

Наближення класів $W_\beta^r H^\alpha$ тригармонійними інтегралами Пуассона

Інна В. Кальчук, Василь І. Кравець, Уляна З. Грабова

(Представлена В. П. Моторним)

Анотація. Одержано асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класів $W_\beta^r H^\alpha$ в рівномірній метриці у випадку $r > 3$, $0 \leq \alpha < 1$.

2010 MSC. 42A05, 41A60.

Ключові слова та фрази. Задача Колмогорова–Нікольського, тригармонійний інтеграл Пуассона, асимптотична рівність, похідна Вейля–Надя, умова Ліпшиця.

1. Вступ

Нехай L — простір 2π -періодичних сумовних на періоді функцій f з нормою $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$; C — простір 2π -періодичних неперервних функцій f , у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π -періодичних вимірних та істотно обмежених функцій f з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$.

Нехай далі $f \in L$ і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Якщо $r > 0$ і β — фіксоване дійсне число, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \quad (1.1)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ , то функцію φ , називають (r, β) -похідною функції f в розумінні Вейля–Надя і позначають через

Стаття надійшла в редакцію 20.05.2019

f_β^r (див. [1, с. 30]). Множину усіх функцій, котрі задовольняють таку умову, позначають через W_β^r .

Якщо $f \in W_\beta^r$, і при цьому $f_\beta^r \in H^\alpha$, тобто f_β^r задовольняє умову Ліпшиця порядку α :

$$|f_\beta^r(x+h) - f_\beta^r(x)| \leq |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq h \leq 2\pi, \quad x \in \mathbb{R},$$

то кажуть, що f належить до класу $W_\beta^r H^\alpha$. При $\alpha = 0$ вважають, що $W_\beta^r H^0 = W_{\beta, \infty}^r$. При $r = \beta$ отримуємо клас $W^r H^\alpha$ функцій f з похідною порядку $r > 0$ в розумінні Вейля, яка задовольняє умову Ліпшиця порядку α .

Нехай $f \in L$. Величини

$$P_1(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.2)$$

$$P_2(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})\right) e^{-\frac{k}{\delta}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.3)$$

$$P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})k + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 k^2\right) e^{-\frac{k}{\delta}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \delta > 0, \quad (1.4)$$

називають відповідно інтегралом Пуассона, бігармонійним інтегралом Пуассона та тригармонійним інтегралом Пуассона [2] функції f .

Величини (1.2)–(1.4) можна представити у вигляді сингулярних інтегралів

$$P_n(\delta; f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) K_n(\delta; t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \quad \delta > 0,$$

з ядрами

$$K_1(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt, \quad (1.5)$$

$$K_2(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt, \quad (1.6)$$

$$K_3(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}) + \frac{k^2}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt. \quad (1.7)$$

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \rightarrow \infty$ величин

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; P_3(\delta))_C = \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \|f(\cdot) - P_3(\delta; f; \cdot)\|_C. \quad (1.8)$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta)$ таку, що $\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; P_3(\delta))_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, $\delta \rightarrow \infty$, то, слідуючи О. І. Степанцю [1, с. 198], будемо говорити, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу $W_\beta^r H^\alpha$ та тригармонійного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці.

Задача Колмогорова–Нікольського на різних функціональних класах для методів підсумовування рядів Фур'є розв'язувалась в роботах О. І. Степанця та його учнів (див., напр., [3–7]). Відзначимо, що в переважній більшості робіт розглядається випадок трикутних числових матриць. В деякій мірі менше вивчено асимптотичну поведінку при $\delta \rightarrow \infty$ величин наближення класів диференційовних функцій методами підсумовування, що визначаються сукупністю функцій натурального аргументу, що залежать від дійсного параметра δ . Зокрема, вивченню апроксимативних властивостей інтегралів Пуассона та бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій присвячені роботи [8–21], в тому числі на класах $W_\beta^r H^\alpha$ — роботи [22–24]. Апроксимативні ж властивості тригармонійних інтегралів Пуассона вивчалися в роботах [25, 26].

Як відомо [27], при наближенні періодичних диференційовних функцій сингулярними інтегралами з додатніми ядрами (очевидно, що $K_1(\delta; t) > 0$ і $K_2(\delta; t) > 0$) не можливо досягти кращого порядку наближення ніж $\frac{1}{\delta^2}$, $\delta \rightarrow \infty$. В той же час, ядро $K_3(\delta; t)$ є знакозмінним, тому досить цікавим та актуальним є вивчення швидкості наближення класів диференційовних функцій, зокрема класів $W_\beta^r H^\alpha$, з допомогою тригармонійних інтегралів Пуассона, адже у цьому випадку можна досягти вищого порядку наближення ніж $\frac{1}{\delta^2}$ при $\delta \rightarrow \infty$. Тому постало питання про відшукування асимптотичних рівностей для величин (1.8).

2. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класів $W_\beta^r H^\alpha$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. При $r > 3, 0 \leq \alpha < 1$ і $\delta \rightarrow \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; P_3(\delta))_C = \frac{1}{\delta^3} \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{4}{3} f_0^{(1)} + f_0^{(2)} + \frac{1}{6} f_0^{(3)} \right\|_C + O(\Upsilon(r)), \quad (2.1)$$

де $f_0^{(r)}$, $r = 1, 2, 3$, — (r, β) -похідні в сенсі Вейля-Надя при $\beta = 0$, а

$$\Upsilon(r) = \begin{cases} \frac{1}{\delta^{r+\alpha}}, & 3 < r + \alpha < 4, \\ \frac{\ln \delta}{\delta^4}, & r + \alpha = 4, \\ \frac{1}{\delta^4}, & r + \alpha > 4. \end{cases} \quad (2.2)$$

Доведення. Для тригармонійного інтеграла Пуассона $P_3(\delta)$, аналогічно до співвідношення (6) із [28], запишемо підсумовуючу функцію $\tau(u)$ наступним чином

$$\tau(u) = \begin{cases} (1 - (1 + \gamma u + \theta u^2) e^{-u}) \delta^r, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\delta}, \\ (1 - (1 + \gamma u + \theta u^2) e^{-u}) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (2.3)$$

де $\gamma = \gamma(\delta) = \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})\delta$, $\theta = \theta(\delta) = \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 \delta^2$, $\delta > 0$.

Представимо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (2.3), у вигляді $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} \left(\frac{4}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{1}{6} u^3 \right) \delta^r, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\delta}, \\ \left(\frac{4}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{1}{6} u^3 \right) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\mu(u) = \begin{cases} (1 - (1 + \gamma u + \theta u^2) e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2} u - \frac{1}{\delta} u^2 - \frac{1}{6} u^3) \delta^r, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\delta}, \\ (1 - (1 + \gamma u + \theta u^2) e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2} u - \frac{1}{\delta} u^2 - \frac{1}{6} u^3) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Згідно з теоремою 3 роботи Л. І. Баусова [22], якщо перетворення Фур'є функцій $\varphi(u)$ і $\mu(u)$ виду

$$\widehat{\varphi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(u) \cos \left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du, \quad (2.6)$$

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mu(u) \cos \left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \quad (2.7)$$

сумовні на всій числовій осі, інтеграли

$$A(\alpha, \varphi) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \varphi(u) \cos \left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \right| dt, \quad (2.8)$$

$$A(\alpha, \mu) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \quad (2.9)$$

збіжні та $A(\alpha, \mu) = o(A(\alpha, \varphi))$, $\delta \rightarrow \infty$, то при $0 \leq \alpha < 1$ і $\delta \rightarrow \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; P_3(\delta))_C = \frac{1}{\delta^r} \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \|f_\varphi\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \mu)\right), \quad (2.10)$$

де

$$f_\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\delta}\right) - f_\beta^r(x) \right) \widehat{\varphi}(t) dt. \quad (2.11)$$

Переконаємося, що умови теореми 3 роботи Баусова [22] виконуються для функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$ вигляду (2.4) та (2.5).

Сумовність претворень (2.6) та (2.7) показано в роботі [29].

З метою доведення збіжності інтеграла $A(\alpha, \varphi)$, згідно з теоремою 1 роботи [22, с. 6], покажемо збіжність інтегралів

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)|, \quad (2.12)$$

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du \quad (2.13)$$

і знайдемо для них оцінки зверху.

Оцінимо перший інтеграл з (2.12). При $u \in [0; \frac{1}{\delta}]$, $\delta > 2$, матимемо

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2}{\delta} u^{1-\alpha} + u^{2-\alpha} \right) du \leq \frac{K_1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}. \quad (2.14)$$

При $u \in [\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}]$, $\delta > 2$, і $r > 3$, враховуючи, що $\varphi''(u) > 0$, отримуємо

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} d\varphi'(u) \leq \frac{K_2}{\delta^{3-(r+\alpha)}}.$$

Отже,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Оцінимо другий та третій інтеграли з (2.12). Оскільки

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| \leq 2^{\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u |d\varphi'(u)|.$$

та є очевидною оцінка

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u |d\varphi'(u)| = O(1), \quad \delta \rightarrow \infty,$$

то матимемо

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = O(1), \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)| = O(1), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Використовуючи схему оцінювання першого інтеграла з (12) роботи [15], знайдемо оцінки інтеграла $\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du$ на кожному з проміжків $[0; \frac{1}{\delta}]$, $[\frac{1}{\delta}; 1]$ та $[1; \infty)$. При $r > 3$ і $\delta \rightarrow \infty$ отримаємо

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{u^{1+\alpha}} \left(\frac{4}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{1}{6} u^3 \right) du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad (2.17)$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^1 \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{\frac{1}{\delta}}^1 \frac{1}{u^{1+\alpha}} \left(\frac{4}{3\delta^2} u^{1-r} + \frac{1}{\delta} u^{2-r} + \frac{1}{6} u^{3-r} \right) du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad (2.18)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} \frac{1}{u^{1+\alpha}} \left(\frac{4}{3\delta^2} u^{1-r} + \frac{1}{\delta} u^{2-r} + \frac{1}{6} u^{3-r} \right) du = O(1). \quad (2.19)$$

З (2.17)–(2.19) випливає оцінка

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad r > 3, \delta \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Аналогічно до формули (2.30) роботи [30], можна перекоонатись в справедливості рівності

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + O\left(|\varphi(0)| + |\varphi(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)|\right), \quad (2.21)$$

де $\lambda(u) = 1 - \frac{4}{3\delta^2}u - \frac{1}{\delta}u^2 - \frac{1}{6}u^3$. Оскільки

$$\int_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O(1), \delta \rightarrow \infty,$$

то в силу співвідношення (2.21), враховуючи оцінки (2.15) та (2.16), отримаємо

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad r > 3, \delta \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Ми показали збіжність інтегралів (2.12) та (2.13), а отже, згідно з теоремою 1 роботи [22], інтеграл $A(\alpha, \varphi)$ збіжний і для нього має місце оцінка

$$A(\alpha, \varphi) = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Доведемо тепер збіжність інтеграла (2.9). Для цього, згідно з теоремою 1 роботи [22, с. 6], покажемо збіжність інтегралів

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)|, \quad (2.24)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (2.25)$$

Для того, щоб оцінити інтеграли з (2.24) дослідимо спочатку наступну функцію

$$\tilde{\mu}(u) = 1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2}u - \frac{1}{\delta}u^2 - \frac{1}{6}u^3. \quad (2.26)$$

Оскільки

$$\tilde{\mu}'(u) = (1 + \gamma + \theta u^2)e^{-u} - (\gamma + 2\theta u)e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2} - \frac{2}{\delta}u - \frac{1}{2}u^2,$$

$$\tilde{\mu}''(u) = -(1 + \gamma + \theta u^2)e^{-u} - 2(\gamma + 2\theta u)e^{-u} - 2\theta e^{-u} - \frac{2}{\delta} - u,$$

$$\tilde{\mu}(0) = 0, \quad \tilde{\mu}'(0) = 1 - \gamma - \frac{4}{3\delta^2} < 0,$$

то можна показати, що при $u \geq 0$

$$\tilde{\mu}(u) \leq 0, \quad \tilde{\mu}'(u) < 0, \quad \tilde{\mu}''(u) < 0. \quad (2.27)$$

В силу (2.27) та нерівностей

$$e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24}, \quad e^{-u} \geq 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6}, \quad e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2},$$

$$e^{-u} \geq 1 - u, \quad e^{-u} \leq 1, \quad u \geq 0,$$

одержимо

$$|\tilde{\mu}(u)| \leq u\left(\gamma - 1 + \frac{4}{3\delta^2}\right) + u^2\left(\frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta}\right) + u^3\left(\frac{\gamma}{2} - \theta\right) + u^4\left(\frac{1}{24} + \frac{\theta}{2}\right),$$

$$|\tilde{\mu}'(u)| \leq \left(\gamma - 1 + \frac{4}{3\delta^2}\right) + 2u\left(\frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta}\right) + 3u^2\left(\frac{\gamma}{2} - \theta\right) + u^3\left(\frac{1}{6} + 2\theta\right),$$

$$|\tilde{\mu}''(u)| \leq 2\left(\frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta}\right) + 6u\left(\frac{\gamma}{2} - \theta\right) + u^2\left(\frac{1}{2} + 6\theta\right).$$

Тоді, взявши до уваги оцінки

$$\gamma - 1 + \frac{4}{3\delta^2} \leq \frac{3}{\delta^3}, \quad \frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta} \leq \frac{3}{\delta^2}, \quad \frac{\gamma}{2} - \theta \leq \frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{24} + \frac{\theta}{2} \leq 1, \quad \frac{1}{2} + 6\theta \leq 3, \quad \frac{1}{6} + 2\theta \leq 2,$$

будемо мати

$$|\tilde{\mu}(u)| \leq \frac{3}{\delta^3}u + \frac{3}{\delta^2}u^2 + \frac{2}{\delta}u^3 + u^4, \quad (2.28)$$

$$|\tilde{\mu}'(u)| \leq \frac{3}{\delta^3} + \frac{6}{\delta^2}u + \frac{6}{\delta}u^2 + 2u^3, \quad (2.29)$$

$$|\tilde{\mu}''(u)| \leq \frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta}u + 3u^2. \quad (2.30)$$

Щоб оцінити перший інтеграл в (2.24), розіб'ємо проміжок $[0; \frac{1}{2}]$ на дві частини: $[0; \frac{1}{\delta}]$ та $[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}]$, $\delta > 2$. Із (2.5), враховуючи оцінки (2.28)–(2.30), отримаємо

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| \leq \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta} u + 3u^2 \right) u^{1-\alpha} du \leq \frac{K_3}{\delta^{4-(r+\alpha)}}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| &\leq r(r+1) \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha-1} |\tilde{\mu}(u)| du \\ &+ 2r \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha} |\tilde{\mu}'(u)| du + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} |\tilde{\mu}''(u)| du \\ &\leq r(r+1) \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha-1} \left(\frac{3}{\delta^3} u + \frac{3}{\delta^2} u^2 + \frac{2}{\delta} u^3 + u^4 \right) du \\ &+ 2r \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha} \left(\frac{3}{\delta^3} + \frac{6}{\delta^2} u + \frac{6}{\delta} u^2 + 2u^3 \right) du + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} \left(\frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta} u + 3u^2 \right) du. \end{aligned} \quad (2.32)$$

З (2.32) випливає, що

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = \begin{cases} O(1), & 3 < r + \alpha < 4, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 4, \\ O\left(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\right), & r + \alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Об'єднуючи (2.31) та (2.33) будемо мати оцінку

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = \begin{cases} O(1), & 3 < r + \alpha < 4, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 4, \\ O\left(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\right), & r + \alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

Використовуючи (2.27) та нерівності

$$e^{-u} \leq 1, \quad e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad e^{-u} \geq 1 - u, \quad u \geq 0,$$

оцінимо функцію $\tilde{\mu}(u)$ та її похідні наступним чином:

$$|\tilde{\mu}(u)| \leq u \left(-1 + \gamma + \frac{4}{3\delta^2} \right) + u^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta} \right) + u^3 \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{6} \right),$$

$$|\tilde{\mu}'(u)| \leq \left(-1 + \gamma + \frac{4}{3\delta^2} \right) + u \left(1 - 2\gamma + 2\theta + \frac{2}{\delta} \right) + u^2 \left(\frac{3}{2}\gamma + \theta + \frac{1}{2} \right),$$

$$|\tilde{\mu}''(u)| \leq \left(1 - 2\gamma + 2\theta + \frac{2}{\delta} \right) + u(3\gamma + 1) + (\theta u^2 + 4\theta u)e^{-u}.$$

Тоді, використовуючи оцінки

$$-1 + \gamma + \frac{4}{3\delta^2} \leq \frac{2}{\delta^2}, \quad \frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta} \leq \frac{2}{\delta}, \quad \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{6} \leq 1, \quad \frac{3}{2}\gamma + \theta + \frac{1}{2} \leq 4,$$

$$3\gamma + 1 \leq 6, \quad (4\theta u + \theta u^2)e^{-u} \leq 2u, \quad u \geq 0,$$

матимемо

$$|\tilde{\mu}(u)| \leq \frac{2}{\delta^2}u + \frac{2}{\delta}u^2 + u^3, \quad u \geq 0, \quad (2.35)$$

$$|\tilde{\mu}'(u)| \leq \frac{2}{\delta^2} + \frac{4}{\delta}u + 4u^2, \quad u \geq 0, \quad (2.36)$$

$$|\tilde{\mu}''(u)| \leq \frac{4}{\delta} + 8u, \quad u \geq 0. \quad (2.37)$$

Оскільки

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| \leq 2^{\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u |d\mu'(u)|,$$

то, враховуючи співвідношення (2.35)–(2.37), знайдемо оцінку інтеграла

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u |d\mu'(u)| \leq r(r+1) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^{-r-1} \left(\frac{2}{\delta^2}u + \frac{2}{\delta}u^2 + u^3 \right) du \\ & + 2r \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^{-r} \left(\frac{2}{\delta^2} + \frac{4}{\delta}u + 4u^2 \right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^{1-r} \left(\frac{4}{\delta} + 8u \right) du \leq K_6, \quad r > 3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Таким чином

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = O(1), \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)| = O(1), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.39)$$

Оцінимо перший інтеграл з (2.25), розбивши проміжок $[0; \infty)$ на три частини: $[0; \frac{1}{\delta}]$, $[\frac{1}{\delta}; 1]$, $[1; \infty)$. З формули (2.26) із врахуванням (2.28) та (2.35) одержимо

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} |\tilde{\mu}(u)| \frac{du}{u^{1+\alpha}}$$

$$\leq \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{3}{\delta^3} u + \frac{3}{\delta^2} u^2 + \frac{2}{\delta} u^3 + u^4 \right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \leq \frac{K_7}{\delta^{4-(r+\alpha)}},$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^1 \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{\frac{1}{\delta}}^1 |\tilde{\mu}(u)| \frac{du}{u^{1+\alpha+r}} = \begin{cases} O(1), & 3 < r + \alpha < 4, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 4, \\ O\left(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\right), & r + \alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \rightarrow \infty,$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} |\tilde{\mu}(u)| \frac{du}{u^{1+\alpha+r}} \leq \int_1^{\infty} \left(\frac{2}{\delta^2} u + \frac{2}{\delta} u^2 + u^3 \right) u^{-r-1-\alpha} du \leq K_8.$$

Об'єднуючи останні співвідношення, отримаємо

$$\int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & 3 < r + \alpha < 4, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 4, \\ O\left(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\right), & r + \alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Для того, щоб оцінити другий інтеграл з (2.25), відмітимо, що має місце рівність

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du$$

$$+ O\left(|\mu(0)| + |\mu(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)|\right),$$

де $\bar{\lambda}(u) = (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u} + \frac{4}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{1}{6} u^3$.

Оскільки

$$\int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O(1), \quad \delta \rightarrow \infty$$

то враховуючи співвідношення (2.34) та (2.39), отримаємо

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & 3 < r + \alpha < 4, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 4, \\ O\left(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\right), & r + \alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Використовуючи формули (2.34), (2.39), (2.40) та (2.41), згідно з теоремою 1 роботи [22], переконуємося в тому, що інтеграл $A(\alpha, \mu)$ є збіжний і для нього справедлива оцінка

$$A(\alpha, \mu) = \begin{cases} O(1), & 3 < r + \alpha < 4, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 4, \\ O\left(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\right), & r + \alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (2.42)$$

Отже, умови теореми 3 роботи Л. І. Баусова [22] виконуються, тобто має місце рівність (2.10). Із врахуванням оцінки (2.42), при $\delta \rightarrow \infty$ отримуємо

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^r H^{\alpha}; P_3(\delta))_C = \frac{1}{\delta^r} \sup_{f \in W_{\beta}^r H^{\alpha}} \|f_{\varphi}\|_C + O(\Upsilon(r)), \quad (2.43)$$

де $\Upsilon(r)$ означається формулою (2.2), а функція $f_{\varphi}(x)$ — формулою (2.11).

Можна показати, що ряд Фур'є функції $f_{\varphi}(x)$ має вигляд (див., напр., [28])

$$S[f_{\varphi}(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{\delta}\right) k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f . Звідси, враховуючи формулу (2.4), отримуємо, що

$$S[f_{\varphi}(x)] = \frac{1}{\delta^{3-r}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}k + k^2 + \frac{1}{6}k^3\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тому, згідно з (1.1),

$$f_{\varphi}(x) = \frac{1}{\delta^{3-r}} \left(\frac{4}{3}f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6}f_0^{(3)}(x)\right). \quad (2.44)$$

Підставляючи (2.44) в (2.43) отримуємо (2.1). Теорему доведено. \square

Зауваження 2.1. Порівнюючи результати робіт [22, 24] та теорему 2.1, бачимо, що порядок наближення класів $W_{\beta}^r H^{\alpha}$, $r > 3$, за допомогою інтегралу Пуассона рівний $\frac{1}{\delta}$, бігармонійного інтегралу Пуассона — $\frac{1}{\delta^2}$, а тригармонійного інтегралу Пуассона — $\frac{1}{\delta^3}$.

Література

- [1] A. I. Stepanets. *Methods of Approximation Theory. Part 1*, Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 2002.
- [2] S. B. Nembars'ka, *On boundary values of three-harmonic Poisson integral on the boundary of a unit disk* // Ukrainian Math. J., **70** (2018), No. 7, 1012–1021.
- [3] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, С. О. Чайченко, *Приближения суммами Валле Пуассона*, Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2007.
- [4] V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko, *Approximation of $\bar{\psi}$ -integrals of periodic functions by de la Vallée-Poussin sums (Low smoothness)* // Ukrainian Math. J., **53** (2001), No. 12, 1998–2013.
- [5] V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko, *Approximation of the Classes $C^{\bar{\psi}}H_{\omega}$ by de la Vallée-Poussin Sums* // Ukrainian Math. J., **54** (2002), No. 5, 839–851.
- [6] V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko, *Approximation by de la Vallée-Poussin operators on the classes of functions locally summable on the real axis* // Ukrainian Math. J., **62** (2010), No. 7, 1126–1138.
- [7] A. S. Serdyuk, E. Yu. Ovsii, *Approximation of the classes $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$ by generalized Zygmund sums* // Ukrainian Math. J., **61** (2009), No. 4, 524–537.
- [8] И. П. Натансон, *О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона* // Докл. АН СССР, **72** (1950), No. 1, 11–14.
- [9] А. Ф. Тиман, *Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона* // Докл. АН СССР, **74** (1950), No. 1, 17–20.
- [10] B. Nagy, *Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson* // Acta Math. Acad. Sci Hungar, **1** (1950), 183–188.
- [11] Э. Л. Штарк, *Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от их сингулярного интеграла Абеля–Пуассона* // Мат. заметки, **13** (1973), No. 1, 21–28.
- [12] В. А. Баскаков, *О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона* // Мат. заметки, **17** (1975), No. 2, 169–180.
- [13] I. V. Kal'chuk, Yu. I. Kharkevych, *Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals* // Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22** (2018), No. 1, 23–36.
- [14] Yu. I. Kharkevych, K. V. Pozharska, *Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals* // Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22** (2018), No. 2, 235–243.
- [15] Yu. I. Kharkevych, T. V. Zhyhallo, *Approximation of (ψ, β) -differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators* // Ukrainian Math. J., **57** (2005), No. 8, 1297–1315.

- [16] К. М. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals* // Ukrainian Math. J., **61** (2009), No. 1, 86–98.
- [17] Т. В. Zhyhallo, *Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson–Chebyshev integrals* // Journal of Automation and Information Sciences, **50** (2018), No. 5, 34–48.
- [18] С. Каниев, *Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений* // Докл. АН СССР, **153** (1963), No. 5, 995–998.
- [19] S. B. Nembars'ka, K. M. Zhyhallo, *Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes* // Ukrainian Math. J., **69** (2017), No. 7, 1075–1084.
- [20] Yu. I. Kharkevych, T. V. Zhyhallo, *Approximation of function from class $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the unifommetric* // Ukrainian Math. J., **69** (2008), No. 5, 769–798.
- [21] Т. В. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\widehat{L}_{\beta, 1}^{\psi}$* // Ukrainian Math. J., **69** (2017), No. 5, 757–765.
- [22] Л. И. Баусов, *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II* // Изв. вузов. Матем., No. 6 (1966), 3–17.
- [23] I. V. Kal'chuk, Yu. I. Kharkevych, *Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$* // Ukrainian Math. J., **68** (2017), No. 11, 1727–1740.
- [24] U. Z. Hrabova, I. V. Kal'chuk, T. A. Stepaniuk, *On the approximation of the classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals* // Ukrainian Math. J., **70** (2018), No. 5, 719–729.
- [25] U. Z. Hrabova, *Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes* // Journal of Automation and Information Sciences, **50** (2018), No. 8, 77–86.
- [26] К. М. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *On the approximation of functions of the Holder class by triharmonic Poisson integrals* // Ukrainian Math. J., **53** (2001), No. 6, 1012–1018.
- [27] В. К. Дзядык, *О приближении функций линейными положительными операторами и сингулярными интегралами* // Матем. сб., **70 (112)** (1966), No. 4, 508–517.
- [28] Yu. I. Kharkevych, I. V. Kal'chuk, *Approximation of (ψ, β) -differentiable functions by Weierstrass integrals* // Ukrainian Math. J., **59** (2007), No. 7, 1059–1087.
- [29] И. В. Кальчук, У. З. Грабова, *Решение задачи Колмогорова–Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах $W_{\beta, \infty}^r$* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск, (2011), 33–36.
- [30] U. Z. Hrabova, I. V. Kal'chuk, T. A. Stepaniuk, *Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$* // Укр. матем. вісник, **14** (2017), No. 3, 361–369; transl. J. Math. Sci. (N. Y.), **231**, (2018), No. 1, 41–47.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

- Інна
Володимирівна
Кальчук** Східноєвропейський національний
університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: k.inna.80@gmail.com
- Василь Іванович
Кравець** Таврійський державний
агротехнологічний університет,
Мелітополь, Україна
E-Mail: v_i_kravets@ukr.net
- Уляна Зеновіївна
Грабова** Східноєвропейський національний
університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: grabova_u@ukr.net