = -4 \\ 4x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$	23.	$\begin{cases} x + 7y + 3z = -11 \\ -4x + 9y + 4z = -9 \\ -3y + 2z = -5 \end{cases}$	24.	$\begin{cases} 5x + y - 2z = 9 \\ x + 3y - z = 0 \\ 8x + 4y - z = 21 \end{cases}$
25.	$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2y + 4z = 3 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \end{cases}$	26.	$\begin{cases} 2x + 6y + z = 6 \\ x + 3y + 2z = 6 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$	27.	$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 4x + 3y + 2z = 11 \\ 2x + 2y - 7z = -10 \end{cases}$
28.	$\begin{cases} x - 2y + 5z = 12 \\ 3x + 6z = 18 \\ 4x + 3y + 4z = 16 \end{cases}$	29.	$\begin{cases} 8x + 5y - z = 14 \\ x + 5y + 3z = 8 \\ x + y = 2 \end{cases}$	30.	$\begin{cases} x + 3z = 4 \\ 3x + y + 7z = 10 \\ 2x + y + 8z = 10 \end{cases}$

[illegible]





Контрольні питання

1. Матриці. Види матриць.

2. Ранг матриці та його обчислення.

3. Лінійні операції над матрицями. Транспонування матриць.

4. Обернена матриця. Методи обчислення.

5. Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Практичне заняття
ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Мета роботи: сформувані вміння виконувати лінійні операції над векторами, застосовувати їх для розв'язання практичних задач; скласти та використовувати різні види рівнянь прямої на площині.

Після вивчення теми «Векторна алгебра. Прямі лінії на площині» здобувач вищої освіти повинен:

- а) *знати*: основні поняття векторної алгебри та аналітичної геометрії, види лінійних операцій над векторами, властивості скалярного, векторного, мішаного добутків векторів; види рівнянь прямої на площині, умови паралельності та перпендикулярності прямих.
- б) *вміти*: застосовувати методи векторної алгебри та аналітичної геометрії до розв'язання практичних задач.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Завдання 1. Відомі координати вершин тетраедра – точки $A(-5; -3; 1)$, $B(6; 7; -1)$, $C(-14; -15; 4)$, $D(-1; 5; 3)$. Знайти:

- 1) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ у системі орт і модулі цих векторів;
- 2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
- 3) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм тетраедра $ABCD$.

Розв'язання.

- 1) Відомо, що будь-який вектор $\vec{a}$ може бути зображеним у системі орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ за допомогою формули:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox, Oy, Oz , а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, напрямки яких збігаються з додатними напрямками Ox, Oy, Oz .

Коли відомі координати точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ на координатні осі знаходять за формулами:

$$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1; a_z = z_2 - z_1 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \quad (3)$$

Підставимо у (2.3) координати точок **A** і **B**, знайдемо:

$$\overrightarrow{AB} = (6 - (-5))\vec{i} + (7 - (-3))\vec{j} + (-1 - 1)\vec{k} = 11\vec{i} + 10\vec{j} - 2\vec{k}$$

Аналогічно знайдемо координати векторів

$$\overrightarrow{AC} = -9\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k}; \quad \overrightarrow{AD} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$$

Відомо, що модуль вектора, який заданий за формулою (1), знаходять за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (4)$$

Застосуємо формулу (2.4) для обчислення модулів векторів і отримаємо:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + (-2)^2} = \sqrt{121 + 100 + 4} = \sqrt{225} = 15;$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + 3^2} = \sqrt{234} = 3\sqrt{26};$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 64 + 4} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

2) Відомо, що косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів. Звідси:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{11 \cdot (-9) + 10 \cdot (-12) + (-2) \cdot 3}{15 \cdot 3\sqrt{26}} = \frac{-225}{45\sqrt{26}} = \\ &= \frac{-5}{\sqrt{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26} \approx -0,9806; \quad \phi = \arccos(-0,9806) \approx 168^\circ 42'. \end{aligned}$$

3) Проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ знайдемо як відношення скалярного добутку цих векторів до модуля вектора $\overrightarrow{AB}$, тобто, за формулою:

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|} \\ \text{пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} &= \frac{11 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + (-2) \cdot 2}{15} = \frac{44 + 80 - 4}{15} = \frac{120}{15} = 8. \end{aligned} \quad (5)$$

4) Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ як вектор $\vec{P}$. Тоді, як відомо, модуль вектора $\vec{P}$ дорівнює площі паралелограма, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Таким чином, площа трикутника ABC дорівнює половині модуля вектора $\vec{P}$, тобто $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{P}|$.

$$\vec{P} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 10 & -2 \\ -9 & -12 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 15\vec{j} - 42\vec{k};$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{6^2 + (-15)^2 + (-42)^2} = \sqrt{2025} = 45; \quad S_{ABC} = \frac{45}{2} = 22,5.$$

5) Відомо, що об'єм паралелепіпеда, що побудований на трьох не компланарних векторах, дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку.

Якщо відомі проекції векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k},$$

то мішаний добуток цих векторів знаходять за формулою:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Застосуємо формулу (6) для обчислення мішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 11 & 10 & -2 \\ -9 & -12 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -180.$$

Таким чином, об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 180. Шуканий об'єм тетраедра $ABCD$ становить шосту частину від знайденого об'єму паралелепіпеда.

Отже,

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{180}{6} = 30.$$

Завдання 2. Відомі координати вершин трикутника ABC : $A(-2; 9)$, $B(7; -3)$, $C(13; 14)$. Знайти:

- 1) Довжину сторони AB ;
- 2) Рівняння сторін AB і AC та їх кутові коефіцієнти;
- 3) Рівняння медіан, що проведені з вершин A і B , точку перетину медіан;
- 4) Кут A трикутника в радіанах з точністю до двох знаків;
- 5) Рівняння висоти CT , що проведена з вершини C на сторону AB та її довжину;
- 6) Координати точки M , що симетрична до точки A відносно прямої CT .

Розв'язання.

1) Відстань d між двома точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ визначають за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Застосуємо (3.1) для визначення довжини сторони AB :

$$AB = \sqrt{(7 - (-2))^2 + (-3 - 9)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

2) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

Для того, щоб одержати рівняння сторони AB , підставимо у (2) координати точок A і B :

$$\begin{aligned} \frac{y - 9}{-3 - 9} &= \frac{x + 2}{7 + 2}; & \frac{y - 9}{-12} &= \frac{x + 2}{9}; & \frac{y - 9}{-4} &= \frac{x + 2}{3}; \\ 3y - 27 &= -4x - 8; & 4x + 3y - 19 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для визначення кутового коефіцієнта сторони AB розв'яжемо знайдене рівняння AB відносно змінної y :

$$3y = -4x + 19; \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}.$$

звідси кутовий коефіцієнт $k_{AB} = -\frac{4}{3}$.

Підставимо тепер у (2) координати точок A і C , знайдемо рівняння прямої AC та її кутовий коефіцієнт:

$$\begin{aligned} \frac{y - 9}{14 - 9} &= \frac{x + 2}{13 + 2}; & \frac{y - 9}{5} &= \frac{x + 2}{15}; & \frac{y - 9}{1} &= \frac{x + 2}{3}; \\ 3y - 27 &= x + 2; & x - 3y + 29 &= 0; \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{29}{3}; & k_{AC} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3) Нехай точка D є серединою відрізка BC , а точка E – середина відрізка AC . Для визначення координат точок D і E застосуємо формули для ділення відрізка навпіл:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2}; & \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2}; \\ x_D &= \frac{7+13}{2} = 10; & y_D &= \frac{-3+14}{2} = 5,5; & D(10; 5,5); \\ x_E &= \frac{-2+13}{2} = 5,5; & y_D &= \frac{9+14}{2} = 11,5; & E(5,5; 11,5).\end{aligned}\quad (4)$$

Підставимо у (2) координати точок A і D , отримаємо рівняння медіани AD :

$$\begin{aligned}\frac{y-9}{5,5-9} &= \frac{x+2}{10+2}; & \frac{y-9}{-3,5} &= \frac{x+2}{12}; & \frac{y-9}{-7} &= \frac{x+2}{24}; \\ -7x-14 &= 24y-216; & 7x+24y-202 &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Аналогічно, підставимо у (3.2) координати точок B і E і відшукаємо рівняння медіани BE :

$$29x + 3y - 194 = 0. \quad (6)$$

Нехай точка N – точка перетину медіан. Для того, щоб знайти координати цієї точки, треба розв'язати систему з рівнянь (5) і (6):

$$\begin{cases} 7x + 24y - 202 = 0; \\ 29x + 3y - 194 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x = 6$; $y = \frac{20}{3}$. Таким чином, $N\left(6; \frac{20}{3}\right)$ – точка перетину медіан.

4) Відомо, що кут ϕ між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють k_1 і k_2 , обчислюють за формулою:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (7)$$

Шуканий кут A утворюють прямі AB і AC , кутові коефіцієнти яких було знайдено у пункті (2). Застосуємо (3.7), матимемо:

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} k_{AB}} = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = 3;$$

$$A = \operatorname{arctg} 3 = 71^\circ 34'; \quad \text{або у радіанах} \quad A \approx 1,249.$$

5) Рівняння прямої, що проходить у заданому напрямку через задану точку, має вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (8)$$

Висота CT перпендикулярна до сторони AB . Для знаходження кутового коефіцієнта висоти CT використаємо умову перпендикулярності прямих CT і AB . Оскільки $k_{AB} = -\frac{4}{3}$, то $-\frac{4}{3}k_{CT} = -1$; $k_{CT} = \frac{3}{4}$.

Підставимо у (3.8) координати точки C і знайдений кутовий коефіцієнт висоти CT , відшукаємо рівняння CT :

$$y - 14 = \frac{3}{4}(x - 13); \quad 4y - 56 = 3x - 39; \quad 3x - 4y + 17 = 0. \quad (9)$$

Для знаходження довжини висоти CT визначимо спочатку координати точки перетину прямих AB і CT , тобто координати точки T . Для цього розв'яжемо систему рівнянь (3) і (9):

$$\begin{cases} 4x + 3y - 19 = 0 \\ 3x - 4y + 17 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x = 1$; $y = 5$, тобто $T(1; 5)$. Довжину висоти CT знаходимо за формулою (1):

$$d_{CT} = \sqrt{(13 - 1)^2 + (14 - 5)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

б) Оскільки пряма AB перпендикулярна до прямої CT , то шукана точка M , яка симетрична до точки $A(-2; 9)$ відносно прямої CT , належить прямій AB . Крім того, точка $T(1; 5)$ є серединою відрізка AM . Застосуємо формули (4) і знайдемо координати шуканої точки M :

$$1 = \frac{-2+x_M}{2}, \quad \text{звідки } x_M = 4; \quad 5 = \frac{9+y_M}{2}, \quad \text{звідки } y_M = 1.$$

Таким чином, $M(4; 1)$ – шукана точка

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Визначити об'єм піраміди. Виконати лінійні операції над векторами.

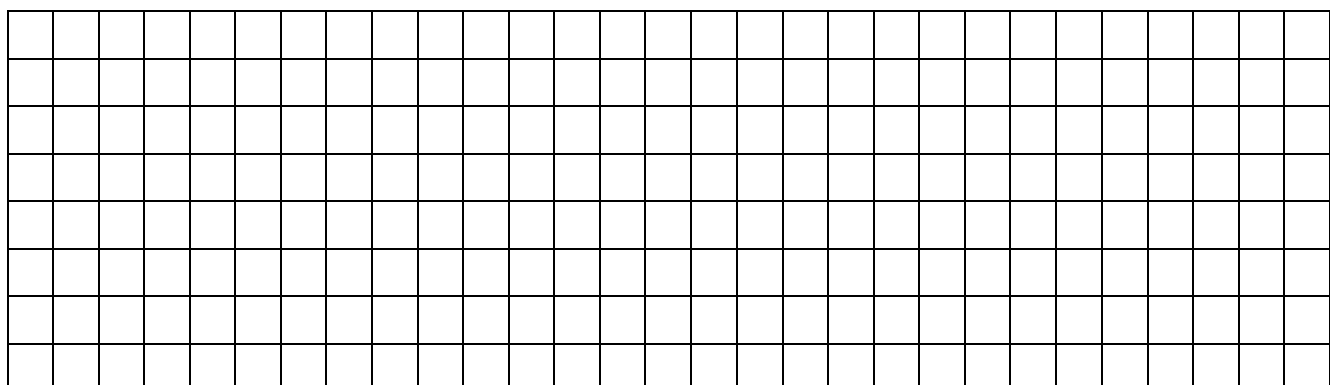
Номер завдання відповідає Вашому порядковому номеру в списку групи

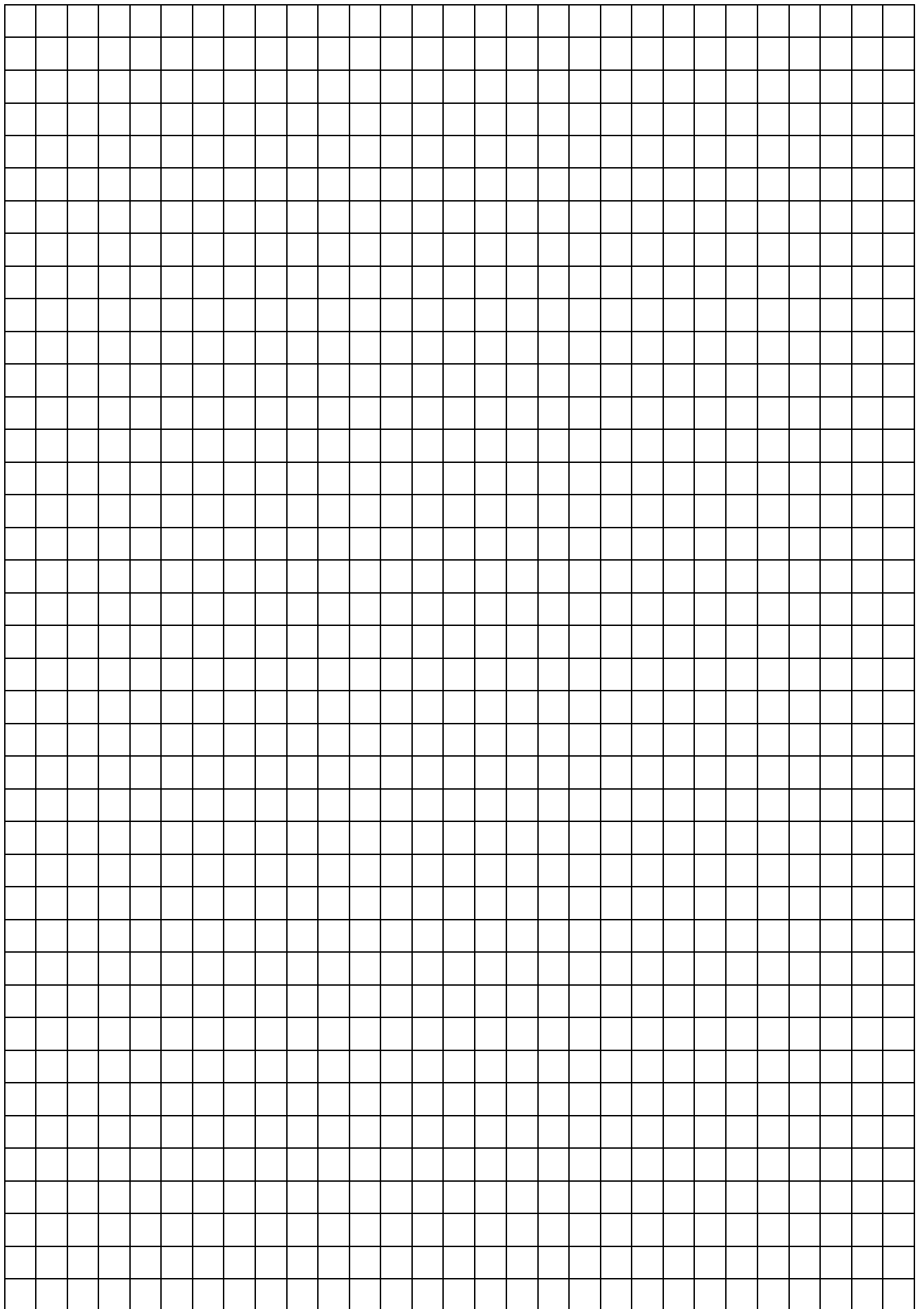
№1 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(6, -1, 0)$, $B(-2, 5, 9)$, $C(-4, 3, 5)$, $D(0, -3, 3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів.
№2 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(2, -3, -1)$, $B(-1, 4, 0)$, $C(-8, -4, 5)$, $D(9, 0, 3)$. 2. Дано вектори $a = \{2, -5, 7\}$; $b = \{3, -6, 2\}$ Знайти векторний та скалярний добуток векторів.
№3 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(1, -7, -1)$, $B(3, 4, 0)$, $C(-2, -3, 5)$, $D(8, -2, 3)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{2; -6; 3\}$, $\vec{b} = \{4; -5; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів.
№4 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(7, 0, -1)$, $B(-3, 2, -6)$, $C(3, -4, 5)$, $D(-5, 2, 3)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{4; -2; 5\}$, $\vec{b} = \{1; -5; 10\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів.
№5 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(2, -3, -1)$, $B(-1, 4, 0)$, $C(-8, -4, 5)$, $D(5, 2, 5)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів.
№6 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(7, -3, -5)$, $B(0, 4, 0)$, $C(-2, 1, 5)$, $D(4, 2, 4)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{2; -8; 1\}$, $\vec{b} = \{0; -2; 5\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів.

№7 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(5,2,-1)$, $B(-8,4,0)$, $C(0,-4,5)$, $D(2,2,-3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{6; 0; -5\}$, $\vec{b} = \{12; -1; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№8 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(3,-3,-1)$, $B(-5,4,1)$, $C(4,-4,5)$, $D(1,3,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{9; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{-3; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№9 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-5,3,-1)$, $B(-1,5,0)$, $C(6,-4,5)$, $D(1,-2,4)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{1; 2; 5\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 3\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№10 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-3,-3,3)$, $B(-1,6,0)$, $C(1,-4,1)$, $D(8,0,-5)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№11 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(3,2,-1)$, $B(7,-4,2)$, $C(-5,-4,5)$, $D(6,-2,3)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{1; -2; 5\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№12 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-3,0,-1)$, $B(-4,5,0)$, $C(-1,-2,5)$, $D(-5,1,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{2; 7; 5\}$, $\vec{b} = \{-1; 6; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№13 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-3,0,-1)$, $B(7,4,0)$, $C(2,-4,5)$, $D(3,-2,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№14 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-2,5,-1)$, $B(6,4,1)$, $C(-2,-4,5)$, $D(7,0,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{4; 8; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 3; -2\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№15 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(6,-6,-1)$, $B(-1,7,2)$, $C(0,-4,5)$, $D(1,-2,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; 6; 0\}$, $\vec{b} = \{-1; -4; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів

№16 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-4,-5,1)$, $B(1,2,0)$, $C(-2,-4,5)$, $D(4,1,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{-2; -3; 5\}$, $\vec{b} = \{-5; 2; 1\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№17 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-3,-3,-1)$, $B(6,4,2)$, $C(-8,1,5)$, $D(-5,2,3)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; 0; 5\}$, $\vec{b} = \{2; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№18 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(12,-3,-1)$, $B(-1,4,0)$, $C(-1,-4,5)$, $D(1,4,1)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{-6; 4; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 3; 1\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№19 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-4,3,1)$, $B(1,2,2)$, $C(-2,-4,5)$, $D(-4,0,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{4; -8; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№20 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-6,-3,1)$, $B(-10,4,-5)$, $C(-8,-4,0)$, $D(1,4,-3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{8; 4; 3\}$, $\vec{b} = \{5; -10; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№21 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(3,-2,1)$, $B(-1,4,2)$, $C(2,-7,5)$, $D(0,-2,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{9; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{6; -2; -3\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№22 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(5,0,-1)$, $B(-1,4,8)$, $C(-2,-4,5)$, $D(5,0,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{2; -6; 1\}$, $\vec{b} = \{10; -2; 3\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№23 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-4,0,1)$, $B(-1,4,7)$, $C(-3,6,5)$, $D(4,-2,3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{-6; 3; 5\}$, $\vec{b} = \{4; -2; 4\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів
№24 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(6,-1,-1)$, $B(-3,4,3)$, $C(-9,-4,1)$, $D(1,0,-3)$

2. Дано вектори $\vec{a} = \{-2; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{5; -6; 10\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№25 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(7, -5, -1)$, $B(0, 4, 2)$, $C(-8, -6, 1)$, $D(-3, 2, 5)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{6; -3; 15\}$, $\vec{b} = \{-4; 4; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№26 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(4, 1, -1)$, $B(-3, 4, 2)$, $C(7, -4, 5)$, $D(-2, 2, 3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{5; -4; 1\}$, $\vec{b} = \{6; -12; 1\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№27 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(3, -5, -1)$, $B(-1, 4, 2)$, $C(-8, 9, 5)$, $D(-1, 2, 0)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{2; -10; 5\}$, $\vec{b} = \{-3; -2; 3\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№28 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(12, -3, -11)$, $B(-1, 4, 2)$, $C(0, -4, 5)$, $D(6, 1, 3)$ 2. Дано вектори $\vec{a} = \{9; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -10; 5\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№29 Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(-2, 3, -9)$, $B(-1, -3, 1)$, $C(-2, -4, 1)$, $D(0, 2, 3)$. Дано вектори $\vec{a} = \{2; -4; -9\}$, $\vec{b} = \{7; -14; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів
№30 1. Визначити об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(4, -5, -1)$, $B(-1, 5, 10)$, $C(-3, -6, 5)$, $D(-1, 4, 3)$. 2. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів





Практичне заняття ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦЯ ЗМІННОЇ ВЕЛИЧИНИ ТА ФУНКЦІЇ

Мета заняття: ознайомитися з натуральною системою логарифмів, числом e ; I і II чудовими границями для розкриття невизначеностей виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ або $\{1^\infty\}$; основними теоремами про границі.

Після вивчення теми «Функції. Границя змінної величини та функції» здобувач вищої освіти повинен:

- а) *знати*: поняття натурального логарифма, числа e , формули першої та другої чудових границь, методи розв'язання границь;
- б) *вміти*: застосовувати I і II чудові границі для розкриття невизначеностей виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ або $\{1^\infty\}$; виконувати заміну змінної під знаком границі; володіти основними методами обчислення границь, використовуючи основні теореми про границі та наведену таблицю.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Розв'язання прикладів:

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 8x} &= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} \cdot 8x} = \frac{3}{8}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+6x}-1}{\lg 8x} = \frac{1}{16} !!! \\
 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{x^2} &= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{9x^2} \cdot 9 = 18 \\
 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg^2 2x}{x \cdot \sin 5x} &= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg^2 2x}{x(2x)^2} \cdot \frac{4x^2}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{4}{5} \\
 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin 5x}{x} &= \left\{\frac{0}{0}\right\} = 4 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \arcsin 5x = y; \ x = \frac{1}{5} \sin y \\ \sin y = 5x, \ x \rightarrow 0, \ y \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y}{\sin y} = 20
 \end{aligned}$$

Правило:

Якщо під знаком границі робиться заміна змінної, то усі величини, що входять під знак границі повинні бути виражені через нову змінну, потім повинний бути визначена границя нової змінної.

$$\begin{aligned}
 5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1-\sin \frac{x}{2}}{\pi-x} &= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \pi-x=y; \ x=\pi-y \\ x \rightarrow \pi, \ y \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-\sin(\frac{\pi-y}{2})}{y} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-\cos \frac{y}{2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{y}{4}}{y} \cdot \frac{(\frac{y}{4})^2}{(\frac{y}{4})^2} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{16} = 0 \\
 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{\sqrt{1-\cos x}} &= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{\sqrt{2} \cdot x} \cdot \frac{x}{\frac{x}{2}} \cdot \\
 &\quad \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos \alpha x} - \sqrt{\cos \beta x}}{x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{(\alpha+\beta)x}{2} \sin \frac{(\alpha-\beta)x}{2}}{x^2} = \\
&= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{(\alpha+\beta)x}{2}}{\frac{(\alpha+\beta)x}{2}} \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{(\alpha-\beta)x}{2}}{\frac{(\alpha-\beta)x}{2}} \cdot \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \\
8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \pi - 2x = y, x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi-y}{2}; y \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi-y}{2})}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

II чудова границя.

$$\begin{aligned}
1) \lim_{x \rightarrow 2} 4 \frac{2x}{x+1} &= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x+1} = 4^{\frac{4}{3}} = 4^3 \cdot \sqrt[3]{4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\frac{1}{4}} \\
2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{3x-4})^{-2x+1} &= \{1^\infty\} = [\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{3x-4})^{\frac{3x-4}{2}}]^{\frac{2}{3x-4} \cdot (-2x+1)} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(-2x+1)}{3x-4}} = e^{-\frac{4}{3}}. \\
4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x-2}{3x+1})^{\frac{x}{2}-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + [\frac{3x-2}{3x+1} - 1])^{\frac{x}{2}-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + \frac{-3}{3x+1}]^{\frac{-3x(\frac{x}{2}-2)}{3x+1}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3(\frac{x}{2}-2)}{3x+1}} = e^{-\frac{1}{2}}. \\
5) \lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{t-3}{t+2})^{2t+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [1 + [\frac{t-3}{t+2} - 1]]^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - \frac{5}{t+2}]^{\frac{t+2}{-5} \cdot \frac{-5}{t+2} (2t+1)} = e^{-10} \\
6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7})^x &= \left\{ \begin{array}{l} \text{виділимо} \\ \text{цілу частину} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7})^x = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{перетворимо функцію} \leftrightarrow \leftrightarrow \leftrightarrow \text{ так, щоб} \\ \text{використати 2 чудову} \leftrightarrow \leftrightarrow \leftrightarrow \text{ границю} \end{array} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7})^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = e^8; \\
8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{2 \sec x} &= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \alpha, x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x = \arccos \alpha, \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{2}{\alpha}} = e^2 \\
9) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3tg^2 x)^{ctg^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3tg^2 x)^{\frac{3}{3tg^2 x}} = e^3 \\
10) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 9tg^2 x)^{\frac{6}{x^2}} &= \{1^\infty\} = [\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 9tg^2 x)^{\frac{1}{9tg^2 x}}]^{\frac{9tg^2 x \cdot 6}{x^2}} = e^{54} ! \text{ можна замінити} \\
11) \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{ctg \pi x} &= \{1^\infty\} = [\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}]^{\cos \pi x} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \cos \pi x} = e^{-1}. \\
&\text{заміна!} \\
12) \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{5}{x-2}} &= \left\{ \begin{array}{l} 7 - 3x = 1 + \alpha; \frac{5}{x-2} = \frac{5}{-\frac{\alpha}{3} + 2 - 2} = \frac{-15}{\alpha}; \\ x = (-\alpha + 6) \frac{1}{3} \end{array} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{-15}{\alpha}} = \\
&e^{-15}.
\end{aligned}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+3) - \ln 3}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x^2+3}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{x^2}{3})}{\frac{x^2}{3} \cdot 9} = \frac{1}{3} !$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x} = -3; 15) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 6x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 6x} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{6} !;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt[5]{x+1}-1} = 2 \cdot 5 = 10 !; 17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln+x} = 2;$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} 1+x=y^5 \\ y \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y+1} = \frac{3}{5}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Знайти границі функцій

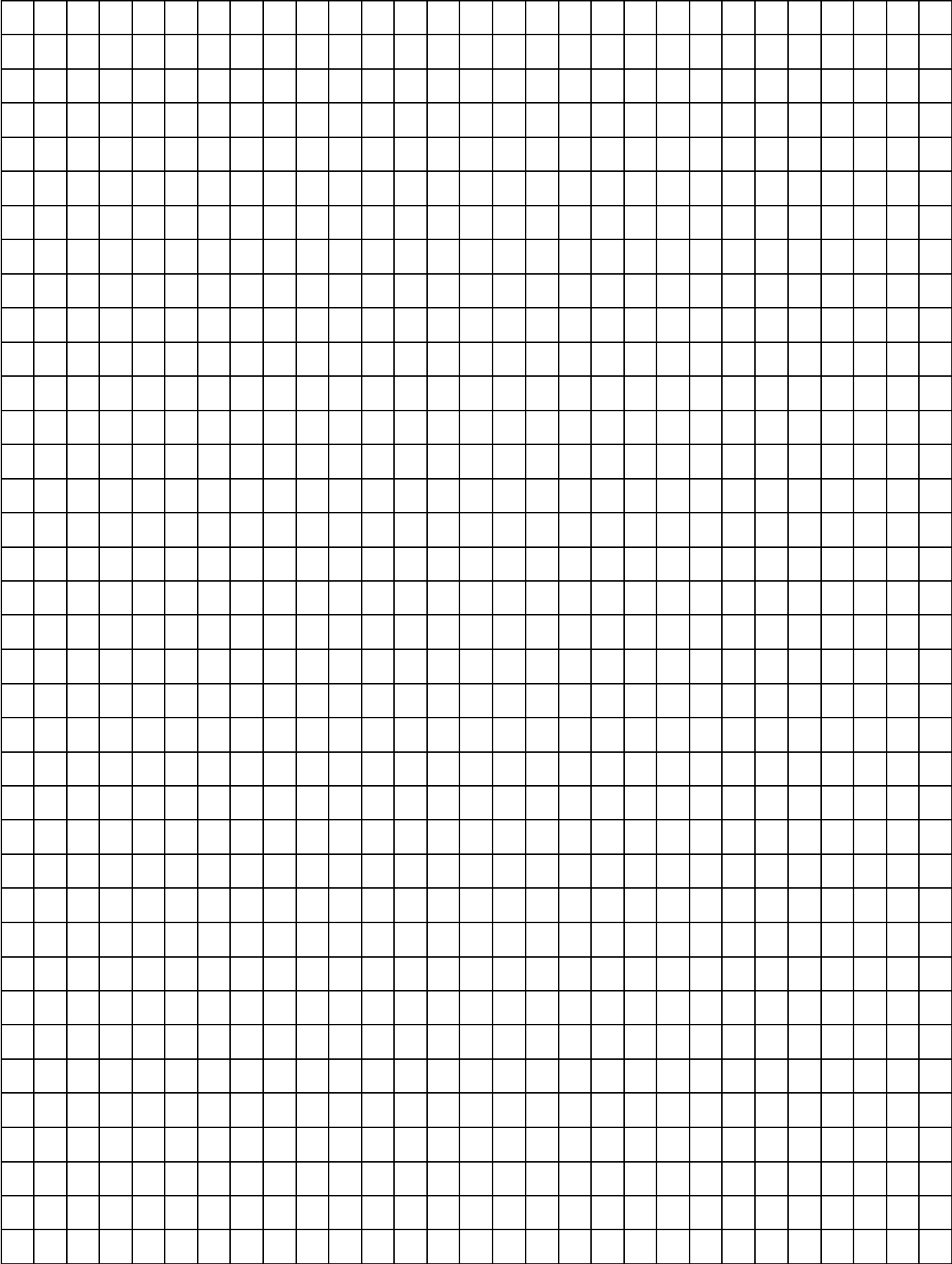
Номер завдання відповідає Вашому порядковому номеру в списку групи

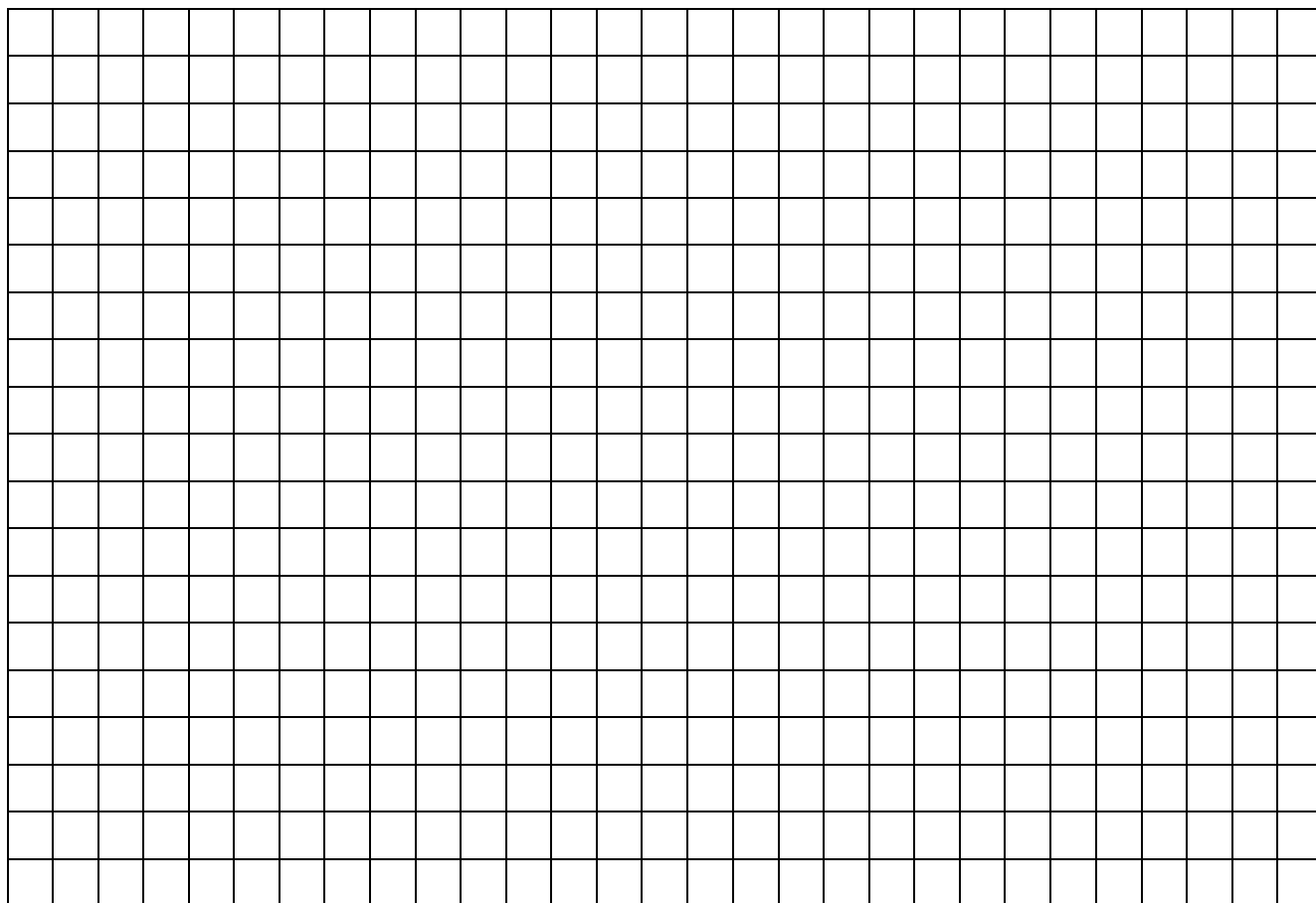
1.	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 5}{1 + x - 2x^3};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 3x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{x+1}.$
2.	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x + 7}{1 + 2x - 3x^2};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 + 5x};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 4x}{\sin 2x - \sin 4x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+1} \right)^{2x+1}.$
3.	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x + 7}{4 + 2x - 3x^3};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 + x - 12};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos^2 x - \cos^4 x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{5x-2} \right)^{-3x+1}.$
4	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x + 7}{5 + x - 5x^4};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \sin x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1} \right)^{2x+3}.$
5	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{4 - 3x - 6x^2};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15} - 4}{x^2 + 4x - 5};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 2x}{\operatorname{tg} 2x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+4} \right)^{3x+5}.$
6	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x + 3}{4 + 2x - 3x^3};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - x - 20};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{\cos 3x - \cos^2 3x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-5}{4x+1} \right)^{x-2}.$
7	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - x + 4}{x + 2x^2};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 - 4x + 3};$

	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg} 5x}{x \operatorname{tg} 2x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-6}{5x-4} \right)^{5x+4} .$
8	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 5x + 1}{3 - 5x + 2x^4} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9x-2} - 4}{x^2 - 3x + 2} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{x \arcsin x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1} \right)^{2x+1} .$
9	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x + 8}{7 + 6x - 2x^3} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x^2 - 4x - 21} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\cos 3x - \cos x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+1} \right)^{2x+5} .$
10	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 4}{8 + 3x - 4x^2} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x^2 - 4x - 12} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sin 2x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+1} \right)^{4x-2} .$
11	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 2x + 4}{5 + 6x - 2x^4} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x-3} - 3}{x^2 + x - 20} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 x}{1 - \cos x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-5}{6x+1} \right)^{6x+1} .$
12	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x + 5}{3 + x + 2x^3} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{x^2 - 4x + 3} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 2x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+2} \right)^{2x-4} .$
13	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 6x + 1}{2 + 3x - 3x^5} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10x-1} - 3}{x^2 + 4x - 5} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\sin 3x - \sin 5x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-5}{7x+2} \right)^{x+3} .$
14	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x + 7}{7 + x - 5x^3} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{x^2 - 4x - 5} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\cos 6x - \cos 4x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{2x-3} \right)^{2x+1} .$
15	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x + 5}{3 + 2x - x^4} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7x+2} - 4}{x^2 + 4x - 12} ;$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\cos 3x - \cos x} ;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-5} \right)^{x+1} .$
16	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 8}{5 + 2x - 2x^2} ;$	2)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 - 2x - 3} ;$

	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 6x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{3x+5}.$
17.	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x-3}{2x^3+3x^2-1};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{\sqrt{x+2}-2};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x-3} \right)^{2x+1}.$
18.	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+4x-1}{6x^3+x-2};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-7x+5}{\sqrt{5x+4}-3};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3x}{x^2};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{x+2}.$
19.	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2+4x-1}{2x^3+x-5};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-2x-8}{\sqrt{4x+1}-3};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3} \right)^{3x}.$
20	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+3x^2-1}{2x^3+5x-2};$	2)	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-7}-3};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 5x}{3x^2};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^{2x+5}.$
21	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+7x-5}{4x^3+3x^2-8};$	2)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{2x^2+7}-3};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{1-3x}.$
22	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x^2+7}{1-3x^3};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-x-10}{\sqrt{6-x}-2};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2} \right)^{2x-3}.$
23	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3-11x^2+3}{x^4+2x^2-1};$	2)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+7x+2}{\sqrt{x^2+5}-3};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin 4x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x+1}.$
24	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+3x^2-1}{8x^4+5};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-2x-1}{\sqrt{7x+2}-3};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x-1}.$
25	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3x^2-5x^3}{6x^3+4x+3};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2-11x-20}{\sqrt{3x+1}-4};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 2x}{x \cdot \operatorname{tg} x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^{3x+1}.$
26	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+x+3}{2x^4+12x^2+5};$	2)	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+9x+9}{\sqrt{1-x}-2};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+2} \right)^{x-1}.$
27	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5+7x-3x^2}{x^2+7x-6};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2-4x-1}{\sqrt{10x-1}-3};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{x \cdot \sin 2x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{1-x}.$
28	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5x+4}{2x^2+6x-1};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{3x^2+1}-2};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-3} \right)^{x+5}.$
29	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x-1}{6x^2-3x+2};$	2)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-x-10}{\sqrt{2-x}-2};$
	3)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x};$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x-2} \right)^{6x}.$
30	1)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+3x^2-1}{1-7x^3};$	2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2-6x-1}{\sqrt{3x+1}-2};$

3)	$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 5x;$	4)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{2-3x}$
----	---	----	---





Контрольні питання

1. Дайте поняття границі функції.

2. Що таке число “ e ”, експонента, натуральні логарифми?

3. Виведіть першу чудову границю.

4. Поясніть зміст другої чудової границі.

5. Як визначається порядок нескінченно малих величин?

Практичне заняття
ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Мета заняття: сформувати поняття похідної елементарних функцій, правила знаходження похідних, навички їх диференціювання; дослідження функції на екстремум, опуклість, вгнутість та побудови графіків функцій.

Після вивчення теми «Похідна та її застосування» здобувач вищої освіти повинен:

- а) *знати*: означення, геометричний зміст похідної елементарних функцій, правила та формули їх диференціювання; алгоритм дослідження функції на екстремум, опуклість, вгнутість та побудови графіків функцій;
- б) *вміти*: застосовувати правила та формули знаходження похідних елементарних функцій для розв'язання прикладів; визначати вид функції, її властивості, аналізувати їх для характеристики, застосовувати план дослідження функції та побудови її графіка.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Основні правила диференціювання.

1. $(C)' = 0, c - const$
2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
6. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2} \cdot v'$

Таблиця похідних основних функцій

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
3. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
4. $(a^n)' = a^n \cdot \ln a \cdot u'$
5. $(e^n)' = e^n \cdot n'$
6. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
7. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10. $(\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11. $(\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$$12. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$13. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$14. (\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$15. (\text{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$9. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$10. (\text{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$11. (\text{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$12. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad 13. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$14. (\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$15. (\text{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Приклад 1. Знайти похідну функції: 1) $y = x^5$, 2) $y = \sqrt{x}$, 3) $y = \sqrt[4]{x^3}$.

Розв'язок. Використовуємо формулу (1) таблиці, те що $(x)' = 1$.

В цьому прикладі показник степеня $n = 5$, тому $y' = 5x^4$.

Тут $n = \frac{1}{2}$, тому $y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

При рішенні цього прикладу можна було використати формулу (2).

Тут $n = \frac{3}{4}$, тому $y' = (\sqrt[4]{x^3})' = (x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Приклад 2. Знайти похідну функцій 1) $y = 5x^3$, 2) $y = -\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язок. Враховуємо правило знаходження похідної 4 та формулу (1).

1) Тут $n = 3$: $y' = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$;

2) Тут $n = -2/3$: $y' = \left(-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = -4 \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x^5}}$,

В прикладі 2) можна було використати правило знаходження похідної 7.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 11$.

Розв'язок. Надана функція є алгебраїчна сума декількох функцій, тому використаємо правило диференціювання суми та різниці функцій; насамперед переходячи до дробових показників степенів:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(27x^3 - \frac{81}{2}x^{\frac{8}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}} - 11 \right)' = 27(x^3)' - \frac{81}{2}\left(x^{\frac{8}{3}}\right)' + 6\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' - (11)' \\
 &= 27 \cdot 3x^{3-1} - \frac{81}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot x^{\frac{8}{3}-1} + 6\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} - 0 \\
 &= 81x^2 - 108 \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2x^{-\frac{4}{3}} = 81x^2 - 108x\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}.
 \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Розв'язок. Тут ми маємо справу зі складною функцією. Нехай $u = 5x^2 + 7x + 2$, Тоді $y' = 3u^2 \cdot u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (5x^2 + 7x + 2)' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2(10x + 7)$.

Але можна і не використовувати проміжні записи, тобто введення змінної u .

Приклад 5. Знайти похідну $y = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^4$.

$$\begin{aligned}
 \text{Розв'язок. } y' &= \left(\left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^4 \right)' = 4 \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^3 \cdot \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)' = 4 \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\
 &= 4 \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}\right).
 \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти 1) $y = \sqrt{x^2 + 2}$; 2) $y = \frac{2}{(3x^2 - 5)^5}$.

Розв'язок.

$$1) y' = (\sqrt{x^2 + 2})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot (x^2 + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

Використали правило диференціювання складної функції.

$$\begin{aligned}
 2) y' &= \left(\frac{2}{(3x^2 - 5)^3} \right)' = -\frac{2}{(3x^2 - 5)^6} \cdot ((3x^2 - 5)^3)' = -\frac{2}{(3x^2 - 5)^6} \cdot 3(3x^2 - 5)^2 \cdot (3x^2 - 5)' = \\
 &= -\frac{6}{(3x^2 - 5)^4} \cdot 6x = -\frac{36x}{(3x^2 - 5)^4}.
 \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти похідну $y = \frac{5 + 3x + x^2}{5 - 3x + x^2}$.

Розв'язок.

Тут слід використати правило (5) диференціювання дробу.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(5 + 3x + x^2)'(5 - 3x + x^2) - (5 + 3x + x^2)(5 - 3x + x^2)'}{(5 - 3x + x^2)^2} = \\
 &= \frac{(3 + 2x)(5 - 3x + x^2) - (5 + 3x + x^2)(-3 + 2x)}{(5 - 3x + x^2)^2},
 \end{aligned}$$

$$\text{а після спрощень } y' = \frac{6(5 - x^2)}{(5 - 3x + x^2)^2}.$$

Приклад 8. Знайти похідну 1) $y = 3 \sin^2 x$, 2) $y = \sqrt{\tan x}$, 3) $y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

Розв'язок.

1) Запишемо приклад у вигляді $y = 3U^2$ при $U = \sin x$, і тоді $y' = 6U \cdot U' = 6 \sin x \cdot (\sin x)' = 6 \sin x \cdot \cos x = 3 \sin 2x$.

Тепер покажемо, як розв'язати задачу, не вводячи U . Насамперед продиференціюємо степінь, а так як у степінь підноситься $\sin x$, то продиференціюємо і $\sin x$. Знайдені похідні перемножуємо, постійний множник 3 винесемо за знак похідної.

Розв'язок.

$$y' = 3 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 3 \sin 2x.$$

$$2) y' = (\sqrt{tgx})' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot (tgx)' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$3) y' = \left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)' = -\frac{1}{(\cos^3 x)^2} \cdot (\cos^3 x)' = -\frac{1}{\cos^6 x} \cdot 3 \cos^2 x (-\sin x) = \frac{3 \sin x}{\cos^4 x}.$$

Приклад 9. Знайти похідну від функції:

1. $y = 2\sqrt[4]{x} - 3 \sin \frac{x}{3}$. Використовуємо формулу $(u - v)' = u' - v'$

$$\begin{aligned} y' &= (2\sqrt[4]{x})' - \left(3 \sin \frac{x}{3}\right)' = 2(x^{1/4})' - 3 \left(\sin \frac{x}{3}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{4} x^{-3/4} - 3 \cos \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{x^3}} - \cos \frac{x}{3}. \end{aligned}$$

2. $y = \ln^3 x \cdot tg2x$. Маємо добуток двох функцій, тому застосовуємо формулу $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} y' &= (\ln^3 x)' \cdot tg2x + \ln^3 x (tg2x)' \\ &= 3 \ln^2 x \cdot (\ln x)' \cdot tg2x + \ln^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = \\ &= 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot tg2x + \frac{\ln^3 x}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{\ln^2 x}{x \cos^2 2x} (3tg2x \cos^2 2x + 2x \ln x) = \\ &= \frac{\ln^2 x}{x \cos^2 2x} (1,5 \sin 4x + 2x \ln x). \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Знайти похідні функцій.

Номер завдання відповідає Вашому порядковому номеру в списку групи

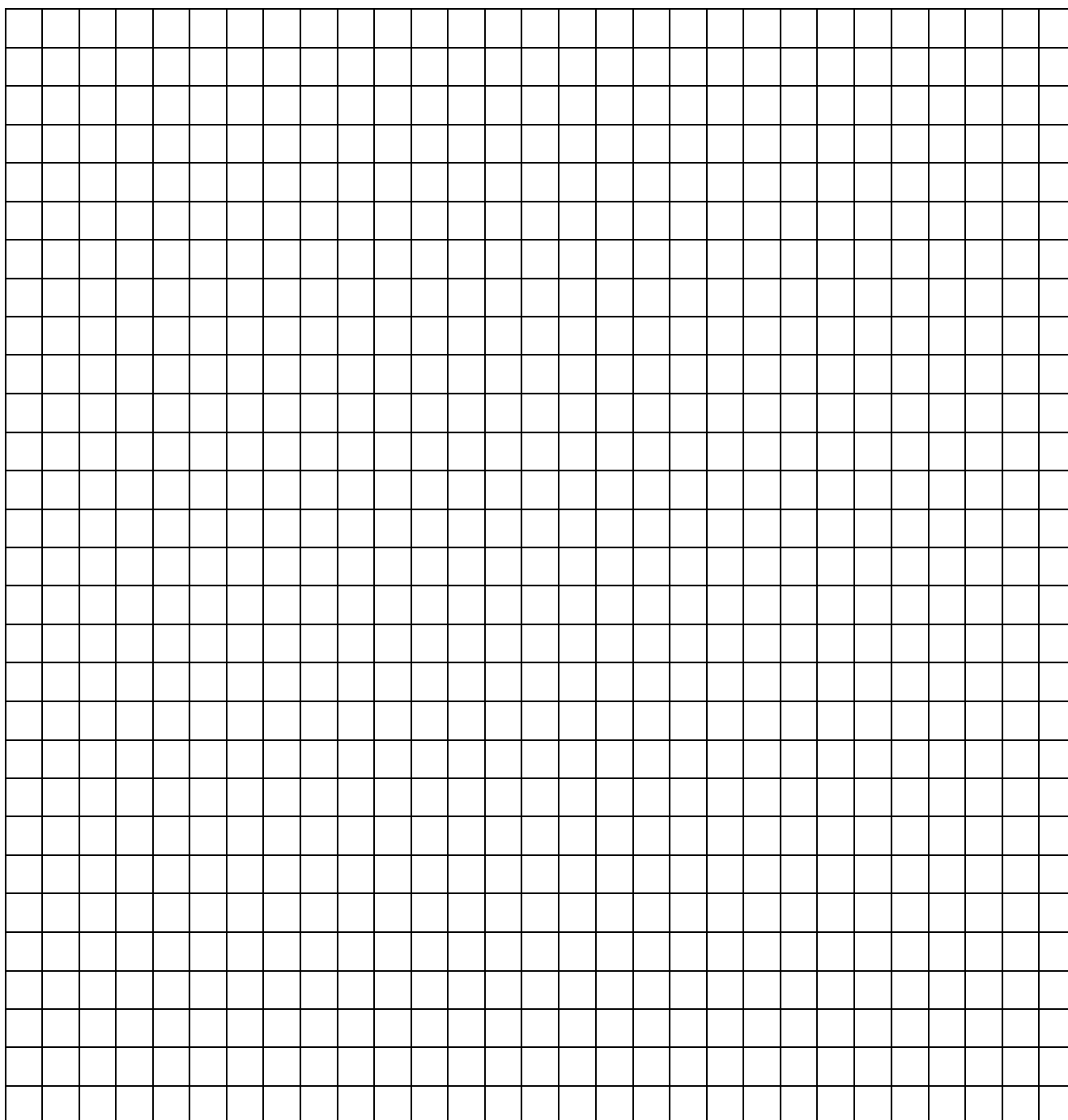
1.	$y = (2x^4 - 3\sqrt{x^5} - 1)^4$ $y = 3^{\ln 4x - 2x}$ $y = \frac{\ln 4x}{x^2 - 6x}$ $y = \frac{9}{\sqrt[7]{x^5 + 4x - 1}}$ $y = 3^{7x^2} \cdot \ln(4x^3 - 5)$	2.	$y = (3x - 4\sqrt{x} + 2)^5$ $y = e^{3x-6} \ln(8x + 3)$ $y = 5^{-x^3 - 4x + 5} \ln 5$ $y = \frac{6}{\ln^3(4x - 7)}$ $y = \frac{\sqrt{6x - 5}}{8x + 10x^2}$
3.	$y = \left(x^2 - \frac{1}{x} + 5\sqrt{x}\right)^3$ $y = \sqrt[5]{(x^5 - 3x)^7}$ $y = \frac{-7}{\sqrt[4]{5x - 3x^2}}$ $y = \frac{(4x - 7)^3}{\ln 7x}$ $y = (x^3 + 2x - 7) \ln \sqrt{5x}$	4.	$y = \left(4x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 4\right)^2$ $y = \sqrt[5]{(x^5 - 3x)^7}$ $y = \frac{\ln 6x - 9}{x + 7x^6}$ $y = 9^{x^3 - \ln(6x+7)}$ $y = \frac{3}{\sqrt[6]{7 + \ln x}}$

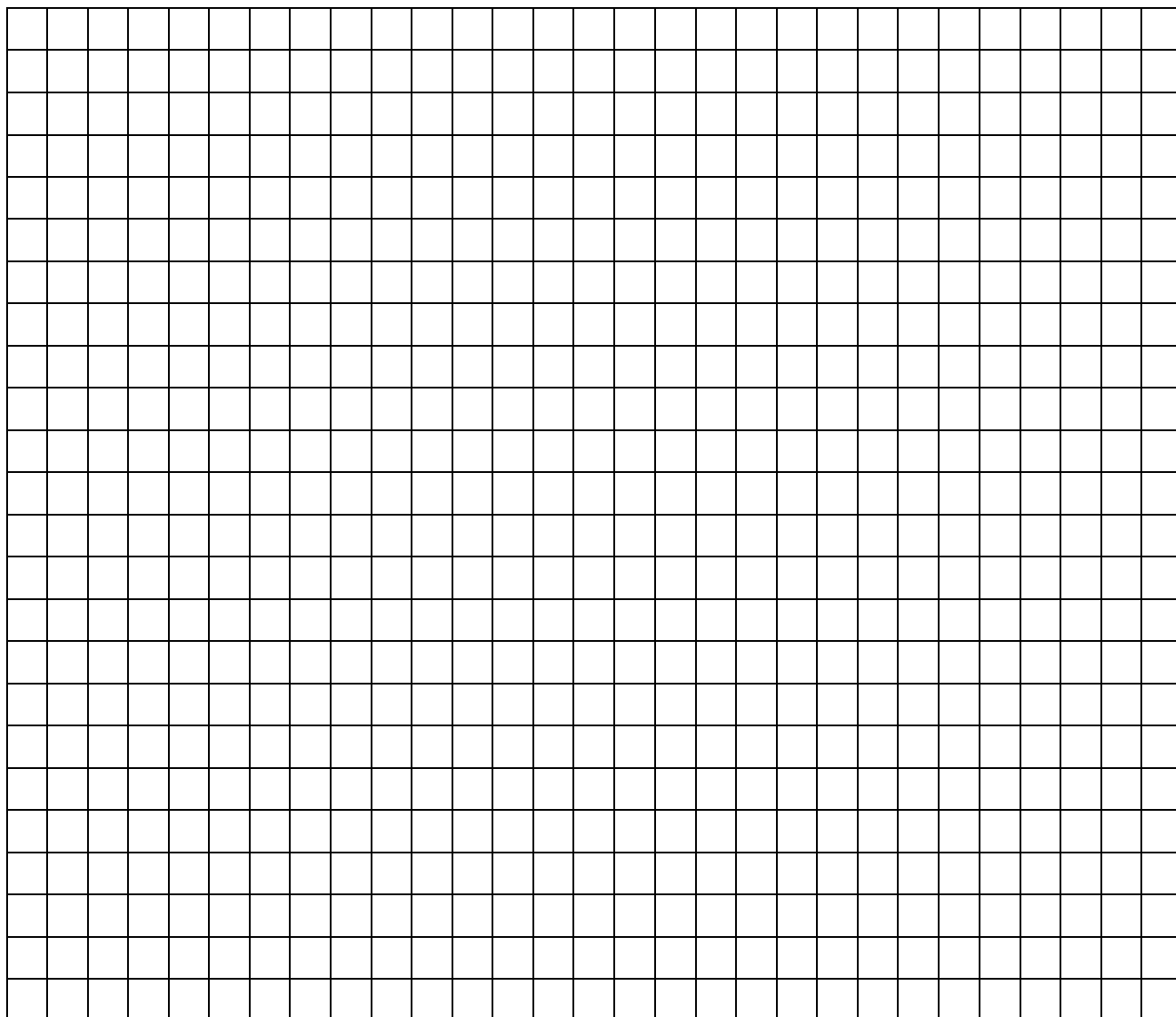
5.	$y = (x^5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$ $y = \frac{\sqrt{3x-6x}}{1+9x^3}$ $y = \frac{-4}{\ln^3 9x}$ $y = \ln((4x^3 - 5)^2)$ $y = 3^{2x}(x^5 - \ln 6x)$	6.	$y = \left(6x^3 - \frac{3}{x^3} + 4\right)^2$ $y = 5^{-5x^3 - \ln 4}$ $y = \frac{4x - x^5}{\ln(x^3 + 6)}$ $y = \frac{6}{\sqrt[4]{5x^5 - x^3}}$ $y = 7^x \cdot \ln(x^3 + \ln \sqrt{3x} - 1)$
7.	$y = \left(3x^5 - \frac{1}{x^4} + 7\right)^3$ $y = \frac{6}{\sqrt[4]{9x^5 - 2x}}$ $y = \frac{\ln 4x}{x^2 - 7}$ $y = \sqrt[5]{4x^3 + x}$ $y = (3 - x^3) \cdot 2^{x^5 - 4x^2}$	8.	$y = (x^3 - 4\sqrt{x^3} - 2)^3$ $y = 8^{(4x-5 \ln 2x)}$ $y = \frac{9}{\ln(x^5 - 1)}$ $y = e^{(3^x - 4x)} \cdot x^5$ $y = \frac{6x^2 - 9x}{\sqrt{3x^2 + 7x}}$
9.	$y = (x^4 - 2\sqrt[3]{x} - 1)^3$ $y = \ln^8(4x + 3x^7 - 5)$ $y = \frac{-2}{\sqrt[9]{6x^3 + 4x - 8}}$ $y = 9^{\ln(x^3 - 4x) + 5}$ $y = \frac{8^{4x^2}}{\ln(x^2 - 1)}$	10.	$y = \left(3x^2 - \frac{5}{x^3} - 2\right)^5$ $y = \ln^6(\ln 3x - 4)$ $y = (3 - x^3) \cdot 2^{x^5 - 4x^2}$ $y = \frac{6}{\sqrt[4]{\ln(-3x)^3}}$ $y = \frac{\sqrt{2^x - x}}{3x^2 + x^4}$
11.	$y = \left(2x^4 - \frac{2}{x^4} - 7\right)^5$ $y = \frac{-3}{\ln(4 - x)^2}$ $y = 5^{2x - 3e^{4x^2 - 3}} \cdot x^{-8}$ $y = \ln((8x + 5)^6)$ $y = \frac{\sqrt{9 + 3x^2}}{7^x + \ln \sqrt{x}}$	12.	$y = (3x^2 - 2\sqrt[4]{x} + 5)^5$ $y = e^{2x^2 + 6} \cdot (4x^{-3} - 5)$ $y = \frac{5}{\ln^3(-7x^2 - 1)}$ $y = -\ln(\ln 4x^7)$ $y = \frac{5x + 3^x}{\sqrt{2x^3 - 7x}}$

13.	$y = (x^3 - 4\sqrt[4]{x^3} - 2)^3$ $y = \frac{\sqrt{5x+2}}{3-4x^2}$ $y = e^{5x} \cdot (x^2 - 5x + 1)$ $y = \frac{5}{\ln(\ln 4x)}$ $y = \frac{\sqrt{10+x^2}}{8^x - \ln 3x}$	14.	$y = (x^3 - 2\sqrt[3]{x} + 7)^4$ $y = 4^x \cdot (5x^9 - 5x^4 + 2)$ $y = \ln^7(6x^3 + 7x - 1)$ $y = \frac{7x - 2^x}{\sqrt{4x+5}}$ $y = \frac{-3}{\ln^4(x^2 + 9)}$
15.	$y = \left(x^6 - \frac{3}{x^2} - 8\right)^3$ $y = \frac{\ln 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ $y = 4^{tx} \cdot (x^2 + 5x - \ln 8)$ $y = \frac{-6}{\sqrt{x-3x^9}}$ $y = \ln^6(7x^3 + 6x^2 - 9x)$	16.	$y = (4x^5 - 3\sqrt[5]{x^2} - 7)^3$ $y = \frac{5x - \ln x}{\sqrt{5x^3-1}}$ $y = e^{x^3} \cdot (2x - x^3)$ $y = \ln^4(5x^2 + 4x - 1)$ $y = \frac{-7}{\sqrt[4]{9x-3x^8}}$
17.	$y = \left(3x^2 - \frac{5}{x^3} + 1\right)^4$ $y = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x + \ln x}$ $y = e^{5x} \cdot (5x^3 - 4x^2 + 3)$ $y = \ln^5(\ln 6x + 1)$ $y = \frac{6}{\sqrt[4]{(-3x^3-4)^3}}$	18.	$y = (2 - 3x + 6\sqrt[3]{x^2})^3$ $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\ln 2x}$ $y = 5^x \cdot (4x^2 + 2x + 1)$ $y = \ln^{-7}(3x^3 - 2x^2 + 2)$ $y = \frac{-8}{\ln^3(x-2)}$
19.	$y = \left(\frac{12}{\sqrt[4]{x^3}} - 3x^2 + 1\right)^4$ $y = \frac{\sqrt{7x-2}}{e^{2x} + 4}$ $y = 2^{6x} \cdot \sqrt{3x+2}$ $y = \ln^6(\ln 5x - 5)$ $y = \frac{4}{\ln^5(9-x^6)}$	20.	$y = (4\sqrt[3]{x} - 3x - 5)^5$ $y = \frac{x^4 + \ln x}{\sqrt{4x^2+7}}$ $y = e^{5x} \cdot (6x^4 + 7x^2 - 3)$ $y = \ln 7^x - 5x + 1$ $y = 1/\sqrt[5]{\ln 2x - x^7}$

21.	$y = \left(x^4 - \frac{12}{\sqrt{x}} + 3 \right)^4$ $y = \frac{5^x + 2x}{1 - 9x^2}$ $y = 3^{2x} \cdot \ln\left(2x - \frac{9}{x} - 1\right)$ $y = \ln^6(5x^3 + 2x - \sqrt{x})$ $y = \sqrt[8]{(4x^3) - x^2}$	22.	$y = \left(12 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^5} \right)^3$ $y = \frac{\sqrt{3 - 5x^4}}{e^x - 4x}$ $y = 2^x \cdot (2x + \sqrt{x - 2})$ $y = \ln^4(7x - \ln x)$ $y = \frac{6}{\sqrt[8]{2x^5 - x^6 + 5}}$
23.	$y = \left(5x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right)^3$ $y = \frac{3^x - 6x^2}{\sqrt{5x + 1}}$ $y = e^{x^2} \cdot (2x^3 + \sqrt{x} - 2)$ $y = \ln(2x + 4x^3 - 8)^2$ $y = \frac{6}{\sqrt[7]{\ln x^5 - 3x^3}}$	24.	$y = \left(x^2 - 3x + 2\sqrt[6]{x^5} \right)^2$ $y = \frac{10x^2 + 7x - 1}{x^4 + e^x}$ $y = e^{6x} \ln(6x^5 - \sqrt{x} + 2)$ $y = \ln \sqrt[3]{3 - x^2}$ $y = \frac{5}{\sqrt{5x^2 - 7x + 3}}$
25.	$y = \left(3x^6 - \frac{6}{\sqrt{x^3}} + 1 \right)^8$ $y = \sqrt[5]{x^3 - 6x^2}$ $y = (6x^3 + 5x^2 - 2) \cdot e^{9x}$ $y = \ln(\ln 3 x^3 - 2x^2 + x)$ $y = \frac{4x + 7^x}{\sqrt{9x^2 - 1}}$	26.	$y = \left(9 - 3\sqrt{x} + \frac{4}{x} \right)^6$ $y = \frac{6}{\sqrt[6]{2x^5 - 3x^3}}$ $y = \frac{x^3 - e^x}{\sqrt{4 - 9x^2}}$ $y = 4^x \cdot \ln(2x - \sqrt{5x} + 3)$ $y = \ln^7(5x^3 + 4x^2 - 1)$
27.	$y = \frac{\sqrt{3 - 5x^4}}{e^x - 4x}$ $y = \left(\frac{12}{\sqrt[4]{x^3}} - 3x^2 + 1 \right)^4$ $y = e^{x^3} \cdot (2x - x^3)$ $y = \sqrt[5]{4x^3 + x}$ $y = \frac{3}{\sqrt[6]{7 + \ln x}}$	28.	$y = \left(2x^4 - 3\sqrt{x^5} - 1 \right)^4$ $y = 4^x \cdot (5x^9 - 5x^4 + 2)$ $y = \frac{5}{\ln^3(-7x^2 - 1)}$ $y = x^3 + 9x^2 + 15x - 9$ $y = \frac{8^{4x^2}}{\ln(x^2 - 1)}$

29.	$y = \left(6x^3 - \frac{3}{x^3} + 4\right)^2$ $y = \frac{\ln 3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$ $y = 4^{tx} \cdot (x^2 + 5x - \ln 8)$ $y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2) - 5$ $y = \frac{3}{\sqrt[6]{7 + \ln x}}$	30.	$y = \left(2x^4 - \frac{2}{x^4} - 7\right)^5$ $y = \frac{\sqrt{3 - 5x^4}}{e^x - 4x}$ $y = e^{x^2} \cdot (2x^3 + \sqrt{x} - 2)$ $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16)$ $y = \frac{\sqrt{6^x - 5}}{8x + 10x^2}$
-----	--	-----	---





Контрольні питання

1. Правила та формули диференціювання.

2. Похідна показникової функції

3. Похідна степеневі функції

Практичне заняття ІНТЕГРАЛ

Мета заняття: сформувати поняття невизначеного інтегралу, первісної, навички інтегрування за таблицею; вміння застосування основних методів інтегрування.

Після вивчення теми «Інтеграл» здобувач вищої освіти повинен:

- а) *знати*: означення невизначеного інтегралу; методи та формули інтегрування;
- б) *вміти*: застосовувати методи інтегрування.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

$$1) \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c; 2) \int (3x + 1)^4 dx = \left\{ \begin{array}{l} v = 3x + 1 \\ dv = 3dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int v^4 dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{v^5}{5} + c = \frac{1}{15} (3x + 1)^5 + c.$$

$$3) \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + c.; 4) \int \sin 5x dx = \left\{ \begin{array}{l} v = 5x \\ dv = 5dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{5} \cos 5x + c.$$

$$5) \int^f t q \frac{1}{7} x dx = \left\{ v = \frac{1}{7} x dv = \frac{1}{7} dx \right\} = 7 \int^f (\cos \frac{1}{7} x) tqv dv = -7 \ln(\cos v) + c = -7 \ln.$$

$$6) \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c. 7) \int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{x^2+2^2} = \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ v = x \\ dv = dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c.$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)} = -\frac{1}{3} \cot(3x-1).; 9) \int tq 4x dx = -\frac{1}{4} \ln|\cos 4x| + c.$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \ln \left| tq \frac{3x}{2} \right| + c.; 11) \int \frac{dx}{4+7x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(\sqrt{7}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{7}x}{2} + c.$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(\sqrt{5}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}x}{3} + c;$$

$$13) \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctan^2 x} = \int \arctan^{-2} x \frac{dx}{x^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} v = \arctan x \\ dv = \frac{dx}{x^2+1} \end{array} \right\} = \int v^{-2} dv = \frac{v^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{\arctan x} + c.$$

$$14) \int \frac{e^x dx}{1-5e^{2x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{5}e^x = v \\ dv = \sqrt{5}e^x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}e^x dx}{1-(\sqrt{5}e^x)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| + c = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}e^x}{1-\sqrt{5}e^x} \right| + c$$

$$15) \int 2^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} v = 3x \\ dv = 3dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int a^v dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^v}{\ln a} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} + c.$$

$$16) \int 5^{\ln x} \frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} v = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \frac{5^{\ln x}}{\ln 5} + c.; 17) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{x} \\ dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} =$$

$$2 \int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x} + c.$$

$$18) \int e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} v = -3x \\ dv = -3dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c.$$

$$19) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}} = \left\{ \begin{array}{l} v = \cos x \\ dv = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -2\sqrt{v} + c = -2\sqrt{\cos x} + c.$$

$$20) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left\{ \begin{array}{l} v = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\sqrt{v} + c = 2\sqrt{\ln x} + c.$$

$$21) \int \frac{dx}{5x+1} = \left\{ \begin{array}{l} v = 5x+1 \\ dv = 5dx \end{array} \right\} = \frac{1}{5} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{5} \ln|v| + c = \frac{1}{5} \ln|5x+1| + c.$$

$$12) \int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx = \left\{ \begin{array}{l} v = x^3+x \\ dv = (3x^2+1)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c = \ln|x^3+x| + c.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Виконати інтегрування.

Номер завдання відповідає Вашому порядковому номеру в списку групи

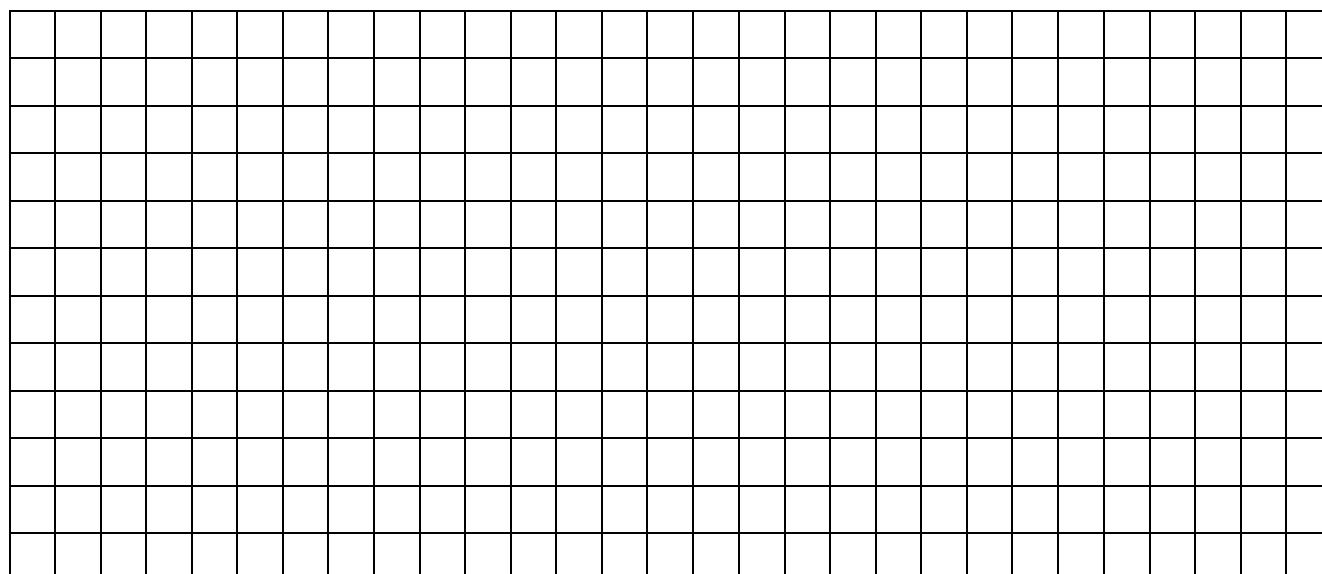
Варіант 1 1. $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx.$ 2. $\int \sqrt{3+xdx}.$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$ 4. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x-3}.$ 5. $\int e^{2x-7} dx.$ 6. $\int \sin(2-3x)dx.$	Варіант 2 1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}} dx.$ 2. $\int \sqrt[3]{1+xdx}.$ 3. $\int \frac{dx}{3x+9}.$ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x+3}}.$ 5. $\int e^{3+5x} dx.$ 6. $\int \cos(3+2x)dx.$
Варіант 3 1. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x} dx.$ 2. $\int \frac{dx}{2-3x}.$ 3. $\int \frac{dx}{9x+3}.$	Варіант 4 1. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}} dx$ 2. $\int \frac{dx}{1-4x}.$ 3. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x-3}}.$

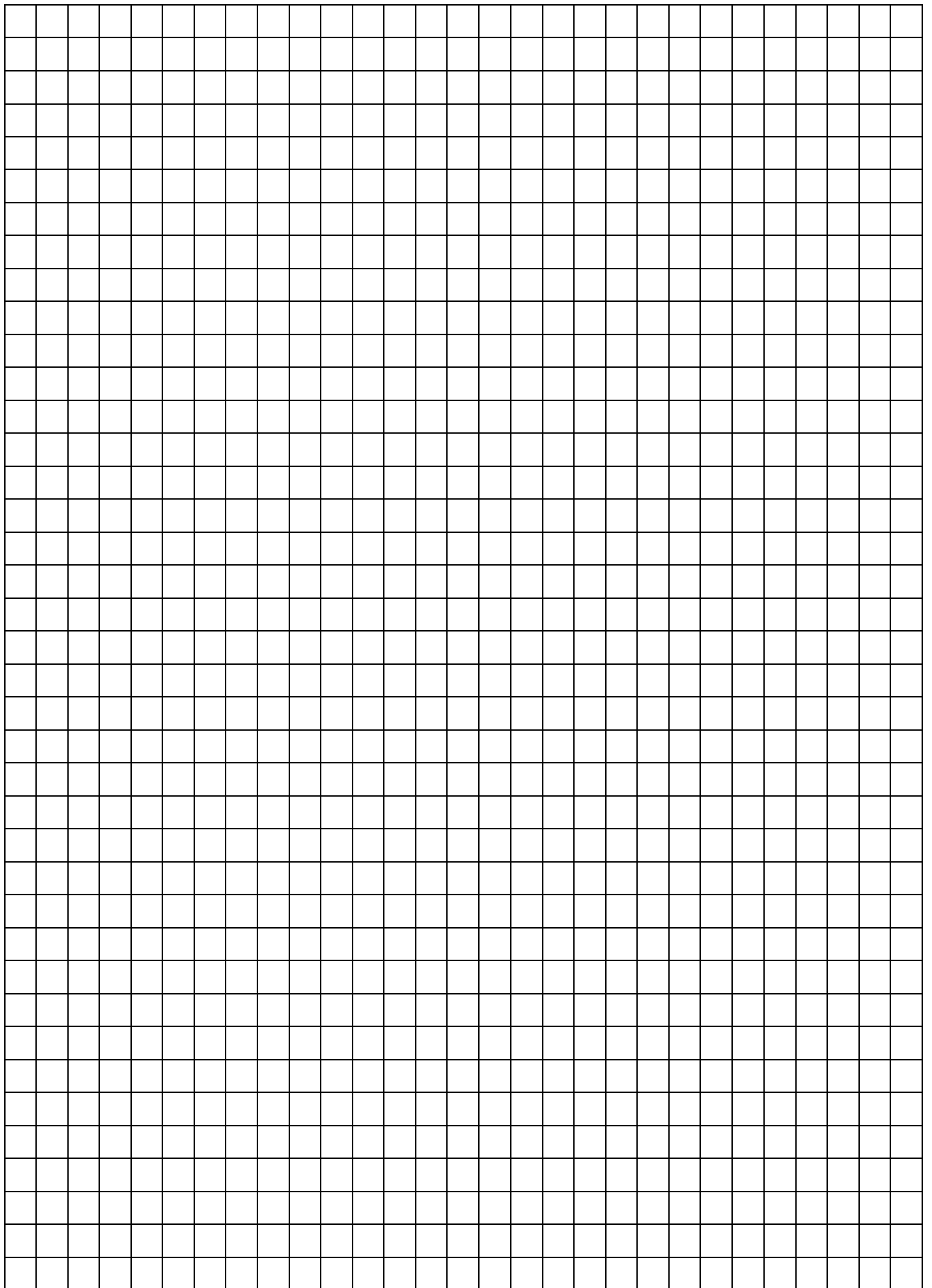
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x-3}}.$ 5. $\int e^{2-3x} dx.$ 6. $\int \sin(3-2x) dx.$	4. $\int \frac{dx}{5x+2}.$ 5. $\int e^{2x+1} dx.$ 6. $\int \cos(2+3x) dx$
Варіант 5 1. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2} dx.$ 2. $\int \frac{dx}{2+3x}.$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x}}.$ 4. $\int \frac{dx}{2x+3}.$ 5. $\int e^{7x-2} dx.$ 6. $\int \sin(5-3x) dx$	Варіант 6 1. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} dx.$ 2. $\int \frac{dx}{2-5x}.$ 3. $\int \frac{dx}{7x-4}.$ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+1}}.$ 5. $\int e^{5x-7} dx.$ 6. $\int \cos(5-2x) dx.$
Варіант 7 1. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3 \right) dx$ 2. $\int \frac{dx}{3x-2}.$ 3. $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x-4}}.$ 4. $\int \frac{dx}{2x+9}.$ 5. $\int e^{5x+7} dx.$ 6. $\int \sin(4-2x) dx.$	Варіант 8 1. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}} dx.$ 2. $\int \frac{dx}{2x+3}.$ 3. $\int \frac{dx}{5x+3}.$ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x}}.$ 5. $\int e^{7-2x} dx.$ 6. $\int \cos(7x+3) dx.$
Варіант 9 1. $\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x} dx.$ 2. $\int \frac{dx}{3x-4}.$ 3. $\int \frac{dx}{8x+3}.$ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-2}}.$ 5. $\int e^{3-4x} dx.$ 6. $\int \sin(8x-3) dx.$	Варіант 10 1. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2} dx.$ 2. $\int \frac{dx}{4-3x}.$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}.$ 4. $\int \frac{dx}{5x-4}.$ 5. $\int e^{10x+2} dx.$ 6. $\int \cos(2+5x) dx.$
Варіант 11 1. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x} dx.$	Варіант 12 1. $\int \left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x} \right) dx.$ 2. $\int \frac{dx}{4x-2}.$

$2 \int \frac{dx}{3x+4}.$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}.$ $4 \int \frac{dx}{3x^2-7}.$ $5 \int e^{2x-10} dx.$ $6 \int \sin(3+4x) dx$	$3 \int \frac{dx}{\sqrt{4-7x}}.$ $4 \int \frac{dx}{3x+7}.$ $5 \int e^{4x+3} dx.$ $6 \int \cos(4x+3) dx$
Варіант 13 $1 \int \left(x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3 \right) dx.$ $2 \int \frac{dx}{5-3x}.$ $3 \int \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$ $4 \int \frac{dx}{6x^2-7}.$ $5 \int e^{4x+5} dx.$ $6 \int \sin(3-4x) dx$	Варіант 14 $1 \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx.$ $2 \int \frac{dx}{4-7x}.$ $3 \int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{7-2x}}.$ $4 \int \frac{dx}{7x+6}.$ $5 \int e^{6x-1} dx.$ $6 \int \cos(3x+5) dx$
Варіант 15 $1 \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4 \right) dx$ $2 \int \frac{dx}{5x-3}.$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}}.$ $4 \int \frac{\sqrt{14} dx}{2x-7}.$ $5 \int e^{5-2x} dx.$ $6 \int \sin(5x-3) dx$	Варіант 16 $1 \int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx$ $2 \int \frac{dx}{3-2x}.$ $3 \int \frac{6dx}{2x+7}.$ $4 \int \frac{9dx}{\sqrt{3x+1}}.$ $5 \int e^{3-5x} dx.$ $6 \int \cos(5-3x) dx$
Варіант 17 $1 \int \frac{\sqrt{x^3} - 3x^4 + 2}{x} dx.$ $2 \int \frac{dx}{5+3x}.$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}.$ $4 \int \frac{dx}{3x^2+2}.$ $5 \int e^{1-4x} dx.$	Варіант 18 $1 \int \frac{3x^2 - \sqrt{x^3} + 7}{x^3} dx.$ $2 \int \frac{dx}{3-5x}.$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$ $4 \int \frac{dx}{6x^2+1}.$ $5 \int e^{2-5x} dx.$

$6 \int \sin(3x + 6) dx$	$6 \int \cos(5x - 8) dx$
Варіант 19 $1 \int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx.$ $2 \int \frac{dx}{5 + 4x}.$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 9}}.$ $4 \int \frac{dx}{3x^2 - 2}.$ $6 \int \sin(7x + 1) dx$	Варіант 20 $1 \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx$ $2 \int \frac{dx}{6 - 3x}.$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}.$ $4 \int \frac{dx}{4x^2 + 3}.$ $5 \int e^{8x+1} dx.$ $6 \int \cos(3x - 7) dx$
Варіант 21 $1 \int \left(5\sqrt{x} - \frac{4}{x^5} + 2 \right) dx$ $2 \int \frac{dx}{6 + 5x}$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ $4 \int \frac{dx}{3x^2 - 5}$ $5 \int e^{2-6x} dx$ $6 \int \sin(7 - 4x) dx$	Варіант 22 $1 \int \left(\frac{3\sqrt{x^2}}{x} - \frac{7}{x^3} + 5 \right) dx$ $2 \int \frac{dx}{1 - 7x}$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$ $4 \int \frac{dx}{2x^2 + 7}$ $5 \int e^{4-3x} dx$ $6 \int \cos(5x - 6) dx$
Варіант 23 $1 \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 5}{x^2} dx$ $2 \int \frac{dx}{1 + 6x}$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 8x^2}}$ $4 \int e^{2-4x} dx$ $5 \int \sin(9x - 1) dx$ $6. \int \cos(3 + 2x) dx.$	Варіант 24 $1 \int \left(\frac{5x^3}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx$ $2 \int \frac{dx}{2 + 7x}$ $3 \int \frac{dx}{4x^2 - 3}$ $4 \int \frac{dx}{\sqrt{8 - 3x^2}}$ $5 \int e^{3-6x} dx$ $6 \int \sin(8x - 5) dx$
Варіант 25 $1 \int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2} dx$ $2 \int \frac{dx}{7 - 3x}$ $3 \int \frac{8dx}{\sqrt{3x + 8}}$	Варіант 26 $1 \int \frac{\sqrt{x} - 2x^3 + 6}{x} dx$ $2 \int \frac{dx}{7x - 3}$ $3 \int \frac{11dx}{\sqrt{8x - 9}}$

$4 \int \frac{10dx}{8x-9}$ $5 \int e^{4-5x} dx$ $6 \int \cos(7x+3) dx$	$4 \int \frac{dx}{4x^2+7}$ $5 \int e^{5-x} dx$ $6 \int \sin(9x+7) dx$
Вариант 27 $1 \int \frac{4\sqrt{x}-6x^2+1}{7x^3} dx$ $2 \int \frac{dx}{5-2x}$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$ $4 \int \frac{2dx}{4+3x}$ $5 \int e^{7+3x} dx$ $6 \int \cos(3x-7) dx$	Вариант 28 $11 \int \left(\frac{5x^3}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx$ $2 \int \frac{dx}{2+7x}$ $3 \int \frac{dx}{4x^2-3}$ $4 \int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$ $5 \int e^{3-6x} dx$ $6 \int \sin(8x-5) dx$
Вариант 29 $1 \int \left(\sqrt{x} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^3}} + 2 \right) dx$ $2 \int \frac{dx}{6x+1}$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$ $4 \int \frac{dx}{3x^2+4}$ $5 \int e^{4-7x} dx$ $6 \int \cos(7x+3) dx$	Вариант 30 $1 \int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx.$ $2 \int \frac{dx}{4-3x}.$ $3 \int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}.$ $4 \int \frac{dx}{5x-4}.$ $5 \int e^{10x+2} dx.$ $6 \int \cos(2+5x) dx.$





Контрольні питання

1. Властивості невизначеного інтеграла.

2. Метод інтегрування за таблицею.

3. Метод компенсуючого множника і метод розкладання.

4. Інтегрування методом заміни змінної.

Практичне заняття ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Мета заняття: ознайомитися з поняттями суми та добутку подій, умовної ймовірності; застосувати теореми додавання та множення ймовірностей подій при розв'язанні практичних задач.

Після вивчення теми «Елементи теорії ймовірностей» здобувач вищої освіти повинен:

- а) *знати*: методику розв'язання задач на суму та множення ймовірностей подій;
- б) *вміти*: застосовувати теореми додавання та множення ймовірностей подій.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Класична формула (1.1) обчислення ймовірності події незастосовна, якщо простір Ω елементарних наслідків випробування є нескінченна множина. У цьому випадку застосовують геометричний підхід до знаходження ймовірностей, при якому проведення випробування інтерпретується як випадкове кидання точки в область Ω й вимірного простору, а подія A – як потрапляння цієї точки в підобласть A області Ω . Множина всіх наслідків випробування виражається відповідною мірою m_{Ω} області Ω , а множина наслідків, сприятливих щодо події A , – мірою m_A області A . Ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \frac{m_A}{m_{\Omega}}$$

Зокрема, в одновимірному координатному просторі ймовірність у данній формулі визначається відношенням довжин відрізків, у двовимірному просторі – відношенням площ плоских фігур, у тривимірному просторі – відношенням об'ємів просторових тіл. Отже, якщо довжину позначено через L , площу – через S і об'єм – через V , то формула (1.5) в одно-, дво-, тривимірному координатному просторі набирає відповідно такого вигляду:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_{\Omega}}, \quad \text{або} \quad P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}}, \quad \text{або} \quad P(A) = \frac{V_A}{V_{\Omega}}.$$

Задача. У точці C , положення якої на телефонній лінії рівноможливо, відбувся розрив. Визначити ймовірність того, що точка C вилучена від точки A на відстань, не менше l .

Відповідь: ймовірність того, що точка C розташована від точки A на відстань, менше l , дорівнює $\frac{l}{4}$ ймовірність того, що точка C розташована від точки A на відстань, не менше l , $P(A) = 1 - \frac{l}{4}$

Наведемо приклади безпосереднього обчислення ймовірностей за формулою (1.1) із застосуванням формул (1.2) – (1.4).

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове число ділиться на 5.

Розв'язання. Позначимо подію A - {число ділиться на 5}. Загальна кількість n наслідків випробування дорівнює 90 (вибирається одне з чисел від 10 до 99). Ці наслідки рівно можливі, оскільки число вибирається навмання, і утворюють повну групу несумісних подій, так як неодмінно буде вибрано одне з цих чисел

Сприятливими щодо події A є ті наслідки, в яких буде вибрано число, що закінчується нулем або п'ятіркою. Кількість таких наслідків $m=18$. Отже, за формулою (1.1) $P(A)=0,2$.

Приклад 2. У групі із двадцяти студентів 30% - відмінники. Для здачі заліку навмання викликаного одного студента. Яка ймовірність того, що викликано відмінника?

Розв'язання. Позначимо подію B - {викликано відмінника}. Випробування полягає у випадковому виборі одного студента із двадцяти, тому загальна кількість наслідків $n=20$. оскільки за умовою в групі 6 відмінників, то кількість сприятливих щодо події A наслідків $m=6$. за формулою (1.1) $P(B)=0,3$.

Приклад 3. Кожний із чотирьох пасажирів може придбати квиток із семи рейсів, що виконуються впродовж дня до аеропорту N . Знайти ймовірність того, що вони придбали квитки:

- а) на перший рейс;
- б) на один і той самий рейс;
- в) на різні рейси.

Розв'язання. Оскільки для кожного пасажирів є 7 варіантів придбання квитка, то, згідно з принципом добутку, кількість усіх наслідків випробування $n=7^4$.

а) Позначимо подію B - {всі пасажирів придбали на перший рейс}. Цій події сприяє лише один наслідок. Отже, $m_B=1$, а за формулою (1.1) $P(B)=0,0004$.

б) Позначимо подію C - {усі пасажирів придбали квитки на один і той самий рейс}. Сприятливими щодо цієї події є 7 наслідків (за кількістю рейсів). Отже, $m=7$, тому $P(C)=0,0029$.

в) Позначимо подію D - {пасажирів придбали квитки на різні рейси}. Кількість наслідків, сприятливих щодо цієї події, $m_D = A_7^4 = 840$, тому $P(D)=0,35$.

Приклад 4. У комплекті 9 виробів найвищої якості становлять 75 % усього комплекту. Випадковим чином відібрано 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виробів:

- а) усі найвищої якості;
- б) лише 4 найвищої якості.

Розв'язання. Оскільки 9 виробів становлять 75 %, то всього в комплекті міститься 12 виробів, три з яких не найвищої якості. Випробування полягає у виборі 6 виробів із дванадцяти. Отже, кількість усіх наслідків випробування $n = C_{12}^6 = 924$.

а) Позначимо подію A - {усі відібрані вироби найвищої якості}. Цій події сприяють лише ті наслідки, в яких відбір шести виробів здійснюється з дев'яти найвищої якості. Отже, $m_A = C_9^6 = C_9^3 = 84$, а $P(A)=0,09$.

б) позначимо подію B - {серед відібраних лише 4 вироби найвищої якості}. Сприятливими щодо цієї події є ті наслідки, в яких 4 вироби відбираються із

дев'яти найвищої якості і два вироби із трьох не найвищої якості. За принципом добутку $m_B = C_9^4 = C_3^2 = 378$, а $P(B)=0,41$.

Приклад 5. Вісім літаків, серед яких два *Ан-140*, що прибули в аеропорт, випадковим чином розміщені на стоянках, розташованих в одному ряду. Яка ймовірність того, що між літаками *АН-140* опиниться один літак іншого типу і не залишиться вільних стоянок, якщо кількість стоянок: а) дорівнює 10; б) є 8?

Розв'язання.

а) Загальна кількість варіантів розміщення восьми літаків на десяти стоянках обчислюється за формулою (1.3): $n = A_{10}^8 = 1814400$.

Позначимо подію C - {між літаками *Ан-140* є один літак іншого типу}. Кількість варіантів такого розташування для літаків *Ан-140* з урахуванням варіантів, що виникають при заміні їх місцями, дорівнює 16. Для літака, який розташується між ними, є 6 варіантів, а для решти п'яти літаків кількість варіантів розташування на семи вільних стоянках дорівнює $A_7^5 = 2520$.

За принципом добутку число m_c наслідків, сприятливих щодо події C , дорівнює $m=16 \cdot 6 \cdot 2520=241920$, а ймовірність події C : $P(C) \approx 0,133$.

б) Загальна кількість варіантів розташування восьми літаків на восьми місцях обчислюється за формулою (1.4): $n=P_8=8!=40320$.

Кількість варіантів указанного в умові розміщення літаків *Ан-140* дорівнює 12, а решти шести літаків на шести місцях, що залишились, $P_6=720$. Отже, $m=12 \cdot 720=8640$, а $P(C) \approx 0,214$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Обчисліть імовірність подій.

Номер завдання відповідає Вашому порядковому номеру в списку групи

Варіант 1. Комплект із 50 виробів містить 30 % нестандартних, причому 40 % нестандартних виробів є бракованими. Знайдіть імовірність того, що серед виробів, навмання взятих із комплекту, а) тільки 3 браковані; б) немає бракованих.

Варіант 2. Вісім літаків, серед яких 2 літаки *Ан-124*, випадковим чином ставляться в чергу на технічне обслуговування. Знайдіть імовірність того, що між літаками *Ан-124* у черзі опиняться три літаки інших типів.

Варіант 3. Партія із 50 виробів містить 20% браку. Із партії випадковим способом відбирають 6 виробів. Знайдіть імовірність того, що серед відібраних виробів: а) не буде бракованих; б) усі виявляться бракованими.

Варіант 4. Дванадцять виробів, серед яких 4 нестандартні, випадковим способом розбито на дві рівні частини. Знайдіть імовірності того, що: а) в обох частинах буде однакова кількість нестандартних виробів; б) усі нестандартні вироби потраплять в одну частину.

Варіант 5. До авіакаси звернулись 3 пасажери, кожний з яких рівно-можливо замовляє квиток на один із шести рейсів, що виконуються протягом доби до аеропорту N . Знайдіть імовірність того, що вони замовлять квитки на різні рейси.

Варіант 6. У лабораторії є 6 приладів з номерами від 1 до 6. Навмання по одному беруться всі прилади і послідовно включаються у схему. Знайдіть імовірність того, що у схемі номери розташуються у зростаючому порядку.

Варіант 7. Десять однотипних виробів, що сходять з конвеєра, випадковим способом розподіляються по трьох контейнерах, у кожний з яких може потрапити будь-яка кількість цих виробів. Знайдіть імовірність того, що у перший контейнер потрапили 6 виробів, у другий – 3, а в третій – 1 виріб.

Варіант 8. Із комплекту, який містить 9 приладів, відбираються будь-які 3 для ввімкнення у схему і після використання повертаються знову в комплект. Яка ймовірність того, що після трьох таких відборів буде використано всі прилади?

Варіант 9. Комплект містить 7 виробів першого сорту, 6 – другого сорту і 2 – третього сорту. Випадковим способом одночасно з комплекту відібрано 5 виробів. Знайдіть імовірності того, що серед відібраних виробів: а) не буде виробів першого сорту; б) будуть вироби тільки першого сорту.

Варіант 10. У касі придбано 5 авіаквитків для п'яти пасажирів і навімання роздано їм. Знайдіть імовірності того, що: а) усі пасажери одержали свої квитки; б) тільки три пасажери одержали свої квитки.

Варіант 11. Комплект містить 5 виробів першого сорту, 4 – другого і 3 вироби третього сорту. Знайдіть імовірність того, що два випадково взяті вироби будуть одного сорту.

Варіант 12. Із п'ятнадцяти рейсів, які здійснює авіакомпанія протягом доби, 60% виконуються власним літаковим парком. Знайдіть імовірність того, що з вибраних навімання п'яти рейсів рівно три виконуються власним парком.

Варіант 13. Сім літаків, серед яких два В-737, прибули в аеропорт і були розміщені випадковим способом на десяти стоянках, розташованих в одному ряду. Знайдіть імовірність того, що між літаками В-737 опинились 4 літаки інших типів і не залишилось вільних стоянок.

Варіант 14. Комплект містить 10 виробів, 5 із яких коштують по 4 грн. кожний, 3 – по 2 грн. і 2 – по 3 грн. Знайдіть імовірність того, що взяті навімання 2 вироби коштують разом 6 грн.

Варіант 15. Шість пасажирів придбали квитки на літак в одному ряду крісел із шести місць і випадковим способом зайняли ці місця. Знайдіть імовірності того, що а) кожний пасажир зайняв своє місце; б) тільки 3 пасажери сіли на свої місця.

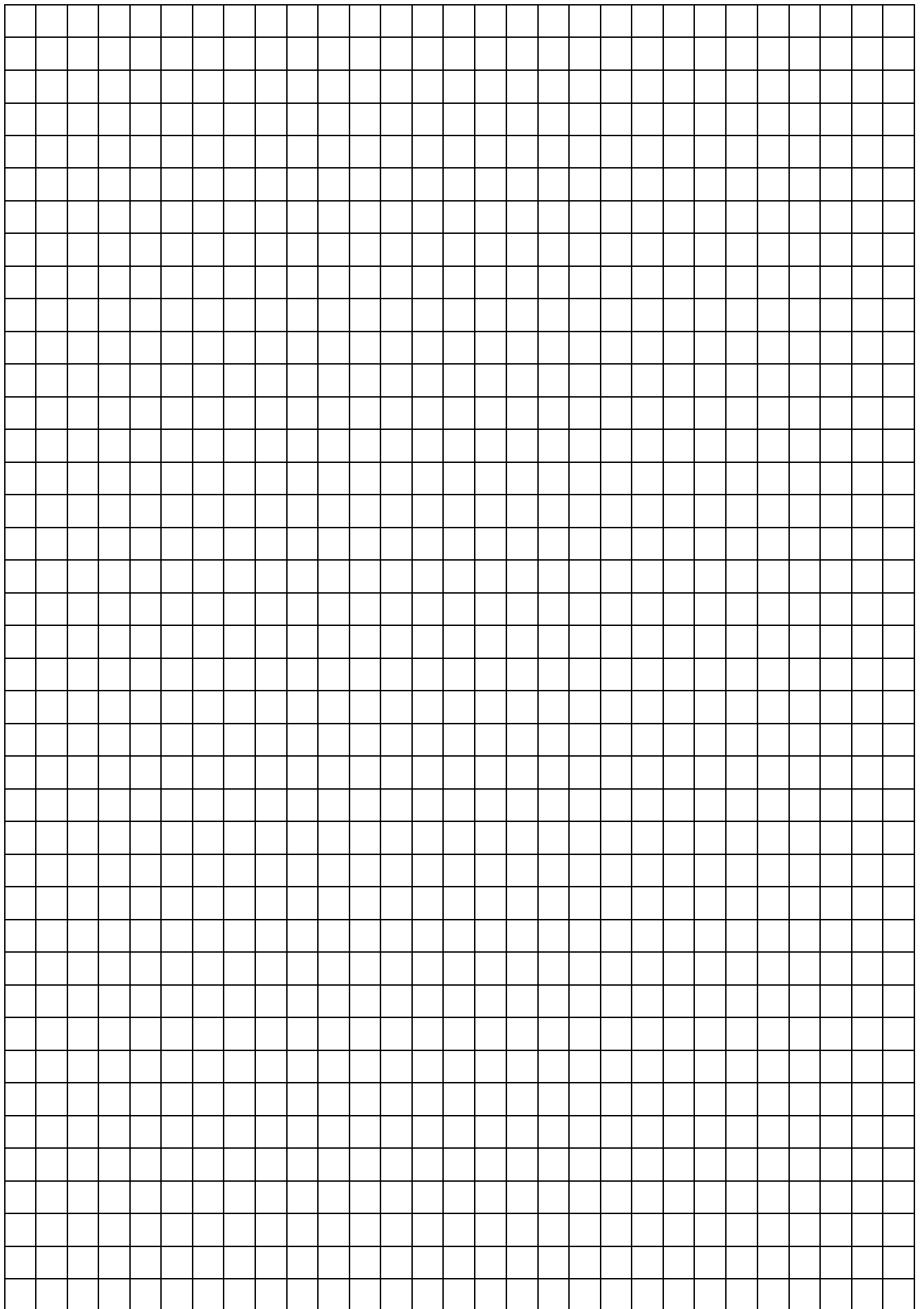
Варіант 16. Партія з 30 виробів містить 10% браку. Знайдіть імовірність того, що серед семи випадково взятих виробів: а) тільки 2 бракованих; б) немає бракованих.

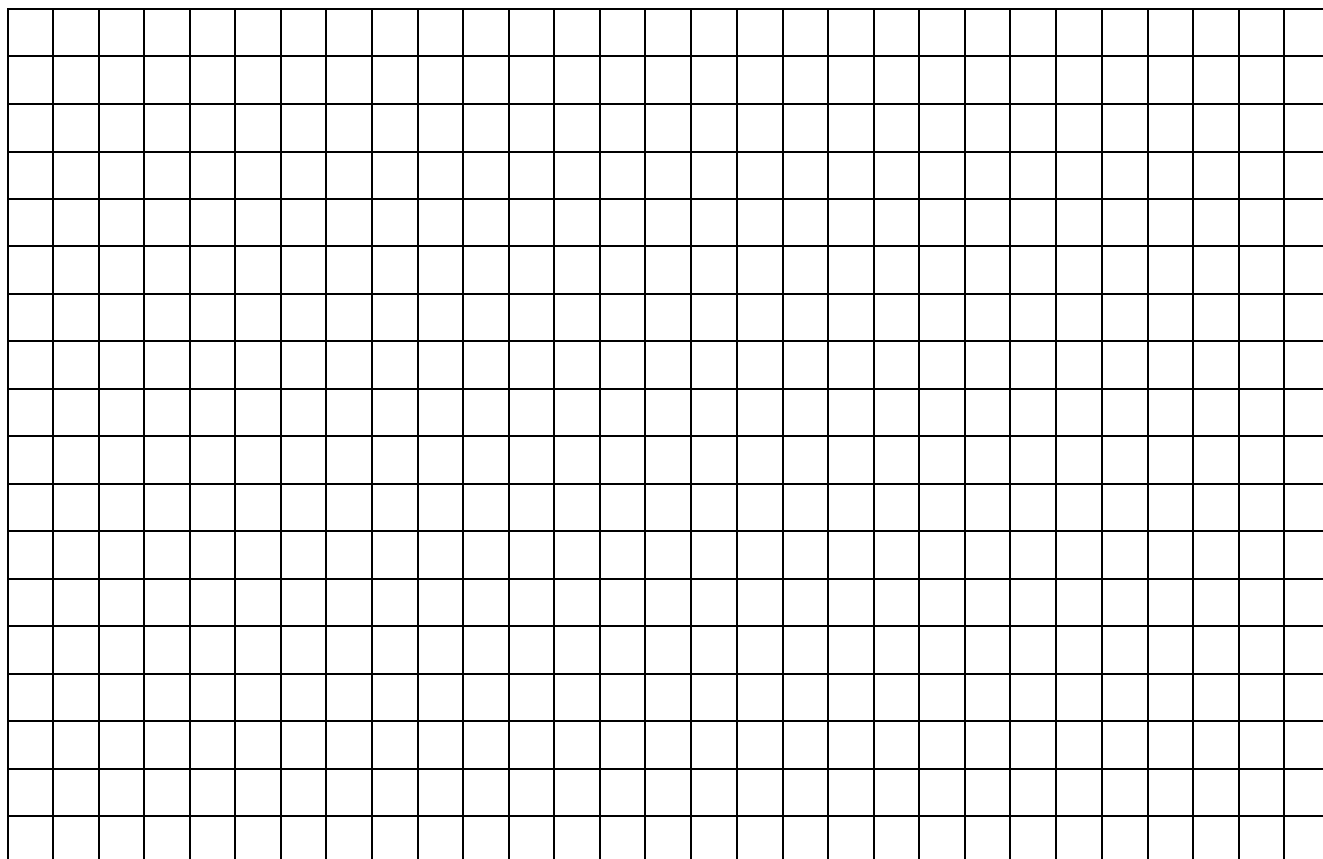
Варіант 17. Шість літаків, серед яких 2 В-747, після посадки в аеропорту було розміщено випадковим способом на шести стоянках, розташованих в одному ряду. Знайдіть імовірність того, що літаки В-747 опинились: а) на крайніх стоянках; б) на сусідніх стоянках.

Варіант 18. Із десяти літаків, що прибувають в аеропорт протягом доби, 80% мають повне комерційне навантаження. Знайдіть імовірності того, що серед п'яти навімання взятих літаків повне комерційне навантаження мають: а) тільки 4 літаки; б) принаймні 4 літаки.

Варіант 19. Партія містить 6 виробів першого сорту, 4 – другого і 3 – третього сорту. Навімання із партії взято 5 виробів. Знайдіть імовірності того, що серед них: а) є лише 3 вироби першого сорту; б) немає виробів першого сорту.

Варіант 30. Комплект містить 5 виробів першого сорту, 3 вироби другого сорту і 2 браковані вироби. Знайдіть імовірності того, що серед шести навмання взятих виробів буде 4 вироби першого сорту і 2 – другого сорту.





Контрольні питання

1. Дайте визначення випадкової події. Які види випадкових подій існують?

2. Сформулюйте класичне визначення ймовірності. Перелічіть основні властивості ймовірності.

3. У яких випадках при розв'язанні задач використовується комбінація, у яких - розміщення?

Практичне заняття ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Мета заняття: навчитися обчислювати числові характеристики розподілу; сформулювати поняття асиметрії, ексцесу статистичного розподілу як числових характеристик.

Після вивчення теми «Основи математичної статистики» здобувач вищої освіти повинен:

- а) *знати*: означення, знаходження числових характеристик випадкових величин;
- б) *вміти*: визначати математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Алгоритм вибіркового методу

- 1) визначення розмаху вибірки: $\Delta = x_{\max} - x_{\min}$;
- 2) побудова ранжованого ряду;
- 3) визначення кількості інтервалів за формулою Стерджеса
 $k = 1 + 3,322 \lg n$ чи $k = \sqrt{n}$, (де n – обсяг вибірки)
- 4) обчислення кроку (довжини) інтервалів:
 $h = (b - a)/k$, де $x_{\min} \leq a$, $x_{\max} \geq b$
- 5) побудова інтервального ряду розподілу, гістограми;
- 6) побудова дискретного ряду розподілу, полігона;
- 7) обчислення числових характеристик: середнього значення, дисперсії, середнього квадратичного відхилення, моди, медіани, коефіцієнта варіації, асиметрію ексцес;
- 8) зробити висновок.

Приклад. Отримані вибіркові дані про врожайність зернових культур (ц/га) по господарствах Запорізької області за 2021 рік:

13,4	13,6	17,8	15,4	24,5
17,6	18,2	16,8	19,3	19,4
16,1	16,1	17,2	19,8	26,7
15,9	26,1	21,7	19,9	19,4
17,2	16,1	15,7	20,3	20,5

Використовуючи вибірковий метод:

- 1. визначити розмах вибірки;
- 2. побудувати ранжований ряд;
- 3. побудувати інтервальний ряд, гістограму;
- 4. побудувати дискретний ряд, полігон;
- 5. обчислити числові характеристики: $\bar{x}$, D_v , σ , V , M_0 , Me , As , E .
- 6. зробити висновок на підставі отриманих числових характеристик.

Розв'язання. Обсяг вибірки (кількість елементів): $n=25$

1. Визначимо максимальний і мінімальний варіант вибірки:

$$x_{\min}=13,4, \quad x_{\max}=26,7.$$

Розмах вибірки обчислимо за формулою:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 26,7 - 13,4 = 13,3$$

2. Побудуємо ранжований ряд, розташувавши значення вибірки в зростаючому чи спадному порядку:

13,4	16,1	17,2	19,4	20,5
13,6	16,1	17,6	19,4	21,7
15,4	16,1	17,8	19,8	24,5
15,7	16,8	18,2	19,9	26,1
15,9	17,2	19,3	20,3	26,7

Для побудови інтервального ряду розподілу визначимо кількість інтервалів за формулою:

$$k = \sqrt{n} = \sqrt{25} = 5$$

Довжину (крок) інтервала визначаємо за формулою:

$$h = \frac{27 - 13}{5} = 2,8$$

Складемо інтервальний ряд розподілу:

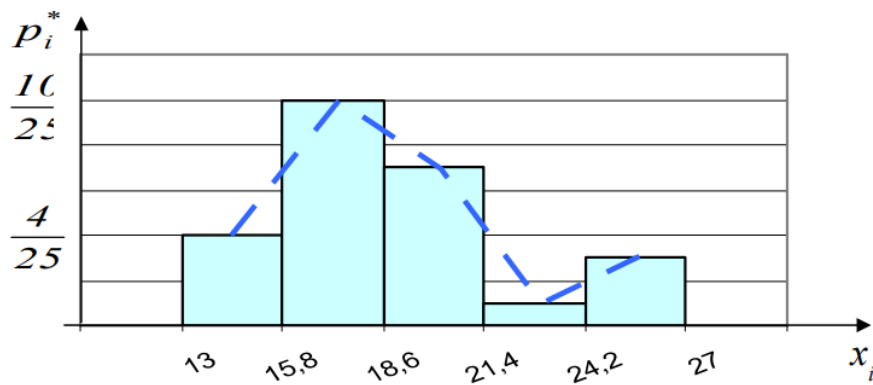
x_i	13 – 15,8	15,8 – 18,6	18,6 – 21,4	21,4 – 24,2	24,2 – 27
n_i	4	10	7	1	3
$p_i^* = \frac{n_i}{n}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$

Для отриманого ряду розподілу побудуємо гістограму відносних частот

1. Для переходу до дискретного ряду розподілу, припускаємо, що частоти згруповані в центрах інтервалів

x_i^*	14,4	17,2	20	22,8	25,6
n_i	4	10	7	1	3
$p_i^* = \frac{n_i}{n}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$

Побудуємо полігон відносних частот (зобразимо на гістограмі).



1. Обчислимо числові характеристики вибірки даних:

- середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{14,4 \cdot 4 + 17,2 \cdot 10 + 20 \cdot 7 + 22,8 \cdot 1 + 25,6 \cdot 3}{25} = 18,77$$

- дисперсію:

$$\overline{D} = \frac{14,4^2 \cdot 4 + 17,2^2 \cdot 10 + 20^2 \cdot 7 + 22,8^2 \cdot 1 + 25,6^2 \cdot 3}{25} - 18,77^2 = 10,64$$

- виправлену дисперсію:

$$\overline{D}_u = \frac{n}{n-1} \overline{D} = \frac{25}{24} \cdot 10,64 = 11,08$$

- середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\overline{D}_u} = \sqrt{11,08} \approx 3,26$$

- коефіцієнт варіації:

$$\overline{V} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{3,26}{18,77} \cdot 100\% = 17,37\%$$

- моду:

$$M_0 = 15,8 + 2,8 \cdot \frac{10 - 4}{2 \cdot 10 - 4 - 7} \approx 17,67$$

- медіану:

$$M_e = \frac{1}{3} 17,67 + \frac{2}{3} \cdot 18,77 = 18,4$$

- асиметрію: $A_s = -0,36$

- ексцес: $E = 0,78$.

Висновок: в цілому по господарствам Запорізької області середня врожайність зернових культур складає 15,51-22,3 (ц/га), $\bar{x} \pm \bar{\sigma}$. Причому в більшій частині господарств отриманий урожай 17,67(ц/га), M_0 . У

цілому по області розсіювання за результатами врожайності значне $\bar{V} = 17,37\%$. Так як $As = -0,36$ (відємна), то скошеність данного розподілу лівостороння, ексцес $E = 0,78$ (додатний) - то розподіл гостровершиний.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Номер завдання відповідає Вашому порядковому номеру в списку групи

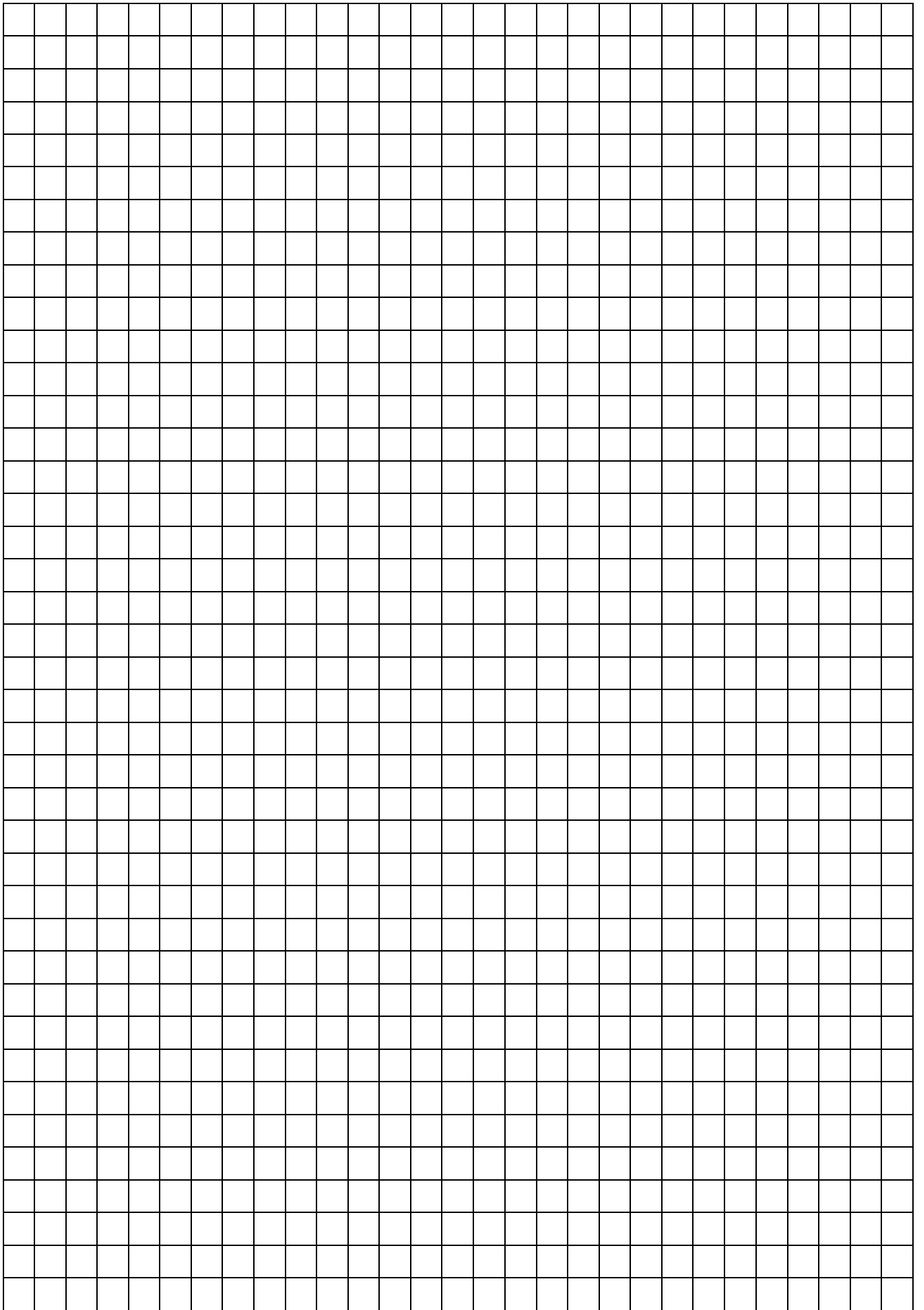
У таблиці наведено вибіркові дані прибутку від реалізації по господарствам Запорізької області. Виконати наступні завдання:

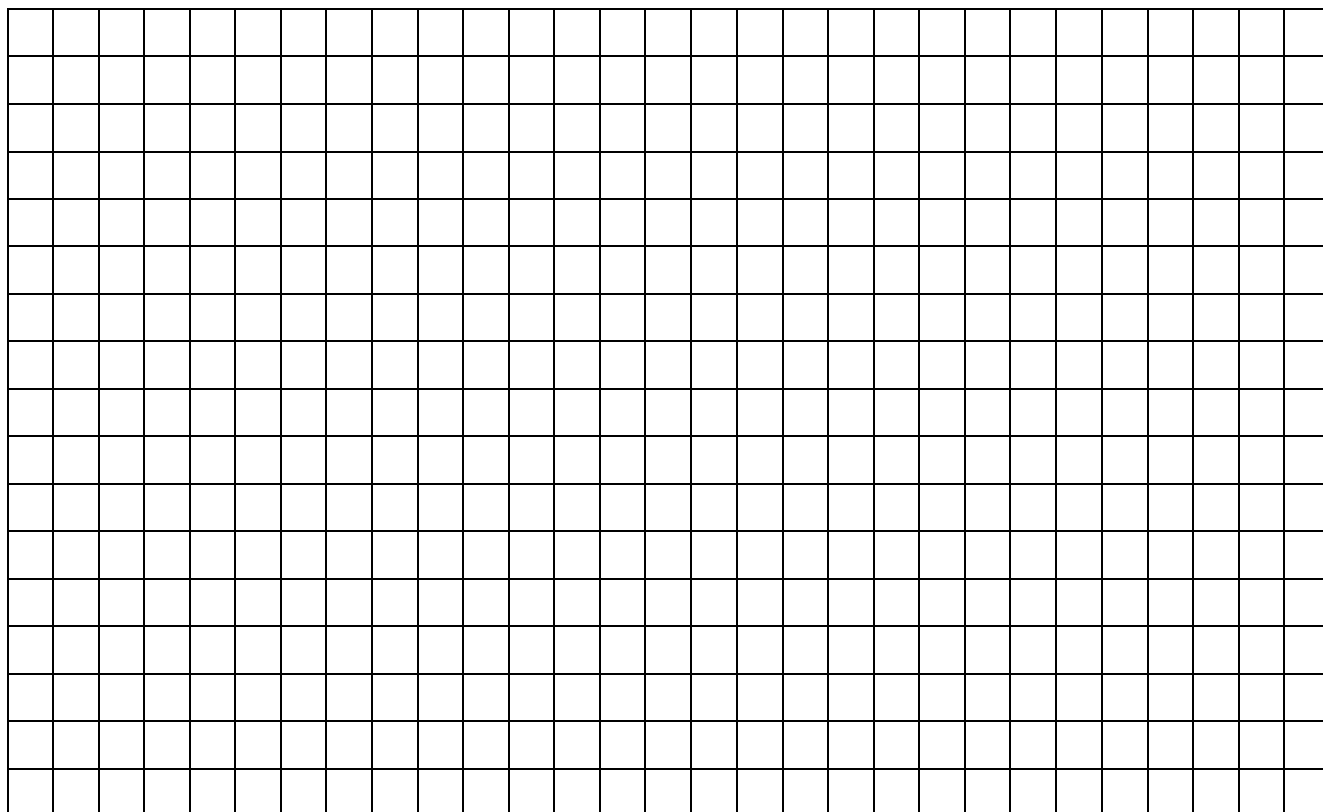
- визначити розмах вибірки;
- побудувати ранжований ряд розподілу;
- побудувати інтервальний ряд розподілу, гистограму відносних частот;
- побудувати дискретний ряд розподілу, полігон;
- обчислити числові характеристики: моду, медіану, середнє значення, дисперсію,
- виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.
- зробити висновок на підставі отриманих числових характеристик.

1)	12,74	15,79	17,85	17,70	18,77	10,93	14,83	17,49	13,13
	11,92	11,61	13,34	13,75	11,06	14,16	14,49	15,57	14,57
	14,56	17,99	15,13	14,56	14,27	19,24	17,03	20,05	13,99
	12,08	16,38	17,10	19,14	15,13	14,25	16,65	14,54	16,82
2)	12,69	8,77	9,14	9,05	12,64	13,11	5,52	10,47	12,42
	12,49	13,57	21,41	4,64	12,17	19,94	13,76	13,45	8,65
	13,02	17,95	14,70	19,21	9,04	11,93	13,93	15,11	8,69
	19,38	12,57	18,11	9,79	13,97	14,04	9,77	14,96	22,24
3)	17,23	24,12	29,67	26,39	34,60	26,11	17,55	14,94	27,08
	31,75	12,89	21,89	23,66	11,26	26,55	23,14	16,45	29,36
	22,73	15,29	19,52	27,94	22,29	17,17	21,49	22,04	16,80
	21,58	35,30	29,46	28,11	24,22	28,07	23,49	22,42	12,71
4)	28,26	30,42	36,32	18,99	23,32	34,24	26,13	27,42	18,42
	16,84	23,28	17,72	33,27	29,64	10,13	37,98	35,97	26,45
	19,73	11,39	27,18	21,61	26,80	13,62	21,54	34,74	32,51
	40,06	38,06	28,84	28,63	26,96	33,65	21,93	27,66	27,70
5)	7,35	25,62	27,69	24,00	18,29	3,04	21,72	6,28	21,86
	29,05	21,86	17,80	10,76	20,03	20,91	13,05	3,63	17,26
	12,71	24,13	21,80	4,13	14,62	13,58	14,89	8,87	17,34
	23,36	12,80	13,91	21,12	16,42	20,39	11,85	3,17	22,08
6)	3,33	9,86	0,47	10,25	8,34	9,52	4,37	-1,52	7,05
	8,54	5,50	10,05	7,38	10,69	8,51	6,08	2,74	12,79
	7,39	8,28	7,86	5,90	4,82	0,58	6,33	2,54	10,43
	6,23	3,62	10,57	3,72	0,18	11,14	8,10	7,05	0,78
7)	28,91	29,20	24,78	20,49	22,31	24,69	28,76	30,54	26,23
	29,68	24,32	30,33	26,89	28,11	23,16	27,38	26,84	28,61
	27,15	21,80	28,43	32,96	30,13	34,82	26,07	25,69	26,80
	20,35	25,43	28,26	34,10	27,83	29,36	21,71	25,71	31,34
8)	14,35	15,44	15,21	18,12	11,85	17,83	20,89	21,57	7,62
	11,78	22,59	23,37	23,57	27,58	20,78	3,46	13,49	17,35

	18,90	21,59	11,03	18,41	15,53	14,18	17,68	21,63	20,54
	10,58	16,55	13,81	11,24	19,31	13,50	22,31	16,84	15,78
9)	17,40	15,26	9,82	19,73	16,02	18,09	17,86	16,39	17,22
	20,44	9,77	16,85	5,50	18,54	16,25	19,30	16,23	17,30
	18,27	19,73	16,98	17,75	18,13	16,03	17,62	17,22	14,59
	16,20	18,55	14,18	16,41	16,82	16,76	16,74	18,58	13,47
10)	2,93	6,59	9,06	8,88	10,16	0,76	5,44	8,63	3,39
	1,94	1,57	3,65	4,14	0,92	4,64	5,03	6,32	5,12
	5,11	9,22	5,80	5,55	4,77	10,73	8,08	11,70	4,43
	2,13	7,29	8,17	10,61	5,80	4,74	7,62	5,08	7,82
11)	12,74	12,74	12,74	12,74	12,74	12,74	12,74	12,74	12,74
	15,79	15,79	15,79	15,79	15,79	15,79	15,79	15,79	15,79
	17,85	17,85	17,85	17,85	17,85	17,85	17,85	17,85	17,85
	17,70	17,70	17,70	17,70	17,70	17,70	17,70	17,70	17,70
12)	8,69	8,77	9,14	9,05	12,64	13,11	5,52	10,47	12,42
	10,49	13,57	21,41	4,64	10,17	10,94	13,76	13,45	8,65
	13,02	12,95	14,70	12,21	9,04	11,93	13,93	15,11	8,69
	19,38	10,57	10,11	9,79	13,97	14,04	9,77	12,44	12,41
13)	17,23	14,12	19,67	16,39	14,60	16,11	17,55	14,94	27,08
	21,75	17,44	11,89	13,66	11,26	26,55	13,14	16,45	29,36
	12,73	15,29	19,52	27,94	22,29	17,17	21,49	22,04	16,80
	21,58	35,30	19,46	28,11	24,22	28,07	13,49	22,42	12,71
14)	8,26	30,42	26,32	18,99	23,32	14,24	26,13	27,42	18,42
	6,84	23,28	17,72	23,27	19,64	10,13	17,98	15,97	16,45
	19,73	31,39	27,18	21,61	16,80	13,62	21,54	34,74	32,51
	10,06	38,06	8,84	28,63	26,96	33,65	21,93	27,66	27,70
15)	10,35	15,62	17,69	14,00	18,29	3,04	11,72	16,28	11,86
	19,05	21,86	12,80	10,76	10,03	10,91	13,05	3,63	17,26
	12,71	24,13	21,80	4,13	14,62	13,58	14,89	8,87	12,34
	23,36	12,80	13,91	21,12	16,42	20,39	11,85	3,17	13,6
16)	13,33	9,86	10,47	10,25	8,34	19,52	14,37	11,52	7,05
	18,54	15,50	10,05	7,38	10,69	8,51	16,08	12,74	12,79
	17,39	8,28	7,86	5,90	14,82	10,58	16,33	12,54	10,43
	6,23	3,62	10,57	13,72	10,18	11,14	8,10	7,05	10,78
17)	8,91	29,20	4,78	20,49	2,31	4,69	8,76	10,54	16,23
	9,68	4,32	30,33	6,89	28,11	23,16	27,38	26,84	18,61
	7,15	21,80	8,43	2,96	30,13	4,82	6,07	5,69	26,80
	20,35	5,43	8,26	4,10	27,83	29,36	21,71	25,71	31,34
18)	14,35	15,44	15,21	18,12	11,85	17,83	20,89	21,57	7,62
	11,78	12,59	13,37	13,57	17,58	10,78	13,46	13,49	17,35
	18,90	21,59	11,03	18,41	15,53	14,18	17,68	11,63	22,08
	10,58	16,55	13,81	11,24	19,31	13,50	22,31	16,84	24,44
19)	7,40	15,26	19,82	19,73	16,02	8,09	7,86	16,39	17,22
	10,44	9,77	16,85	15,50	8,54	16,25	9,30	16,23	17,30
	18,27	9,73	16,98	17,75	8,13	16,03	17,62	7,22	14,59
	16,20	8,55	14,18	16,41	16,82	16,76	16,74	8,58	11,05
20)	12,93	26,59	9,06	8,88	10,16	10,76	5,44	8,63	13,39
	11,94	21,57	13,65	4,14	10,92	4,64	5,03	6,32	5,12
	15,11	9,22	5,80	5,55	4,77	10,73	8,08	11,70	4,43
	12,13	7,29	8,17	10,61	15,80	4,74	7,62	5,08	7,82

21)	22,74	15,79	7,85	17,70	18,77	10,93	14,83	17,49	13,13
	11,92	11,61	13,34	13,75	11,06	14,16	14,49	15,57	4,57
	14,56	17,99	5,13	4,93	4,27	19,24	17,03	10,05	13,99
	22,08	16,38	17,10	9,14	15,13	14,25	16,65	14,54	6,82
22)	12,69	8,77	9,14	9,05	12,64	13,11	15,52	10,47	12,42
	12,69	13,57	21,41	14,64	12,17	11,94	11,76	13,45	8,65
	13,02	17,95	14,70	11,21	9,04	11,93	13,93	15,11	8,69
	11,38	11,57	18,11	9,79	13,97	14,04	9,77	12,44	12,41
23)	11,23	14,12	19,67	16,39	14,60	16,11	17,55	14,94	27,08
	21,75	17,44	21,89	23,66	11,26	16,55	23,14	16,45	29,36
	12,73	15,29	19,52	17,94	22,29	17,17	21,49	22,04	16,80
	11,58	35,30	19,46	28,11	24,22	18,07	23,49	22,42	12,71
24)	18,26	20,42	16,32	18,99	23,32	34,24	16,13	17,42	18,42
	26,84	13,28	17,72	13,27	19,64	10,13	17,98	15,97	16,45
	19,73	21,39	17,18	21,61	26,80	13,62	11,54	14,74	32,51
	20,06	18,06	18,84	18,63	16,96	13,65	21,93	17,66	17,70
25)	18,26	20,42	16,32	18,99	23,32	34,24	16,13	17,42	18,42
	26,84	13,28	17,72	13,27	19,64	10,13	17,98	15,97	16,45
	19,73	21,39	17,18	21,61	26,80	13,62	11,54	14,74	32,51
	20,06	18,06	18,84	18,63	16,96	13,65	21,93	17,66	17,70
26)	7,35	25,62	17,69	24,00	18,29	3,04	11,72	16,28	20,16
	19,05	11,86	11,80	10,76	10,03	10,91	13,05	13,63	11,26
	12,71	01,13	11,80	4,13	14,62	13,58	14,89	8,87	11,34
	13,36	12,80	13,91	21,12	16,42	20,39	11,85	3,17	22,08
27)	13,33	9,86	10,47	10,25	8,34	9,52	4,37	11,52	7,05
	18,54	5,50	10,05	7,38	10,69	8,51	6,08	12,74	12,79
	7,39	8,28	7,86	15,90	4,82	10,58	6,33	10,54	10,43
	16,23	3,62	10,57	13,72	10,18	11,14	8,10	7,05	10,78
28)	18,91	20,20	21,78	20,49	22,31	24,69	28,76	10,54	16,23
	19,68	14,32	10,33	26,89	28,11	13,16	17,38	16,84	18,61
	17,15	21,80	18,43	12,96	10,13	14,82	26,07	25,69	26,80
	20,35	25,43	28,26	34,10	27,83	29,36	21,71	15,71	31,34
29)	4,35	11,44	15,21	18,12	11,85	17,83	20,89	21,57	7,62
	11,78	12,59	23,37	13,57	27,58	20,78	3,46	13,49	17,35
	18,90	21,59	11,03	18,41	15,53	14,18	17,68	21,63	10,54
	10,58	16,55	13,81	11,24	19,31	13,50	12,31	16,84	15,78
30)	17,40	15,26	9,82	9,73	16,02	18,09	17,86	16,39	17,22
	10,44	9,77	16,85	15,50	18,54	32,25	29,30	26,23	17,30
	8,27	9,73	6,98	27,75	18,13	16,03	17,62	17,22	14,59
	16,20	8,55	14,18	16,41	16,82	16,76	26,74	28,58	23,47





Контрольні питання

1. Сформулюйте суть вибіркового методу

2. Дайте означення генеральної і вибіркової сукупності.

3. Що таке полігон? Гістограма?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Блудова Т.В. Практикум з вищої математики : навчальний посібник. К.: КНЕУ, 2006. 404 с.
2. Бобик О.І., Берегова О.І., Копитько Б.І. Теорія ймовірностей і математична статистика : Підручник. К.: ВД "Професіонал", 2007. 560 с.
3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика : навч. посіб.: у 2-х ч. К.: КНЕУ, 2001. Ч. 1. 564 с.
4. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навчальний посібник. У 3 ч. К. : Книги України ЛТД, 2009. 400с.
5. Голець Б.І., Кігель В.Р., Пирятинська О.Ю. Методичний посібник для самостійної роботи студентів : Вища математика. К.: ІЕУГП, 1998. 68 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика : навчальний посібник. Київ : А.С.К. 2004. 648 с.
7. Єрмакова О.А. Вища математика : навчальний посібник. К. : Університет "Україна", 2004. 444 с
8. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах : навчальний посібник. Вид. 2-ге, перероб. та доп. К.: Центр навчальної літератури, 2009. 600 с
9. Мізюк В.Г. Вища математика : навч.-метод. посіб. Рівне: НУВГП, 2010. 163 с.
10. Назарова О.П., Рубцов М.О., Іщенко О.А. та ін. Індивідуальні завдання з вищої математики : навч. посібник. Мелітополь : ТОВ «Видавничий будинок. ММД», 2011. 238 с.
11. Рубцов М.О., Кравець В.І., Назарова О.П. Вища математика : навч. посіб. у 2-х ч., ч.1. Мелітополь : Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького. 2015. 240 с.
12. Рубцов М.О., Кравець В.І., Назарова О.П. Вища математика : навч. посіб. у 2-х ч., ч.2. Мелітополь : Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького. 2015. 220 с.
13. Соколенко О.І. Вища математика : підручник. К.: Видавничий центр "Академія", 2003. 432 с.