

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧАХ

Лук'янченко Н.Є., email journeyofsky@gmail.com

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного

Дуже часто здобувачі вищої освіти, які вивчають вищу математику, не знають, як застосувати отримані знання на практиці. Поняття, які використовує вища математика, часто здаються досить далекими від реального світу [1]. Але якщо проведення реального експерименту за певних причин є неможливим, то на допомогу приходять саме теорія та методи вищої математики. Завдяки їх великому спектру можливостей стає доступним дослідження будь-якого процесу чи явища методами математичного аналізу, лінійного програмування, диференціального, інтегрального чи векторного числення, які у свою чергу становлять один з важливих методів наукових досліджень – математичне моделювання.

Роль математичного моделювання полягає в тому, щоб за допомогою нерівностей, рівнянь, співвідношень між параметрами можна було відтворити будь-який об'єкт або явище, що вивчається. Значне місце при математичному моделюванні відводиться диференціальним рівнянням [2]. Тому що, якщо існує явище зміни однієї величини відносно іншої, то воно може бути описано диференціальним рівнянням.

У цих матеріалах розглянемо практичне застосування теорії диференціальних рівнянь у розв'язанні задач різних галузей (за умови знання методів розв'язання самих диференціальних рівнянь). У запропонованих задачах диференціальні рівняння будуть виступати у ролі моделі якогось реального фізичного явища чи процесу. Це дозволить розширити базу знань здобувачів вищої освіти з вищої математики.

Задача 1. Знайти закон коливання пружної підвіски лапи культиватора $X(t)$, якщо жорсткість лапи культиватора $\mu = 144$, маса ґрунту на лапі культиватора $m_1 = 1$. Маса стійкої лапи культиватора $m_2 = 5$, маса лапи культиватора $m_3 = 3$, реакція ґрунту $F(t) = 8,1 \sin t$ і $x_0 = 0$, $V_0 = 0,1$.

Спочатку запишемо рівняння, що є математичною моделлю пружної підвіски

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -F(t) - \mu x,$$

де $m = m_1 + m_2 + m_3 = 9$ – загальна маса підвіски.

Після підстановки даних в рівняння отримаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = -0,9 \sin t.$$

Знаходимо загальний розв'язок рівняння та, враховуючи початкові умови $x(0) = x_0 = 0$, $x'_t(0) = V_0 = 0,1$, знаходимо частинний розв'язок рівняння.

Остаточно маємо $x = 0,04 \sin 4t - 0,06 \sin t$.

Задача 2. Для електричного кола, яке складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивності $L = 1$ Гн, ємності $C = \frac{1}{4}$ Ф та заданої прикладеної напруги $U = 2 \sin 2t$, скласти диференціальне рівняння та визначити струм $i(t)$, який буде спостерігатися в колі після підключення його до джерела навантаження, якщо $i(0) = 0$, $i'(0) = 2$.

За законом Кірхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) dt = U(t) = 2 \sin 2t$$

Продиференціюємо по t одержимо:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \frac{dU}{dt} \quad \text{або} \quad \frac{d^2i}{dt^2} + 4i = 4 \cos 2t$$

Знаходимо загальний розв'язок рівняння та, враховуючи початкові умови $i(0) = 0$, $i'(0) = 2$, знаходимо частинний розв'язок рівняння.

Остаточно маємо $i = \sin 2t + t \sin 2t$.

Задача 3. Нехай мають місце наступні відповідні залежності попиту і пропозиції від ціни і її похідних: $d = 2p'' - p' - p + 15$, $S = 3p'' + p' + p + 5$. Відомо, що в початковий момент часу $p(0) = 6$, $d(0) = S(0) = 10$. Знайти залежність цін від часу.

Оскільки в точці рівноваги $d = S$, отримаємо рівняння:

$$p'' + 2p' + 2p = 10$$

Знаходимо загальний розв'язок рівняння та, враховуючи початкові умови, $p(0) = 6$, $d(0) = S(0) = 10$, знаходимо частинний розв'язок рівняння.

Остаточно маємо $p(t) = e^{-t} \cdot \cos t + 5$.

Отже, теорія диференціальних рівнянь дає можливість описувати і вивчати різні об'єкти та явища, прогнозувати та кількісно оцінювати результати процесів.

Список використаних джерел

1. Дьоміна Н. А., Халанчук Л. В. Сучасні проблеми викладання вищої математики та шляхи їх вирішення із застосуванням програмних пакетів. *Публікації науково-освітнього інноваційного центру суспільних трансформацій*. 2022. С. 170-185.

2. Чуйко Г. П. Математичне моделювання систем і процесів : [навчальний посібник] / Г. П. Чуйко, О. В. Дворник, О. М. Яремчук. Миколаїв : Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2015. 244 с.

Науковий керівник: Дьоміна Н.А., к.т.н., доцент кафедри вищої математики і фізики, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного