Інститут математики НАН України

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ І ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

17-19 вересня 2018 року

Чернівці – 2018

УДК 51-7(08)
С 916

Затверджено до друку вченою радою
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(протокол № 1 від 11 вересня 2018 року)

Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – 220 с.

Збірник матеріалів міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях” включає нукові роботи вчених України, Європи, Азії та Америки, які проводять дослідження у теорії диференціальних рівнянь, алгебри, математичного моделювання, теорії функцій та функціонального аналізу, інформаційних технологій.

Для наукових працівників, аспірантів

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

СПІВГОЛОВИ:

Степан Мельничук – професор, ректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Анатолій Самойленко – академік НАН України, директор Інституту математики НАН України

ЧЛЕНИ ПРОГРАМНОГО КОМІТЕТУ:

академік Роман Кушнір (Україна), академік Микола Перестюк (Україна), академік Аркадій Чикрій (Україна), академік Мамадшо Ілолов (Таджикистан), академік Мітрофан Чобан (Молдова), член-кор. Олександр Бойчук (Україна), член-кор. Володимир Гутлянський (Україна), член-кор. Юрій Дрозд (Україна), член-кор. Василь Слюсарчук (Україна), професор Тарас Банах (Україна), професор Ярослав Бігун (Україна), професор Микола Глибовець (Україна), професор Василь Городецький (Україна), професор Василь Григорків (Україна), професор Ростислав Григорчук (США), професор Дулат Джумабаєв (Казахстан), професор Олександр Домошніцький (Ізраїль), професор Вячеслав Євтухов (Україна), професор Андрій Загороднюк (Україна), професор Михайло Зарічний (Україна), професор Юхим Зельманов (США), професор Микола Іванчов (Україна), професор Степан Івасишен (Україна), професор Петро Каленюк (Україна), професор Кенжегалі Кенжебаєв (Казахстан), професор Іван Конет (Україна), професор Ігор Король (Україна), професор Леонід Любчик (Україна), професор Володимир Маслюченко (Україна), професор Михайло Матійчук (Україна), професор Олександр Наконечний (Україна), професор Анатолій Петравчук (Україна), професор Василь Петричкович (Україна), професор Роман Петришин (Україна), професор Адріан Петрушел (Румунія), професор Анатолій Плічко (Польща), професор Іван Пукальський (Україна), професор Анатолій Романюк (Україна), професор Міклош Ронто (Угорщина), професор Анатолій Руткас (Україна), професор Валерій Самойленко (Україна), професор Олег Скасків (Україна), професор Святослав Станек (Чехія), професор Олександр Станжицький (Україна), професор Юрій Теплінський (Україна), професор Уршула Фориш (Польща), професор Євген Царков (Латвія), професор Ігор Черевко (Україна), професор Олександр Шубе (Молдова), професор Сергій Янчук (Німеччина)

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

ГОЛОВА:

Роман Петришин – професор, перший проректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

ЗАСТУПНИКИ ГОЛОВИ:

Ігор Черевко – професор, декан факультету математики та інформатики

Ярослав Бігун – професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

Василь Городецький – професор, завідувач кафедри алгебри та інформатики

Володимир Маслюченко – професор, завідувач кафедри математичного аналізу

Іван Пукальський – професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь

ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР:

Галина Пасічник - доцент кафедри математичного моделювання

ЧЛЕНИ ОРГКОМІТЕТУ:

Степан Блажевський, Андрій Дорош, Галина Івасюк, Руслана Колісник, Інесса Краснокутська, Олег Ленюк, Ірина Лусте, Василь Маценко, Галина Мельник, Василь Нестеренко, Лариса Піддубна, Віра Сікора, Олена Фотій

PROGRAM COMMITTEE

CO-CHAIR:

Stepan Melnychuk – professor, rector of Yuriy Fedykovich Chernivtsi National University

Anatoly Samoïlenko – academician of NAS of Ukraine, director of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

MEMBERS OF THE PROGRAMME COMMITTEE:

academician Roman Kushnir (Ukraine), academician Mykola Perestyuk (Ukraine), academician Arkadiy Chykrii (Ukraine), academician Mamadsho Ilolov (Tajikistan), academician Mitrofan Choban (Moldova), corresponding member Oleksandr Boichuk (Ukraine), corresponding member Volodymyr Gutlyansky (Ukraine), corresponding member Yuriy Drozd (Ukraine), corresponding member Vasyl Slyusarchuk (Ukraine), professor Taras Banakh (Ukraine), professor Yaroslav Bihun (Ukraine), professor Mykola Glybovets (Ukraine), professor Vasyl Gorodetskii (Ukraine), professor Vasyl Grigorkiv (Ukraine), professor Rostislav Grigorchuk (USA), professor Dulat Dzhumabaiev (Kazakhstan), professor Alexander Domoshnitsky (Israel), professor Vyacheslav Evtukhov (Ukraine), professor Andriy Zagorodnyuk (Ukraine), professor Mykhailo Zarichnyi (Ukraine), professor Efim Zelmanov (USA), professor Mykola Ivanchov (Ukraine), professor Stepan Ivasyshen (Ukraine), professor Petro Kalenyuk (Ukraine), professor Kenzhehali Kenzhebaev (Kazakhstan), professor Ivan Konet (Ukraine), professor Ihor Korol (Ukraine), professor Leonid Lyubchyk (Ukraine), professor Volodymyr Maslyuchenko (Ukraine), professor Mykhaylo Matiychuk (Ukraine), professor Oleksandr Nakonechniy (Ukraine), professor Anatoliy Petravchuk (Ukraine), professor Vasyl Petrychkovych (Ukraine), professor Roman Petryshyn (Ukraine), professor Adrian Petrusel (Romania), professor Anatoliy Plichko (Poland), professor Ivan Pukalskiy (Ukraine), professor Anatoliy Romanyuk (Ukraine), professor Miklos Ronto (Hungary), professor Anatoliy Rutkas (Ukraine), professor Valeriy Samoilenko (Ukraine), professor Oleh Skaskiv (Ukraine), professor Svatoslav Stanek (Czech Republic), professor Oleksandr Stanzhytskyi (Ukraine), professor Yuriy Teplinsky (Ukraine), professor Urszula Forys (Poland), professor Yevgeny Tsarkov (Latvia), professor Igor Cherevko (Ukraine), professor Alexandru Suba (Moldova), professor Serhiy Yanchuk (Germany)

ORGANIZING COMMITTEE

CHAIRMAN:

Roman Petryshyn – professor, first vice-rector of Yuriy Fedykovych Chernivtsi National University

DEPUTY CHAIRMAN:

Igor Cherevko – professor, dean of the Faculty of Mathematics and Informatics

Yaroslav Bihun – professor, head of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies

Vasyl Gorodetsky – professor, head of the Department of Algebra and Informatics

Volodymyr Maslyuchenko – professor, head of the Department of Mathematical Analysis

Ivan Pukalsky – professor, head of the Department of Differential Equations

SCIENTIFIC SECRETARY:

Galyna Pasichnyk – associate professor of the Department of Mathematical Modelling

ORGANIZING COMMITTEE MEMBERS:

Stepan Blazhevskiy, Andriy Dorosh, Galyna Ivasyuk, Ruslana Kolisnyk, Inessa Krasnokutska, Oleg Lenyuk, Iryna Luste, Vasyl Matsenko, Galyna Melnyk, Vasyl Nesterenko, Larysa Piddubna, Vira Sikora, Olena Fotiy

Факультету математики та інформатики 50 років!

Викладання математичних дисциплін у Чернівецькому університеті розпочалося у грудні 1876 р. В цей час на філософському факультеті почав функціонувати семінар з математики і математичної фізики. Основи математичних досліджень у Чернівецькому університеті заклали професори: Леопольд Ґегенбауер, Йосип Племель, Ганс Ган, Симеон Стоїлов, Мирон Ніколеску та інші.

Після реорганізації Чернівецького університету у 1940 році в його складі створено фізико-математичний факультет. На роботу в університет за направленнями приїхали відомі вчені: чл.-кор. АН України М.М.Боголюбов (згодом учений зі світовим іменем, директор Об'єднаного інституту ядерних досліджень у Дубні), М.Л.Сімонов, О.О.Бобров, М.Г.Беляєв, М.К.Фаґе, Ю.М.Круг. Потім до них приєдналися В.П.Рубаник та випускники ЧДУ К.М.Фішман, С.Д.Ейдельман. Їх зусиллями були закладені основи наукових досліджень на факультеті. Вони започаткували високий рівень науково-педагогічної діяльності і вимогливість до якості знань студентів. Математичний факультет виділився із фізико-математичного факультету у 1968 р. Серед його 44 викладачів був лише 1 доктор фізико-математичних наук, професор і 17 кандидатів фізико-математичних наук, доцентів. За 50 років своєї діяльності математичний факультет став одним із провідних в університеті. У кінці минулого століття на факультеті працювали професори С.Д.Ейдельман, М.К.Фаге, В.П.Рубаник, Є.Ф.Царков, В.І.Фодчук, М.І.Нагнибіда, М.Ф.Кириченко.

У 2004 р. математичний факультет перейменовано на факультет прикладної математики, а у 2013 р. – на факультет математики та інформатики. Професорсько-викладацький склад факультету нараховує нині 60 викладачів, серед яких 1 академік НАН України Чикрій А.О., 16 докторів наук (Я.Й.Бігун, В.В.Городецький, І.В.Житарюк, В.А.Літовченко, О.О. Карлова, І.І. Клевчук, О.В. Мартинюк, В.К.Маслюченко, О.В.Маслюченко, М.І.Матійчук, В.В.Михайлюк, В.В.Нестеренко, Р.І.Петришин, М.М.Попов, І.Д.Пукальський, І.М.Черевко) та 39 кандидатів наук. Колектив факультету має загальновизнані наукові досягнення у теорії диференціальних рівнянь з частинними і звичайними похідними, диференціально-функціональних рівнянь, функціональному аналізі, теорії функцій, математичному моделюванні та застосуванні сучасних інформаційних технологій. На факультеті працює спеціалізована рада із захисту кандидатських дисертацій зі спеціальностей: диференціальні рівняння, математичний аналіз, математичне моделювання та обчислювальні методи.

Деканами факультету за час його існування були: у 1968—1995 рр. – доцент В.В.Крехівський, у 1995-–1999 рр. -– доцент В.Т.Мартинюк, у 2000-

–2005 рр. -– професор Р.І.Петришин, з 2005 р. факультет очолює професор І.М.Черевко.

Факультет математики та інформатики на сьогодні складається з 5 кафедр:

— алгебри та інформатики (завідувач професор В.В. Городецький);

— математичного аналізу (завідувач професор В.К. Маслюченко);

— диференціальних рівнянь (завідувач професор І.Д. Пукальський);

— прикладної математики та інформаційних технологій (завідувач професор Я.Й. Бігун);

-– математичного моделювання (завідувач доцент Л.А. Піддубна);

— п'яти комп'ютерних класів і трьох лабораторій з інформаційних та комп'ютерних технологій, які обладнані сучасною технікою з ліцензійним програмним забезпеченням та мають доступ до мережі Internet; кабінету математики, де зберігається понад 10 000 книг та журналів.

Факультет розміщується у найстарішому корпусі ЧНУ, в якому 4 жовтня 1875 р. відбувся урочистий акт відкриття університету.

Факультет має міжнародні угоди про наукову співпрацю з Ризьким технічним університетом (Рига, Латвія); факультетом фізики, математики та інформаційних технологій Тираспольського університету (Кишинів, Молдова); факультетом математики та фізики Сілезького технологічного університету (Польща); комп'ютерними фірмами "DeSyd", "Yukon", "SoftServe", "Redfountain Limited", "Sharp Minds", "Global IT Support" та іншими.

Пріоритетними напрямками розвитку освіти в Україні у XXI столітті є точні науки та інформаційні технології, які успішно розвиваються на факультеті математики та інформатики ЧНУ.

Факультет здійснює підготовку бакалаврів та магістрів зі спеціальностей

1. Математика
2. Середня освіта (математика)
3. Середня освіта (інформатика)
4. Комп'ютерні науки та інформаційні технології (спеціалізація – інформаційні технології та управління проектами)
5. Прикладна математика
6. Системний аналіз

Випускники нашого факультету досягають високих результатів на педагогічній та науковій ниві. Зокрема, серед них є багато вчителів вищої категорії, вчителів-методистів, відмінників освіти, заслужених працівників освіти та заслужених вчителів України, доцентів, професорів, академіків академії вищої школи, тощо.

Секція

диференціальних рівнянь

Anar Assanova[1], *Askarbek Imanchiyev*[1,2]

Initial-boundary value problem with parameter for system of partial differential equations of third order and its application

[1] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: assanova@math.kz; anartasan@gmail.com
[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: imanchiev_ae@mail.ru

In the present report, we consider the following initial-boundary value problem with parameter for system of partial differential equations of third order at the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + A_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_4(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} +$$
$$+A_5(t,x)u + B(t,x)\mu(t) + f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\Big\{M_i(x)\frac{\partial^2 u(t_i,x)}{\partial x^2} + L_i(x)\frac{\partial u(t_i,x)}{\partial x}\Big\} = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \psi_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

where $u(t,x) = (u_1(t,x),...,u_n(t,x))$ is unknown function, $\mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_n(t))$ is unknown functional parameter, the $(n \times n)$ matrices $A_i(t,x)$, $B(t,x)$, and n function $f(t,x)$ are continuous on Ω, $i = \overline{1,5}$, the $(n \times n)$ matrices $M_j(x)$, $L_j(x)$, $j = \overline{0,m}$, and $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T$, the n functions $\psi_k(t)$, $k = 1,2,3$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

Using results of article [1], we study of a solvability to problem (1)–(5) and offer the methods for constructing their approximate solutions, also show its applications.

[1] Asanova A.T. *Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative* // Nonlinear Oscillations. –2014. –**17**,3. – P. 295-313; translated in Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2016. –**212**,3. –P. 213-233.

Olena Atlasiuk

On Fredholm One-Dimensional Boundary-Value Problems in Sobolev Spaces

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: atlasiuk@imath.kiev.ua

Let $\{m, n, r\} \subset \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, and $-\infty < a < b < \infty$. We consider the linear boundary-value problem

$$Ly(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \text{ for every } t \in (a, b), \quad By = c, \tag{1}$$

with respect to the unknown vector-valued function $y(\cdot) \in \bigl(W_p^n\bigr)^m$. Here, the matrix-valued function $A(\cdot) \in \bigl(W_p^{n-1}\bigr)^{m\times m}$, the vector-valued function $f(\cdot) \in \bigl(W_p^{n-1}\bigr)^m$, the vector $c \in \mathbb{C}^r$, and the linear continuous operator $B\colon \bigl(W_p^n\bigr)^m \to \mathbb{C}^r$ are arbitrary chosen.

Rewrite (1) in the form of a linear operator equation $(L, B)y = (f, c)$, where

$$(L, B)\colon \bigl(W_p^n\bigr)^m \to \bigl(W_p^{n-1}\bigr)^m \times \mathbb{C}^r. \tag{2}$$

Theorem 1 *The linear operator* (2) *is bounded and Fredholm with index* $m - r$.

The statement of Theorem 1 is also new for general boundary-value problems with a non-zero index, which are covered by a case $n = p = 1$.

We formulate the criterion of invertibility of the operator (L, B), that is the conditions under which the inhomogeneous boundary-value problem (1) has always a unique solution which continuously depends on the right-hand sides of the differential equation and the boundary condition.

Let $Y(\cdot) \in \bigl(W_p^n\bigr)^{m\times m}$ be a unique solution of the linear matrix differential equation $(LY)(t) = O_m$, $Y(a) = I_m$. By $[BY]$ we denote the number-valued $m \times m$-matrix each column of which coincides with the action of the operator B on the column of the matrix $Y(\cdot)$ with the same numbers.

Theorem 2 *The operator* (L, B) *is invertible if and only if* $r = m$ *and* $\det[BY] \neq 0$.

The theses are based on the joint results with Professor V. A. Mikhailets.

Winfried Auzinger [1], *Jana Burkotová* [2],
Irena Rachůnková [2], *Victor Wenin* [3]

Numerical investigation of impulsive boundary value problems

[1] *Technische Universität Wien, Austria*
E-mail: w.auzinger@tuwien.ac.at
[2] *Palacký University, Olomouc, Czech Republic*
E-mail: jana.burkotova@upol.cz, irena.rachunkova@upol.cz
[3] *Universität Wien, Austria*
E-mail: a1318495@unet.univie.ac.at

We consider impulsive boundary value problems for ODEs whose solutions encounter state-dependent impulses, i.e., discontinuities which occur when the solution hits one or several given barriers. A theoretical study of this type of problems is given in [1].

Due to the fact that the number and location of impulses is not a priori known, many conventional numerical approaches cannot be directly applied. In [2] a shooting approach was proposed, analyzed, implemented and tested. It is based on (quasi-) Newton iteration combined with solution of impulsive initial value problems including event detection. We show that the procedure is well-defined if, within the iterative process, the solutions of the initial value problems hit the given barrier transversally.

Our code is useful for the experimental investigation of impulsive problems. We present several examples which illustrate the usefulness of this approach, including application problems as for instance of Billiard type. Special effects like 'beating', where solution candidates encounter a long sequence of small jumps and cannot cross the barrier, can also be detected and explored.

[1] I. Rachůnková, J. Tomeček: State-Dependent Impulses: Boundary Value Problems on Compact Interval. Atlantis Press, Paris 2015.

[2] W. Auzinger, J. Burkotová, I. Rachůnková, V. Wenin: Shooting methods for state-dependent impulsive boundary value problems, with applications. Appl. Numer. Math. 128, 217–229, 2018.

Elmira Bakirova [1], *Zhazira Kadirbayeva* [2]

On the existence of solution to boundary value problem with parameter for integro-differential equation

[1] *Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: bakirova1974@mail.ru,
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: apelman86pm@mail.ru

Consider the linear boundary value problem with parameter for the integro-differential equation on $[0,T]$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K(t,\tau)x(\tau)d\tau + A_0(t)\mu + f(t), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \qquad (1)$$

$$B_0\mu + Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^{n+m}, \qquad (2)$$

where the $(n \times n)$ matrices $A(t)$ and $K(t,\tau)$ are continuous on $[0,T]$ and $[0,T] \times [0,T]$, respectively; the $(n \times m)$ matrix $A_0(t)$ is continuous on $[0,T]$, the n vector $f(t)$ is continuous on $[0,T]$; B_0 is $((n+m) \times m)$ matrix and B, C are $((n+m) \times n)$ matrices; $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Solution to problem (1), (2) is a pair $(x^*(t), \mu^*)$, where the function $x^*(t)$ is continuous on $[0,T]$, has continuous derivative on $(0,T)$ and satisfies the integro-differential equation (1) and boundary condition (2) for $\mu = \mu^*$.

In present communication we study questions relate to the existence, uniqueness and construction of solution to problem (1),(2). The problem (1), (2) is approximated by the linear boundary value problem with parameter for the loaded differential equation. In order to solve problem with parameter we apply parametrization's method [1]. The interconnection between solvability of problem (1), (2) and approximated problem with parameter for loaded differential equations is established.

[1] Dzhumabaev D.S. *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation* // Comput. Maths. Math. Phys. 1989. Vol. 29. №1, P. 34-46.

Yaroslav Baranetskij[1], *Ivan Ivasiuk* [2]

The nonlocal problem for the $2n$ differential equations

[1] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
E-mail: baryarom@ukr.net
[2] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine*
E-mail: vanobsb@gmail.com

The theory of differential equations with an unbounded operator coefficient was initiated by Hill and Yosida where the first theorems on the existence of the Cauchy problem solution for a linear homogeneous differential equation with respect to a function with values in a Banach space were obtained. The boundary value problems for linear differential-operator equations are used in the simulation of boundary value problems for differential equations with partial derivatives (see e.g. [1, 2]).

We study a problem with periodic boundary conditions for a $2n$-order differential equation whose coefficients are non-self-adjoint operators. It is established that the operator of the problem has two invariant subspaces generated by the involution operator and two subsystems of the system of eigenfunctions which are Riesz bases. For a differential-operator equation of even order, we study a problem with non-self-adjoint boundary conditions which are perturbations of periodic conditions. We study cases when the perturbed conditions are Birkhoff regular but not strongly Birkhoff regular or nonregular. We found the eigenvalues and elements of the system V of root functions of the operator which is complete and contains an infinite number of associated functions. Some sufficient conditions for which this system V is a Riesz basis are obtained. Some conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem with homogeneous boundary conditions are obtained ([3]).

[1] Gokhberg I. Ts., Krein M.G. *Introduction to the Theory of Linear Non Self-Adjoint Operators.* – Moscow: Nauka, 1965. (in Russian)

[2] Baranetskij Ya., Kolyasa L. *Boundary-value problem for abstract second-order differential equation with involution* // Visn. Lviv Polytech. National Univ. Ser. Phys. Math. Sci. – 2017. – **871**. – P. 20–27.

[3] Baranetskij Ya.O., Demkiv I.I., Ivasiuk I.Ya., Kopach M.I. *The nonlocal problem for the $2n$ differential equations with unbounded operator coefficients and the involution* // Carpathian Math. Publ. – 2018. – **10**, 1. – P. 14–30. doi: 10.15330/cmp.10.1.14-30

Levon Beklaryan

On the question of the existence of a periodic and bounded solution for the functional differential equations of pointwise type

Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia
E-mail: beklar@cemi.rssi.ru, lbeklaryan@outlook.com

The talk is devoted to a new type of sufficient conditions for the existence of periodic and bounded solutions for ordinary differential equations (ODE), as well as functional-differential equations (FDE) of pointwise type. Such conditions are based on taking into account the asymptotic properties of the solutions of differential equations that can be observed on the time shifts of solutions. The presence of bounded solutions is a more general phenomenon than the existence of periodic solutions. Nevertheless, the obtained conditions for the existence of a bounded solution are more stringent than the conditions for the existence of periodic solutions, since in the case of a periodic right-hand side of the differential equation, there is a “strong” condition for the invariance of the solution space with respect to the shift of solutions for the period.

A FDE of pointwise type canonically induces an infinite-dimensional ordinary differential equation. Moreover, the right-hand side of the infinite-dimensional differential equation satisfies the condition of “almost permutability” with respect to the shift operator acting in the space of infinite sequences (in phase space). In particular, finite difference analogues of the equations of mathematical physics are related to such types of infinite-dimensional differential equations. To every solution of FDE of pointwise type there one-to-one corresponds a solution of the traveling wave type of the induced infinite-dimensional equation. In turn, an infinite-dimensional ordinary differential equation, whose right-hand side satisfies the “almost permutability” condition with respect to the shift operator in the space of infinite sequences, induces a functional-differential equation of pointwise type. In this case, to each solution of the traveling wave type of the infinite-dimensional equation there one-to-one corresponds a solution of the induced FDE of pointwise type.

[1] Beklaryan L.A. *Introduction to the theory of functional differential equations. Group approach.* – Moscow: Factorial Press, 2007. – 288 p. (in Russian)

Mykola Bokalo

Evolutionary variational inequalities with type Volterra operators

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
E-mail: mm.bokalo@gmail.com

Let V be the separable reflexive Banach space with the norm $\|\cdot\|$, H be the Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and norm $|\cdot|$. Suppose that $V \subset H$ with dense, continuous and compact injection. Let V' be the dual space to V, and $V \subset H \subset V'$.

Let functional $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ be a proper, i.e., $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V \mid \Phi(v) < +\infty\} \neq \varnothing$, convex and lower semicontinuous. Recall that the *subdifferential* of functional Φ is a mapping $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, defined as follows

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V,$$

and the *domain* of the subdifferential $\partial\Phi$ is the set $D(\partial\Phi) := \{v \in V \mid \partial\Phi(v) \neq \varnothing\}$.

Let $\mathcal{B} : L^2(0,T;H) \to L^2(0,T;H)$ be an type Volterra operator, i.e., for almost every $t \in (0,T)$ and for any $w_1, w_2 \in L^2(0,T;H)$ the following inequality holds:

$$|\mathcal{B}(w_1)(t) - \mathcal{B}(w_2)(t)| \leqslant L \int\limits_0^t |w_1(s) - w_2(s)|\, ds,$$

where L is a positive constant.

We consider the problem of finding a solution $u : (0,T) \to V$ of the evolutionary variational inequality (subdifferential inclusion)

$$u'(t) + \partial\Phi\big(u(t)\big) + \mathcal{B}(u)(t) \ni f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

that satisfies the following condition

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

where $f : (0,T) \to V'$, $u_0 \in H$ are given.

Under certain additional conditions on the data-in the existence and uniqueness of the solution of problem (1), (2) are proved. Also the estimate of its solution is obtained.

O. Buhrii [1], *O. Kholyavka* [2]

Unique solvability of initial-boundary value problem for Kirchhoff-type hyperbolic equations with variable exponents of nonlinearity

[1] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*
E-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua
[2] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine*
E-mail: ot.kholyavka-panat@i.ua

Let $n \in \mathbb{N}$ and $T > 0$ be fixed numbers, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with the boundary $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

We consider the following problem

$$u_{tt} - M\Bigg(\int\limits_{\Omega} |\nabla u(y,t)|^2 \, dy \Bigg) \Delta u + h(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t +$$

$$+g(x,t)|u|^{p(x)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{3}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1, \tag{4}$$

where $M \in C^1([0,+\infty))$, $\inf\limits_{\xi\in[0,+\infty)} M(\xi) > 0$, $h, g \in L^\infty(Q_T)$, $f \in L^2(Q_T)$, $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$, and $p, q \in L^\infty(\Omega)$.

Under additional conditions for data-in, we prove the existence and uniqueness of the solution $u : Q_T \to \mathbb{R}$ of problem (1)-(4). The function u belongs to some generalized Lebesgue and Sobolev spaces.

Dumitru Cozma, Angela Matei

Center conditions for a cubic differential system with invariant straight lines

Tiraspol State University, Chişinău, Republic of Moldova
E-mail: dcozma@gmail.com

We consider the real cubic differential system of the form

$$\dot{x} = y + P_2(x,y) + P_3(x,y),\ \dot{y} = -x + Q_2(x,y) + Q_3(x,y), \tag{1}$$

where $P_j(x,y)$ and $Q_j(x,y)$ are homogeneous polynomials of degree j. The origin $O(0,0)$ is a singular point of a center or a focus type for (1).

It is known that a singular point $O(0,0)$ is a center for system (1) if there exists a diffeomorphism

$$F : U \to V,\ F = \{X = \varphi(x,y),\, Y = \psi(x,y)\},\ F(0,0) = (0,0), \tag{2}$$

which brings system (1) to a system with the axis of symmetry. In particular, if $\varphi(x,y)$ and $\psi(x,y)$ in (2) are rational functions

$$x = \frac{a_1X + b_1Y}{a_3X + b_3Y - 1},\ y = \frac{a_2X + b_2Y}{a_3X + b_3Y - 1}, \tag{3}$$

$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, then we say that (1) is rationally reversible [1]. The center conditions for cubic system (1) with two invariant straight lines were obtained in [2] by using the method of rational reversibility.

In this paper we study the problem of the center for system (1) assuming that the system has at least one invariant straight line

$$C + Ax + By = 0,\quad A, B, C \in \mathbb{C},\quad (A,\, B) \neq (0,0)$$

being rationally reversible. We determine the center conditions for cubic system (1) with one, two, three and four invariant straight lines. We prove that the parameters a_j, b_j can be chosen so that the transformation (3) brings in some neighborhood of $O(0,0)$ the system (1) to one equivalent with a polynomial system

$$\dot{X} = Y + M(X^2, Y),\quad \dot{Y} = -X(1 + N(X^2, Y)),$$

which has an axis of symmetry $X = 0$ and $O(0,0)$ is a center for (1).

[1] Cozma D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics.* –Chişinău: Ştiinţa, 2013. –240 p.

[2] Cozma D. *Darboux integrability and rational reversibility in cubic systems with two invariant straight lines* // E. J. of Diff. Equations. – 2013, 23. – P. 1–19.

Anatoli Dascalescu

Integrability conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic

Tiraspol State University, Chişinău, Republic of Moldova
E-mail: anatol.dascalescu@gmail.com

We consider the cubic system of differential equations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x,y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

where $P(x,y)$, $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ are coprime polynomials. The origin $O(0,0)$ is a singular point of a center or a focus type for (1).

It is known that a singular point $O(0,0)$ is a center for system (1) if and only if it has a holomorphic first integral of the form $F(x,y) = C$ or a holomorphic integrating factor of the form $\mu = 1 + \sum \mu_j(x,y)$ in some neighborhood of $O(0,0)$.

We study the problem of distinguishing between a center and a focus for system (1) assuming that the system has two invariant straight lines $l_1 \equiv 1 + a_1x - y = 0$, $l_2 \equiv 1 + a_2x - y = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_2 - a_1 \neq 0$, intersecting at a real singular point (0, 1) and one irreducible invariant cubic curve $\Phi(x,y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0$, where $(a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}) \neq 0$, $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03} \in \mathbb{R}$ and $a_{03} \neq -1$.

The conditions for the origin to be a center for cubic differential system (1) having two invariant straight lines $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ and one invariant cubic $\Phi = 0$ when $a_{03} = -1$ were obtained in [1].

In this paper we determine conditions under which the cubic system (1) has a first integral (an integrating factor) of the form

$$l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3} = C \quad (\mu = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3}), \ \ \alpha_j \in \mathbb{C}$$

which is a holomorphic function in some neighborhood of $O(0,0)$ and a singular $O(0,0)$ point is a center.

[1] Cozma D., Dascalescu A. *Integrability conditions for a class of cubic differential systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic* // Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics. – 2018. – **86**, 1. – C. 120–138.

Yaroslav Drin'

The nonlocal problems for equations with fractional derivative

Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: drin_yaroslav@i.ua

In [1] the fundamental solution $G(x,t,\gamma,\lambda)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda,\gamma > 0$, for time- and space-fractional partial differential operator $D_t^\lambda + a^2(-\Delta_x)^{\gamma/2}$, Δ_x – Laplace operator, is given in terms of the Fox's H-function. Here the time-fractional derivative in the sense of generalized function. When $\lambda = 1$, $\gamma = 1$ for the first time $G(x,t,1,1) = \Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}} \cdot a^2t((a^2t)^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ is defines in [2, p. 93]. When $\lambda \in (0,1)$, $\gamma = 2$ two-point problem is studied in [3]. The regularized fractional derivatives is defined in [4].

For a quasilinear pseudodifferential equation with fractional derivative by time variable t with order $\lambda \in (0,1)$, the second derivative by space variable x and the argument deviation with the help of the step method we prove the solvability of the boundary problem with two unknown functions [5].

In this paper we study the solvability of the boundary problem by variable t for equation of fractal diffusion with argument deviation with fractal derivative with respect to time t of order $\lambda \in (0,1)$, fractional derivative with respect to spatial argument x with order $\gamma \in (0,2)$ using the method defined in [3, 5].

[1] Jun-Sheng Duan. *Time-and space-fractional partial differential equations* // Journal of mathematical physics, 46, 013504 (2005).

[2] Drin' Y.M. *The Cauchy problem for some classes of parabolic pseudodifferential equations* // Cand-diss, Institute of Mathematics NAS Ukraine, Kyiv, 1979. – 115 p.

[3] M.I. Matijchuk. *Parabolic and alliptic problems in Dene spaces* // Journal of mathematical physics, Chernivtsi, 2010, 248 p.

[4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type* (2004) ISBN 3-7643-7115-3.

[5] Drin I., Drin S., Drin Y. *The boundary problem by variable t for equation of fractal diffusion with argument deviation* // Наукові записки НаУКМА. – 2017. – Т. 201. – С. 5–7.

Dulat Dzhumabaev [1], *Sandugash Mynbayeva* [2]

A numerical method for solving a nonlinear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK,*
International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: dzhumabaev@list.ru
[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional State University , Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: mynbaevast@mail.ru

In the communication, we consider the nonlinear boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$g\left[x(0), x(T)\right] = 0, \tag{2}$$

where the $(n \times n)$ matrices $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,T]$, $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ is continuous.

The interval $[0,T]$ is divided into N parts by the points $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_N = T$. The values of solution to problem (1),(2) at the beginning points of subintervals are introduced as additional parameters, λ_r, $r = \overline{1,N}$, and the problem is reduced to an equivalent boundary value problem for the system of integro-differential equations with parameters. We propose a numerical method based on construction and solving a system of nonlinear algebraic equations with respect to introduced parameters: $Q_*(\lambda) = 0$, $\lambda \in R^{nN}$. The values of $Q_*(\lambda)$ for some λ and its Jacobi matrix are determined by solving special Cauchy problems for the system of integro-differential equations with parameters [1], [2].

[1] D.S. Dzhumabaev. *New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems* // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – **Том**, 327. – С. 79-108.

[2] D.S. Dzhumabaev. *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations* // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – **Том**, 294. – С. 342-357.

Dulat Dzhumabaev [1], *Roza Uteshova* [2]

An approach to solving boundary value problems for loaded nonlinear differential equations

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: ddzhumabaev54@gmail.com
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: r.uteshova@iitu.kz

We consider the nonlinear boundary value problem for the loaded differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x) + f_1(t, x(\theta_0), x(\theta_1), \ldots, x(\theta_m)), \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \quad (2)$$

where $f_0 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{(m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ are continuous functions, $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m = T$.

In [1], a new concept of general solution is introduced to study and solve a linear boundary value problem for a loaded differential equation.

In the present work, we extend the concept of new general solution to the nonlinear loaded differential equation (1). A method of solving nonlinear boundary value problem (1), (2) based on the new general solution is proposed. The problem is reduced to a system of nonlinear algebraic equations which is constructed by solving the Cauchy problems for nonlinear ordinary differential equations. The elements of the Jacobi matrix of the system are determined by solving the matrix Cauchy problems for linear ordinary differential equations.

[1] Dzhumabaev D.S. *Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations* // Math. Meth. Appl. Sci. 2018, 41, pp. 1439-1462.

Yuliya Gorban

On T-solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations

Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
E-mail: yuliyagorban77@gmail.com

We consider the Dirichlet problem

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i(\nu_i(x)|D_iu|^{q_i-2}D_iu)=F(x,u) \ \text{ in } \Omega, \ \ u=0 \ \text{ on } \partial\Omega, \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ is a boundary of Ω, $n \geqslant 2$, $q_i \in (1,n)$, $\nu_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $\nu_i > 0$ a.e. in Ω, $\nu_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ${\nu_i}^{-1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$, D_i is a first order partial derivative with respect to x_i, $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function. We introduce weighted anisotropic Sobolev space $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ connected with the sets $q=\{q_1,\dots,q_n\}$, $\nu=\{\nu_1,\dots,\nu_n\}$ (see [1]). Put $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)=\{u:\Omega\to\mathbb{R},\ T_k(u)\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\}$, where T_k is a standard cut function of the level $k>0$. We define $\overline{q}=n(\sum_{i=1}^n 1/q_i)^{-1}$, and for every $m\in\mathbb{R}^n$, $m_i>0$, we set $p_m=n(\sum_{i=1}^n(1+m_i)/(m_iq_i)-1)^{-1}$.

Definition. *A T-solution of problem* (1) is a function $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$: (i) $F(x,u)\in L^1(\Omega)$; (ii) $\nu_i|\delta_iu|^{q_i-2}\delta_iu \in L^1(\Omega)$; (iii) $\forall w \in C^1_0(\Omega)$ we have $\int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n \nu_i|\delta_iu|^{q_i-2}\delta_iuD_iw\right\}dx=\int_\Omega F(x,u)w\,dx$. Here δ_iu is a "derivative" of the function $u\in\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ (see [1]).

Theorem. *Suppose the following conditions are satisfied:* (i) *for a.e.* $x\in\Omega$, $F(x,\cdot)$ *is nonincreasing on* $\mathbb{R}$; (ii) *for any* $s\in\mathbb{R}$, $F(\cdot,s)\in L^1(\Omega)$; (iii) $\exists\ m,\sigma\in\mathbb{R}^n$: $m_i\geqslant 1/(q_i-1)$, $1/\nu_i\in L^{m_i}(\Omega)$, $\sigma_i>0$, $1/\sigma_i<1-((q_i-1)\overline{q})/(p_m(\overline{q}-1))$, $\nu_i\in L^{\sigma_i}(\Omega)$, $\forall\ i\in\{1,\dots,n\}$. *Then there exists a T-solution of problem* (1).

This result continues researches of [2], [3].

[1] Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. *On T-solutions of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities with L^1-data* // Izv. Math. – 2011. – **75**, №1. – P. 101–160 (in Russian).

[2] Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. *Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1-data* // Electron. J. Differential Equations. – 2013. – №167. – P. 1–17.

[3] Gorban Yu.S. *Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations* // Open Mathematics. – 2017. – **15**. – P. 768–786.

Mykola Ivanchov, Vitaliy Vlasov

Inverse problem for a 2D strongly degenerate heat equation

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
E-mail: mykola.ivanchov@lnu.edu.ua, siphiuel@gmail.com

In the domain $Q_T := \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ consider an inverse problem for the heat equation

$$u_t = a_1(t)u_{xx} + a_2(t)u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T \tag{1}$$

with initial condition

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y,0), \quad (x,y) \in \overline{D} := [0,h] \times [0,l], \tag{2}$$

boundary conditions

$$u(0,y,t) = \mu_{11}(y,t),\, u(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_{21}(x,t),\, u_y(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T] \tag{4}$$

and overdetermination conditions

$$\iint\limits_D u(x,y,t)dx\,dy = \mu_{31}(t), \quad t \in (0,T], \tag{5}$$

$$\iint\limits_D xu(x,y,t)dx\,dy = \mu_{32}(t), \quad t \in (0,T] \tag{6}$$

with unknowns $(a_1(t), a_2(t), u(x,y,t))$. We suppose that $a_i(t) > 0, t \in (0,T]$, and $a_i(t) = a_{i0}(t)t^{\beta_i}$ as $t \to 0, \beta_i > 1, i \in \{1,2\}$.

We establish existence and uniqueness of classical solution of the problem (1)–(6).

Symbat Kabdrakhova

Euler's modification method for solving the periodic problem for the equation of third order

[1] *1Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan ,*
E-mail: S-Kabdrachova@mail.ru

Consider the periodic problem for the third order partial differential equation on $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a_0(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$

$$+ a_3(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a_4(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}, \quad x \in [0,\omega] \tag{4}$$

where functions $f(x,t), a_i(x,t), i = \overline{0,4}$ are continuous on $\overline{\Omega}$, function $\psi(t)$ is continuous and continuously differentiable on $[0,T]$ and satisfies the compatibility condition: $\psi(0) = \psi(T)$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(T)$.

A continuous on $\overline{\Omega}$ function $u(x,t)$ which has continuous derivatives $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2}$ and satisfies differential equation (1) and boundary conditions (2)-(4) is called a classical solution to problem (1)-(4).

In present communication we apply Euler's modification method [1] for solving the periodic problem (1)-(4). Based on a special transformation of an unknown function, the third order partial differential equation reduces to a system of two hyperbolic equations with mixed derivatives. Estimates of the convergence of the Euler's modification method to the solution of the periodic problem (1)-(4) are obtained.

[1] S.S. Kabdrakhova *Convergence of Euler's modification method for solving the semi-periodical boundary value problem for once equation in the third order* //Mathematical Zhournal 2012. Vol. 12. №4(46), P. 80-94.

Tetiana Kasirenko, Vladimir Mikhailets, Aleksandr Murach

On Sobolev-like spaces induced by elliptic operators

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: tania.nemtseva@gmail.com, mikhailets@imath.kiev.ua,
murach@imath.kiev.ua

We discuss properties of function spaces induced by the inner product Sobolev spaces $H^s(\Omega)$ over a bounded Euclidean domain Ω and by a properly elliptic linear differential operator A on $\overline{\Omega}$. The domain Ω and the coefficients of A are of class C^∞. These spaces $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$, with $s, \lambda \in \mathbb{R}$, consist of all distributions $u \in H^s(\Omega)$ such that $Au \in H^\lambda(\Omega)$ and are endowed with the corresponding graph norm. We call $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$ the Sobolev-like space induced by A. It has the following properties [1]:

Theorem 1 *Let $s, \lambda \in \mathbb{R}$, and let $2q$ be the even order of A. Then:*

- *(i) The space $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$ is Hilbert and separable.*
- *(ii) The equality of linear spaces $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$ and $H^s(\Omega)$ holds if and only if $\lambda \leq s - 2q$. If $\lambda \leq s - 2q$, the norms in these spaces are equivalent.*
- *(iii) The set $C^\infty(\overline{\Omega})$ is dense in $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$.*
- *(iv) If $s \leq 1/2$ and $\lambda \leq 1/2 - 2q$, then the set $\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \operatorname{supp} u \subset \Omega\}$ is dense in $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$.*

Theorem 2 *Suppose that s_0, s_1, λ_0, λ_1, and θ are real numbers satisfying the inequalities $\lambda_0 \geq s_0 - 2q$, $\lambda_1 \geq s_1 - 2q$, and $0 < \theta < 1$. Put $s := (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ and $\lambda := (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$. Then $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$ coincides (up to equivalence of norms) with the Hilbert space obtained by the complex interpolation between $H^{s_0}_{A,\lambda_0}(\Omega)$ and $H^{s_1}_{A,\lambda_1}(\Omega)$ with the parameter θ.*

We also discuss an application of the spaces $H^s_{A,\lambda}(\Omega)$ to general elliptic boundary-value problems.

[1] Kasirenko T., Mikhailets V., Murach A. *Sobolev-like Hilbert spaces induced by elliptic operators* // arXiv:1805.08528.

Vitalii Konarovskyi

Dean-Kawasaki dynamics: ill-posedness vs. triviality

University of Leipzig, Leipzig, Germany
E-mail: konarovskiy@gmail.com

The discussion will be devoted to a stochastic Dean-Kawasaki equation

$$\begin{aligned}\partial_t \rho(x,t) = \nabla \cdot \left[\rho(x,t) \int \nabla V(x-y)\rho(y,t)dy\right] \\ + \frac{\alpha}{2}\Delta\rho(x,t) + \nabla \cdot (\sqrt{\rho(x,t)}\dot{W}_t),\end{aligned} \tag{1}$$

for density distribution of interacting Brownian particles in the Langevin dynamic [1, 2], where V is an interaction potential and $\dot{W}$ denotes the space time white noise. Equation (1) appears in macroscopic fluctuation theory and glass dynamic models and rigorous results on existence and uniqueness exist so far only for its appropriate regularisations.

In the talk we will discuss equation (1) for the simplest case $V = 0$, where Brownian particles non-interact. First, we show that the Laplace transformation of its solutions solve a viscous Hamilton-Jacobi equation. Then, using this duality, we prove that (1) admits solutions only for a discrete spectrum of parameters α and atomic initial distributions.

Theorem 3 ([3]) *Solutions to* (1) *for* $V = 0$ *exist if and only if* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *and* $\rho(\cdot, 0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i^0}$*. In case of existence, the solution is, uniquely in law, given by the empirical distribution* $\rho(\cdot, t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{w_i(nt)}$*, where* w_i *are* n *independent Brownian motions starting from* x_i^0*.*

The talk is based on joint work with M. von Renesse and T. Lehmann.

Acknowledgement. The research was supported by Alexander von Humboldt Foundation.

[1] Dean D. S. *Langevin equation for the density of a system of interacting Langevin processes* // J. Phys. A. – 1996. – **29**, no. 24. – P. 613–617.

[2] Kawasaki K. *Stochastic model of slow dynamics in supercooled liquids and dense colloidal suspensions* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 1994. – **208**, no. 1. – P. 35–64.

[3] Lehmann T., Konarovskyi V., von Renesse, M., *Dean-Kawasaki Dynamics: Ill-posedness vs. Triviality* // arXiv:1806.05018. – 2018. – p.10.

Valerii Los

On isomorphism theorem for systems parabolic in Petrovskii's sense in Hörmander spaces

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
E-mail: v_los@yahoo.com

We discuss applications of Hörmander inner product spaces to general initial-boundary-value problem for systems parabolic in Petrovskii's sense with trivial (zero) initial Cauchy data [1]. These spaces are parametrized with a pair of real numbers s, $s/(2b)$ and a Borel measurable function $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ that varies slowly at infinity in the sense of Karamata. The Hörmander space $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ consists of all tempered distributions w on $\mathbb{R}^{n+1}$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^{1/b}\right)^s \varphi^2 \left((1 + |\xi|^2 + |\eta|^{1/b})^{1/2}\right) |\widehat{w}(\xi, \eta)|^2 \, d\xi d\eta < \infty.$$

Here $\widehat{w}$ is the Fourier transform of w, whereas $\xi \in \mathbb{R}^n$ and $\eta \in \mathbb{R}$ are the frequency variables dual to the spacial and time variables, respectively. If Ω is a Euclidean domain in $\mathbb{R}^{n+1}$, then the Hilbert space $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ consists by definition of the restrictions of all distributions $w \in$
$\in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ to Ω.

We consider a general initial-boundary-value problem for systems parabolic in Petrovskii's sense with trivial initial Cauchy data in a bounded cylinder Ω in $\mathbb{R}^{n+1}$. We proved that the operators corresponding to this problem are isomorphisms between appropriate Hörmander spaces. We discuss applications of this theorem to investigation of local regularity of generalized solutions of the problem.

[1] Los V. M. *Systems Parabolic in Petrovskii's Sense in Hörmander Spaces* // Ukrainian Mathematical Journal. – 2017. – **69**, no. 3. – P. 426 – 443.

Vasyl Martsenyuk[1], *Andriy Sverstiuk*[2]

On stability investigation of lattice differential equations of population dynamics with delay

[1] *University of Bielsko-Biala, Bielsko-Biala, Poland*
E-mail: vmartsenyuk@ath.bielsko.pl
[2] *Ternopil State Medical University, Ternopil, Ukraine*
E-mail: sverstyuk@tdmu.edu.ua

Lattice differential equations arise in many applied subjects, such as chemical reaction, image processing, material science, and biology. In the models of lattice differential equations, the spatial structure has a discrete character, and lattice dynamics have recently been extensively used to model biological problems since the environment in which the species population lives may be discrete but not continuous.

In the work we offered model of immunosensor which is based on the system of lattice differential equations with delay. The main result of the work is conditions of local and global asymptotic stability for endemic state. For this purpose we have used method of Lyapunov functionals. It combines general approach for construction of Lyapunov functionals of predator-prey models with lattice differential equations. As compared with stability conditions which are based on the basic reproduction numbers it allows to estimate the values of delay admitting stability.

Numerical examples showed us influence on stability of different parameters. Increasing time delay we transmit from stable node to limit cycle and finally to chaotic behavior. Disbalance constant $n \in (0, 1]$ also affects on stability characteristics. Dicreasing n we narrow interval of asymptotic stability for delay τ. For some values of parameters, we found numerically that the behavior of the system became increasingly complicated as the time delay was increased. In this case, we found that for small delay the system could have a stable steady solution. Then, as the time delay was increased, the stable steady solution changed at a critical value of τ to a stable limit cycle.

[1] Martsenyuk V., Klos-Witkowska A., Sverstiuk A. *Stability, bifurcation and transition to chaos in a model of immunosensor based on lattice differential equations with delay* // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2018, No. 27, 1-31. DOI: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.27

Viktoria Mogylova[1], *Tatyana Kovalchuk*[2], *Natali Marchuk*[3]

General approach to differential and difference equation

[1]*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine*
E-mail: mogylova.viktoria@gmail.com
[2]*Kyiv State University of Trade and Economics, Kyiv, Ukraine*
E-mail: 8172@ukr.net
[3]*State Agrarian and Engineering University in Podilya, Kamyanets-Podilsky, Ukraine*
E-mail: nata.marchuk2205@gmail.com

Equations on time scales are convenient mathematical models of those objects whose evolution time can change their character: at first they are continuous (in this case the model is described by an ordinary differential equation), then become discrete (in this case the model is described by the difference equation). And besides the difference step can also change: if it is fractal, then we deal with differential equations on fractals. Such models arise, for instance, in biological populations where the reproduction of individuals depends on seasonal changes.

A time scale $\mathbb{T}$ is an arbitrary non-empty closed subset of the numerical axis.

We define $f^{\Delta}(t)$ to be the number with the property that given any $\varepsilon > 0$ there is a neighborhood $\bigcup$ of t (i.e. $\bigcup = (t - \delta; t + \delta) \cap \mathbb{T}$ for some $\delta > 0$) such that $|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\delta(t) - s]| \leq \varepsilon|\delta(t) - s|$ for any $s \in \bigcup$.

We call $f^{\Delta}(t)$ the derivative of function f at a point t.

The equation $x^{\Delta}(t) = g(t, x)$, where $t \in \mathbb{T}$, is called the equation on the time scales.

In our talk we consider the some property of differential equations on the time scales, in particular the questions of the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem and stability.

A. Rontó [1], *M. Rontó* [2]

What have we learnt from the numerical-analytic method of Samoilenko

[1] *Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Czech Republic,*
Žižkova 22, 61662 Brno, Czech Republic
E-mail: ronto@math.cas.cz
[2] *Institute of Mathematics, University of Miskolc,*
3515 Miskolc-Egyetemváros
E-mail: matronto@uni-miskolc.hu

We recall the key ideas of Samoilenko's numerical-analytic method and propose new successive approximation techniques for the solvability analysis and approximate solution of rather general boundary value problems for non-linear systems of differential equations with locally Lipschitzian non-linearities.

We study the non-local boundary value problem

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [a, b]\,, \\ &\Phi(x) = d, \end{aligned}$$

where $-\infty < a < b < \infty$, $\Phi : C([a, b]\,, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ is a vector functional (possibly non-linear), $n \geq 1$, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a function satisfying the Carathéodory conditions in a certain bounded set D, d is a given vector and $f \in \mathrm{Lip}(K, D)$, i. e., the componentwise inequality

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K\,|u - v|\,,$$

holds for all $\{u, v\} \subset D$ and a. e. $t \in [a, b]$, where K is a square matrix with non-negative elements. By a solution of the problem, one means an absolutely continuous function satisfying the differential system almost everywhere on $[a, b]$.

The analysis is constructive in the sense that it allows one to both study the solvability of the problem and approximately construct its solutions by operating with objects that are determined explicitly in finitely many steps of computation. The practical application of the technique is explained on a numerical example.

Maria Shan

Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation with gradient absorption term

Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
E-mail: shan_maria@ukr.net

In this paper we study solutions to quasilinear parabolic equations model of which is

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1} u_{x_i}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{q_i} = 0, \; u \geq 0, \tag{1}$$

satisfying a initial condition

$$u(x,0) = 0, \;\; x \in \Omega \setminus \{0\}, \tag{2}$$

where Ω is a bounded domain in R^n, $n \geq 2, t \in (0,T), 0 < T < +\infty$, $0 \in \Omega$.

We suppose that the exponents $m_i, q_i \; i = \overline{1,n}$ satisfy the following condition

$$1 - \frac{2}{n} < m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n < m + \frac{2}{n}, m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

$$\frac{2 + nm}{1 + n} \leq q < 2, \quad \max_{0 \leq i \leq n} q_i < q \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i}.$$

We establish the pointwise estimates of solutions, depending on the relations between the exponents m_i and q_i which guarantee that the point singularity is removable. The main difficulty lies in the fact that part of $m_i < 1$ (singular case), and another part of $m_i > 1$ (degenerate case). The proof of removability result is based on the new a priori estimates of "large"type solutions. In particular, we obtain the Keller-Osserman type estimate of the solution to the problem (1), (2).

This paper is supported by Ministry of Education and Science of Ukraine, grant number is 0118U003138.

Iryna Skira

The Fourier problem for higher-order anisotropic integro-differential elliptic-parabolic equations

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
E-mail: irusichka.skira@gmail.com

Let n, m be some natural numbers; $\mathbb{R}^n$ be linear space of ordered collections of n real numbers $x = (x_1, \dots, x_n)$; M be a subset of the set $\{0, 1, \dots, m\}$ such that $\{0, m\} \subset M$; N be the number of n-dimensional multi-indexes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ such that $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \in M$; $\mathbb{R}^N$ be the linear space of ordered collections of N real numbers $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \dots, \xi_\alpha, \dots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$.

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, and $\partial\Omega$ be the boundary of Ω. Denote by $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ the unit outward pointing normal vector on $\partial\Omega$. Set $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$.

Consider *the problem* of finding a function $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ satisfying (in some sense) the equation

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) + \int\limits_\Omega c(x, y, t, u(y, t))\, dy =$$

$$= \sum_{|\alpha| \in \{0,m\}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

and the boundary conditions

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

where $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(|\alpha| \in M)$, $c : \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$ $(|\alpha| \in \{0, m\})$ are given functions which satisfy some conditions, $b : \Omega \to \mathbb{R}$ is a measurable bounded function, $0 < b(x) \le 1$ for $x \in \Omega_0 \subset \Omega$ and $b(x) = 0$ for $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, δu is the ordered collection of derivatives $D^\alpha u \equiv \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u$ of the function u for α, $|\alpha| \in M$.

Equation (1) is parabolic in $\Omega_0 \times S$ and elliptic in $(\Omega \backslash \Omega_0) \times S$.

Under certain additional conditions on the data-in the existence and uniqueness of the weak solution of this problem are proved. Also the estimate of its solution is obtained.

Ihor Skutar, Yaroslav Bihun

Averaging method in the Goursat-Darboux problem for weak nonlinear hyperbolic equation with a linearly transformed argument

Yuriy Fedkovych National University, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: ihor27@gmail.com, yaroslav.bihun@gmail.com

Averaging method for the weak nonlinear hyperbolic equation with initial conditions under small perturbation in resonance case is grounded in paper [1]. The object of this paper is the Darboux problem [2] in the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial x} = f(\tau, x, u_{\Lambda\Theta}, a_\Lambda, \varphi_\Theta), (\tau, x) \in [0, L] \times [0, M], \tag{1}$$

$$u(\tau, 0) = \mu(\tau), \tau \in [0, L], u(0, x) = \xi(x), x \in [0, M], \tag{2}$$

where $(x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon))$ – the solution of multifrequency system of equations

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta). \tag{3}$$

Here $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ is a small parameter, $\varepsilon_0 << 1$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0, 1)$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i\tau)$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j\tau)$, $u_{\lambda_i\theta_j} = u(\lambda_i\tau, \theta_j\tau)$.

The solution of system of equations (3) satisfies the conditions

$$\sum_{\nu=0}^{r} b_\nu a(\tau_\nu) = d_1, 0 \le \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_r \le L, d_1 \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \int_0^L A_\nu(\tau, a_\Lambda(\tau))\varphi(\Theta_\nu\tau)d\tau = d_2, d_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

The system of equations (1), (3) averaged by the vector of fast variables $\varphi_\Theta \in T^{mq}$. In particular, the averaged equation (3) takes the form $\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial\tau\partial x} = f_0(\tau, x, \overline{u}_{\Lambda\Theta}, \overline{a}_\Lambda)$.

Existence and uniqueness of solution of the averaged problem and the problem (1) – (3) are proved. Conditions, under which the assessment

$$|u(\tau, x, \varepsilon) - \overline{u}(\tau, x)| + ||a(\tau, \varepsilon) - \overline{a}(\tau)|| \le c\varepsilon^\alpha, \alpha = (mq)^{-1}$$

for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $(\tau, x) \in [0, L] \times [0, M]$ is true, were found.

[1] Bihun Ya., Skutar I. *An averaging in a multifrequency system with ordinary and partial derivatives and linearly transformed arguments* // Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University. Series: Mathematics. – 2012. – **Vol.2**, No 2-3. – p.19–24.

[2] Człapinski N.. *Hyporbolic Functional Differential Equations.* – Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 1999. – 102 p.

Roksolyana Stolyarchuk

Companion matrices and stability analysis

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
E-mail: sroksolyana@yahoo.com

The asymptotic behavior of a discrete evolution process

$$u_{n+1} = Au_n, \quad u_0 \text{ given}, \quad A \in \mathbf{C}^{d\times d}, \tag{1}$$

is governed by the spectrum $\sigma(A)$ of the matrix A. The process is asymptotically stable for $n \to \infty$ if $\sigma(A)$ is contained in the complex unit disc and if all eigenvalues λ of A with $|\lambda| = 1$ are simple. On the other hand, it is well known that if A is not normal, the transient behavior of solutions u_n to (1) cannot properly described by $\sigma(A)$, because even in the asymptotically stable case solutions may strongly grow in norm $\|\cdot\|_2$ over a finite range if $\|A\|_2 > 1$. Therefore it is of interest to find another, 'natural' norm $\|\cdot\|$ for which $\|A\| \le 1$ holds true.

Here we consider a special class of non-normal matrices, namely companion matrices of dimension $d = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}. \tag{2}$$

Even for this apparently simple case the question formulated above appears to be nontrivial. In [1] (and references therein), a norm $\|\cdot\| \ne \|\cdot\|_2$ (depending on $\sigma(A)$) is found such that $\|A\| \le 1$ for arbitrary matrices of the form (1) with stable spectrum. We stress that this construction is uniformly valid for arbitrary λ_1, λ_2 including the confluent, non-diagonalizable case $\lambda_1 = \lambda_2$.

The main purpose of this talk is to discuss the technicalities of this construction. We point out that, for higher dimensional problems, such an explicit symbolic construction appears to be impossible in general. (A tentative numerical approach is proposed in [1].)

[1] W. Auzinger, R. Stolyarchuk: A topic in the stability analysis associated with companion matrices. Matematychni Studii 46(2), 115–120, 2016.

Alexandru Şubă, Olga Vacaraş

Maximal multiplicity of the line at infinity for quartic differential systems

Institute of Mathematics and Computer Science, Moldova
E-mail: alexandru.suba@math.md, vacarasolga@yahoo.com

We consider the real quartic system of differential equations

$$\dot{x} = \sum_{j=0}^{4} p_j(x,y) \equiv p\,(x,y)\,, \qquad \dot{y} = \sum_{j=0}^{4} q_j(x,y) \equiv q\,(x,y)\,, \tag{1}$$

where $p_j(x,y), q_j(x,y)$ are homogeneous polynomials of degree j.

Suppose that the right-hand sides of (1) do not have the common divisors of degree greatest than 0, i.e. $\gcd(p,q)=1$, and $yp_4(x,y) - xq_4(x,y) \not\equiv 0$, i.e. at infinity the system (1) has at most five distinct singular points.

The homogeneous system associated to the system (1) has the form

$$\dot{x} = \sum_{j=0}^{4} p_j(x,y)Z^{4-j} \equiv P\,(x,y,Z)\,,\ \dot{y} = \sum_{j=0}^{4} q_j(x,y)Z^{4-j} \equiv Q\,(x,y,Z)\,.$$

Denote $\mathbb{X} = P\,(x,y,Z)\,\frac{\partial}{\partial x} + Q\,(x,y,Z)\,\frac{\partial}{\partial y}$.

We say that the line at infinity $Z=0$ has *algebraic multiplicity* $m+1$ if m is the greatest positive integer such that Z^m divides $E_\infty = P\cdot\mathbb{X}(Q) - Q\cdot\mathbb{X}(P)$.

In this paper we show that in the class of quartic differential systems the maximal algebraic multiplicity of the line at infinity is equal to ten.

Theorem. *For quartic differential systems the algebraic multiplicity of the line at infinity is at most ten. Any quartic system having the infinite line of the multiplicity 10 via affine transformations and time rescaling can be written in the form*

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = x^4 + 3y. \tag{2}$$

For homogenized system of (2), i.e. $\dot{x} = -xZ^3, \quad \dot{y} = x^4 + 3yZ^3$, we have $E_\infty = -12xyZ^9$, i.e. $Z=0$ has multiplicity 10.

[1] C. Christopher, J. Llibre and J.V. Pereira. *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields* // Pacific J. of Math. **329** (2007), no. 1, 63–117.

S.M. Temesheva

On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: temeshevasvetlana@gmail.com

Consider a linear two-point boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

where $A(t)$ and $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, B and C are the given $(n \times n)$ matrices, d is a given n vector, $\|x\| = \max\limits_{i=1:n} |x_i|$, and $\|A(t)\| = \max\limits_{i=1:n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \leq \alpha$, $\alpha = \text{const}$.

Solution to problem (1), (2) is a function $x^*(t) \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, continuously differentiable on $(0,T)$ and satisfying the differential equation (1) and boundary condition (2), when $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ – the space of continuous functions $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ with the norm $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Present article offers an other family of algorithms of the parametrization method [1]. Here in each algorithm's step also consists of two items. The difference of offering algorithms is in item *b*), where the unknown functions are to be computed by the recurrent formula. The convergence conditions for the algorithms are obtained. The necessary and sufficient coefficient conditions for the well-posedness of considered problem are established.

[1] Dzhumabayev D.S. *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equatio* // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1989. – **29**, 1. – C. 34-46.

M.I. Tleubergenov [1], *G.T. Ibraeva* [2]

On solving of the stochastic Helmholtz problem by the method of additional variables of Liouville

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: marat207@math.kz
[2] *Aktobe Military Institute of Air Defense Forces, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: gulmira_ibraeva@mail.ru

Let the system of stochastic differential equations of Itô be given

$$\dot{x}_k = X_k(t,x) + \sigma_{kj}(t,x)\dot{\xi}^j, \quad (k = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}). \tag{1}$$

It is required to reduce the system of equations (1) to the equivalent equations of the Hamiltonian structure. Here$\xi^j = \xi_0^j + \int c^j(y)P^0(t,dy)$, where ξ_0^j is a Wiener process; P^0 is a Poisson process.

To solve this problem, we will use the Liouville method [3]. Namely, we introduce auxiliary variables $y_i, i = \overline{1,n}$ and define the Hamilton function of the extended system as

$$H(t,x,y) = -X_i(t,x)y_i. \tag{2}$$

Then the corresponding equations of motion of the extended system are written in the form

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & (3a) \\ \dfrac{dx_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} + \sigma_{ij}(t,x,)\dot{\xi}^j, \quad (i = \overline{1,n}), & (3b) \end{cases} \tag{3}$$

where the equations (*3b*) coincide with the original equations (1), and the equations (*3a*) serve to determine the auxiliary variables y_i, $i = \overline{1,n}$. Thus, it is fair

Теорема 1 *Necessary and sufficient conditions for the representation Itô equation (1) in the form of the equations of the canonical structure (3) is the representation of the Hamilton function in the form of (2) with the help of additional variables* $y_i, i = \overline{1,n}$ *that are determined from the equations (3a).*

[1] Helmholtz G. *On the physical meaning of the principle of least action* // Variational principles of mechanics. M., –1959. Pp.430-459.

[2] Pugachev V.S., Sinitsyn, I.N. *Stochastic differential systems.* -M.,1990. -632 p.

[3] Appel P. *Theoretical mechanics..* – M., 1960. – 487 p.

Yevgeniia Yevgenieva

Large solutions of quasilinear parabolic equations with absorption potential

Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine,
Slovyansk, Ukraine
E-mail: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

Let $\Omega \subset R^n$ be a bounded domain such that $\partial\Omega \in C^2$. The following problem for a quasilinear parabolic equation is considered in the cylindrical domain $Q = (0,T) \times \Omega,\ 0 < T < \infty$:

$$\begin{aligned} &(|u|^{p-1}u)_t - \Delta_p(u) = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u \quad \lambda > p > 0, \\ &u = \infty \qquad \text{on } (0,T) \times \partial\Omega, \\ &u = \infty \qquad \text{on } \{0\} \times \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

Here $b(t,x)$ (the absorption potential) is a continuous function in $[0,T] \times \overline{\Omega}$ such that the following conditions holds:

$$b(t,x) > 0 \quad \text{in } [0,T) \times \overline{\Omega}, \quad b(t,x) = 0 \quad \text{on } \{T\} \times \Omega, \tag{2}$$

$$a_1(t)g_1(d(x)) \le b(t,x) \le a_2(t)g_2(d(x)) \quad \forall\,(t,x) \in [0,T) \times \Omega, \tag{3}$$

where $g_1(s) \le g_2(s)$ are arbitrary nondecreasing positive functions for all $s > 0$ and $a_1(t)$ satisfies the following condition:

$$a_1(t) \ge c_0 \exp\left(-\omega(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall\, t < T, \quad c_0, \omega, \mu = const > 0, \tag{4}$$

In the paper [1] the precise estimate of a profile of an arbitrary large solution of problem (1) has been obtained under the mentioned conditions (2)–(4).

This research was supported by the Project 0117U006353 from the Department of Targeted Training of T. Shevchenko National University of Kyiv at the NAS of Ukraine.

[1] A. Shishkov, Ye. Yevgenieva. *Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations* // Mathematische Nachrichten – 2018. – 25 p. See also https://arxiv.org/abs/1802.03717

Sailaubay Zumatov

Stability of a program manifold of non-autonomous control systems

Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

Consider the problem of construction of a control systems by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x)=0$, in the following form [1]:

$$\dot{x} = f\,(t,x) - B(t)\xi, \quad \xi = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \tag{1}$$

in a class of continuously-differentiable at times t and bounded on a norm matrices Ξ, where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t)=0$, $B \in \Xi^{n\times r}$, $P \in \Xi^{s\times r}$ are matrices, $\omega \in R^s(s \leq n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a vector-function, satisfying to conditions of local quadratic connection

$$\varphi(0) = 0\ \wedge\ \varphi^T\theta(\sigma - K^{-1}\varphi) > 0, \quad \forall\,\sigma \neq 0, \theta > 0\,, \quad K = K^T > 0. \tag{2}$$

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [1, 2]:

$$\dot{\omega} = -A(t) - H(t)B(t)\xi,\ \xi = \varphi\,(\sigma)\,,\ \sigma = P^T(t)\omega,\ t \in I = [0,\ \infty)\,. \tag{3}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2).

Теорема 1 *Suppose that there exist matrices* $L = L^T > 0$, $\beta > 0$ *and non-linear function* $\varphi(\sigma)$ *satisfies the conditions (2). Then, for the absolute stability of the program manifold* $\Omega\,(t)$ *with respect to the vector function* ω *it is sufficient performing of the following conditions* $-\dot{V}(t,\omega) > 0$ *possessing the following properties*

$$l_1(\|\omega\|^2 \leq V \leq l_2(\|\omega\|^2, \quad g_1(\|\omega\|^2 \leq -\dot{V} \leq g_2(\|\omega\|^2, \tag{4}$$

where l_1, l_2, g_1, g_2 *are positive constants.*

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system* . –Alma-Ata: Nauka. – 1981. –316 p.

[2] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion.* – Almaty: Gylym. – 1999. – 228 p.

Анна Аноп, Олександр Мурач

Про однорідні еліптичні рівняння в розширеній соболєвській шкалі

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

Доповідь присвячена властивостям розв'язків однорідних еліптичних рівнянь в розширеній соболєвській шкалі [1]. Остання складається з гільбертових просторів Хермандера $H^{\varphi}(\Omega)$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$, а Ω — обмежена евклідова область з межею $\Gamma \in C^{\infty}$. Тут RO — клас усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ таких, що $c^{-1} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c$ для довільних $t \geq 1$ і $\lambda \in [1, a]$, де числа $a > 1$ і $c \geq 1$ не залежать від t і λ, але можуть залежати від φ. Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$; комплексний гільбертів простір $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)$, і наділений нормою $\|\varphi(\langle\cdot\rangle)\widehat{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$. Тут $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\widehat{w}$ — перетворення Фур'є розподілу w. Комплексні простори $H^{\varphi}(\Omega)$ і $H^{\varphi}(\Gamma)$ означаються за простором $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ у стандартний спосіб.

Розглянемо довільну еліптичну крайову задачу (ЕКЗ), яка складається з однорідного еліптичного рівняння $Au = 0$ в Ω парного порядку $2q$ і крайових умов $B_j u = g_j$, де $m_j := \operatorname{ord} B_j < 2q$ і $j = 1, \ldots, q$. Вирази A і B_j мають C^{∞}-коефіцієнти. Покладемо $C^{\infty}(\overline{\Omega}, A) := \{u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : Au = 0 \text{ в } \Omega\}$ і $H^{\varphi}(\Omega, A) := \{u \in H^{\varphi}(\Omega) : Au = 0 \text{ в } \Omega\}$.

Теорема 1 *Для кожного* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *множина* $C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$ *щільна в* $H^{\varphi}(\Omega, A)$, *а відображення* $u \mapsto (B_1 u, \ldots, B_q u)$, *де* $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$, *продовжується єдиним чином до обмеженого оператора на парі гільбертових просторів* $H^{\varphi}(\Omega, A)$ *і* $\bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma)$. *Цей оператор нетерів; його ядро лежить в* $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ *і разом з індексом не залежить від* φ. *Тут* $\varrho(t) := t$ *при* $t \geq 1$.

Теорема 2 *Нехай* $\varphi \in \mathrm{RO}$, *а* $\Gamma_0 \neq \varnothing$ *є відкритою підмножиною межі* Γ. *Припустимо, що розподіл* $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ *є розв'язком розглянутої ЕКЗ, де* $\chi g_j \in H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma)$ *для усіх* $j \in \{1, \ldots, g\}$ *і* $\chi \in C^{\infty}(\Gamma)$ *з* $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$. *Тоді* $\eta u \in H^{\varphi}(\Omega)$ *для усіх* $\eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ *з* $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega \cup \Gamma_0$.

[1] Аноп А.В., Мурач О.О. *Однорідні еліптичні рівняння в розширеній соболевській шкалі* // Доповіді НАН України. – 2018. – № 3. – С. 3–11.

Фарход Асроров, Юрій Перестюк

Стійкість тривіального тору для одного класу розривних багаточастотних систем

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
E-mail: far@ukr.net, perestyuk@gmail.com

В данній роботі встановлено нові умови експоненційної стійкості тривіального тору [1] для класу розривних динамічних систем на торі, які формулюються в термінах властивостей правих частин системи не на всьому торі, а лише на множині неблукаючих точок. В прямому добутку $\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$ розглядається імпульсна система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x, \tag{1}$$

$$\triangle x|_{\varphi \in \Gamma} = I(\varphi, x)x, \tag{2}$$

де P обмежена і локально ліпшицева, a - глобально ліпшицева, I неперервна і обмежена, $\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{T}_m \mid \Phi(\varphi) = 0\}$, $\Phi \in C(\mathcal{T}_m)$.

Система $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ породжує динамічну систему $\varphi_t(\varphi)$ на $\mathcal{T}_m$, множину неблукаючих точок якої будемо позначати Ω.

Будемо вважати, що $\forall\ \varphi \in \mathcal{T}_m$ існують $\{t_i(\varphi)\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ - корені рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$, причому

$$\exists\ \theta > 0\ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{T}_m\ \ \forall\ i \geq 1\ \ t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta. \tag{3}$$

Покладемо

$$\alpha = \max_{\varphi \in \Gamma} \|E + I(\varphi, 0)\|,$$

де E - одинична матриця.

Теорема 1 *Нехай виконується умова (3) і*

$$\forall\ \varphi \in \Omega\ \ \frac{1}{\theta} \ln \alpha + \lambda(\varphi, 0) < 0. \tag{4}$$

Тоді тривіальний тор системи (1),(2) експоненційно стійкий.

[1] Самойленко А. М. *Элементы математической теории многочастотных колебаний.* – М: Наука, 1987.

Ярослав Баранецький, Петро Каленюк

Нелокальна багатоточкова задача для рівняння із частинними похідними парного порядку з постійними коефіцієнтами

Національний університет “Львівька політехніка”, Львів, Україна
E-mail: baryarom@ukr.net, pkalenyuk@gmail.com

В області $G := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : 0 < x_j < 1,\, j = \overline{1, m}\}$ вивчається задача

$$L\left(D^2\right) y := \sum_{|\beta| \le n} a_\beta D^{2\beta} y = f,\; x \in G,\; D^{2\beta} := \prod_{j=1}^{m} D^{2\beta_1}_{x_j}, \tag{1}$$

$$\ell_{s,j} y := D^{2s-1}_{x_j}\, y|_{x_j=0} + D^{2s-1}_{x_j}\, y|_{x_j=1} = 0,\; s = \overline{1, n},\; j = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$\ell_{n+s,j} y := D^{2s-1}_{x_j}\, y|_{x_j=0} - D^{2s-1}_{x_j}\, y|_{x_j=1} + l^1_{s,j} y = 0, \tag{3}$$

$$\ell^1_{s,j} y := \sum_{r=0}^{r_j} \sum_{q=0}^{m_{s,j}} b_{q,r,s,j}\, D^q_{x_j} y\Big|_{x_j = x_{r,j}},\; 0 = x_{0,j} < \ldots < x_{r_j,j} < 1, \tag{4}$$

$a_\beta \in \mathbb{R},\; b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R},\; |\beta| \le n,\; q = \overline{0, m_{s,j}},\; r = \overline{0, r_j},\; s = \overline{1, n},\; j = \overline{1, m}.$

Припущення $P_1 : b_{q,r,s,j} = (-1)^q\, b_{q,r_j-r,s,j},\; x_{r_j-r,j} = 1 - x_{r,j}.$

Припущення $P_2 : m_{s,j} \le 2s - 1,\;\; s = \overline{1, n},\; j = \overline{1, m}.$

Припущення $P_3 : C\|t\|^n \le |L(t)|,\; C > 0,\; t := (t_1, t_2, ..., t_m),\;\; ,\; t_j \in \mathbb{R},\; \|t\|^2 = t_1^2 + t_2^2 + ... + t_m^2,\; j = \overline{1, m}.$

Теорема 1 *Нехай виконується припущення* P_1. *Тоді оператор задачі* (1)-(4) *має множину власних значень*

$$\sigma = \{\lambda_k \in \mathbb{R},\; \lambda_k := \sum_{|\beta| \le n} a_\beta \prod_{j=1}^{m} \mu^{\beta_j}_{k_j},\; \mu_{k_j} = -\pi^2 k_j^2,\; k_j \in \mathbb{N}_0,\; j = \overline{1, m}\}$$

та повну і мінімальну в $L_2(G)$ *систему власних функцій* V.

Теорема 2 *Нехай виконуються припущення* $P_1 - P_3$. *Тоді система функцій* V *є базою Рісса у просторі* $L_2(G)$ *та , за умови* $\mu_k \ne 0,\; k \in \mathbb{N}_0^m$, *для будь-якої функції* $f \in L_2(G)$ *існує единий розв'язок задачі* (1)-(4) *у вигляді ряду за системою* V.

Ярослав Бігун, Роман Петришин

Про усереднення в багаточастотних системах із перетвореними аргументами й точковими та інтегральними умовами

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Україна
E-mail: yaroslav.bihun@gmail.com, r.petryshyn@chnu.edu.ua

При математичному моделюванні процесів в ядерних реакторах, транспортних системах та інших задачах зустрічаються системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами. Особливість таких систем при $t \in [0, L]$ в тому, що початковою множиною є точка $\{0\}$, а не деякий відрізок $[-\Delta, 0]$.

У роботі розглянуто багаточастотну систему вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L]$, $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $m \geqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0; 1]$, $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, ..., a_{\lambda_r})$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $i = \overline{1, r}$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \ldots, \varphi_{\theta_s})$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $j = \overline{1, s}$.

Системами (1), (2) описуються складні коливні процеси із запізненням. Багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь досліджено в [1], системи вигляду (1), (2) – в роботі [2]. Для спрощення цієї системи застосовано усереднення за швидкими змінними φ_Θ, що приводить до значно простішої системи вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \tag{3}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda). \tag{4}$$

Така процедура не завжди дає правильний результат через появу в процесі еволюції резонансів, умовою яких в точці $\tau \in [0, L]$ є виконання рівності

$$\sum_{\nu=1}^{s} \theta_\nu (k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau)) = 0, \quad k_\nu \in \mathbb{R}^m, \quad \|k_1 + ... + k_s\| \neq 0.$$

Для уникнення захоплення в резонанс, яке полягає в тому, що система починає підтримувати резонансний стан, накладено додаткову умову: визначник Вронського, побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1 \tau), \ldots, \omega(\theta_s \tau)\}$, відмінний від нуля при $\tau \in [0, L]$.

Розглянуто багатоточкові й інтегральні умови різних типів, зокрема, n багатоточкових і m інтегральних умов як на відрізку $[0, L]$, так і на його частинах, а також лінійну комбінацію таких умов.

Встановлено існування або існування та єдиність розв'язку системи (1), (2) із заданими умовами. Також обґрунтовано метод усереднення й одержано асимптотичну оцінку похибки відхилення розв'язків систем (1), (2) і (3), (4) з відповідними умовами, порядок якої $O(\varepsilon^{\alpha})$, $\alpha = (ms)^{-1}$. Якщо визначник Вронського має ізольовані нулі, кратність яких не перевищує q, то як і для випадку задачі з початковими умовами [4], оцінка похибки має порядок $O(\varepsilon^{\beta})$, $\beta = (ms+q)^{-1}$.

Одержані результати проілюстровано на модельних задачах.

[1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.* – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

[2] Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.І. *Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і багатоточковими та інтегральними умовами* // Буковинський математичний журнал – 2016. – **4**, №3–4. – С. 30–35.

[3] Henderson Johnny and Luca Rodica *Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equation.* – Kluwer, Dordrecht—Boston—London, Netherlands,. – 2016. – 354 p.

[4] Петришин Р.І., Бігун Я.Й. *Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 421.Математика. – 2008. – С. 84–89.

Марія Білозерова, Грета Гержановська

Асимптотична поведінка особливих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Україна
E-mail: Marbel@ukr.net, greta.odessa@gmai.com

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')f(y,y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ — неперервні функції, $f : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to]0,+\infty[$ — неперервно диференційовна функція, $Y_i \in \{0,\pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — проміжок або $[y_i^0;Y_i[$,[1] або $]Y_i;y_i^0]$, $i=\overline{0,1}$. Крім того, вважається, що кожна з функцій $\varphi_i(z)$, є правильно змінною функцією при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку σ_i, $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$, $\sigma_1 \neq 1$, $i=\overline{0,1}$, а функція f задовольняє умову

$$\lim_{\substack{v_k \to Y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(v_0,v_1)}{f(v_0,v_1)} = 0,$$

рівномірно по $v_j \in \Delta_{Y_j}$, $j \neq k$, $k,j=\overline{0,1}$.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язком, якщо він заданий на $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ і для кожного $i \in \{0,1\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\,y(t)} = \lambda_0.$$

У даній роботі розглядається особливий клас $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язків при $\lambda_0 \in \{0,\pm\infty\}$. У цьому випадку такі розв'язки або їх похідні першого порядку будуть повільно змінними функціями при $t \uparrow \omega$, що ускладнює дослідження. Були отримані необхідні і достатні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язків при $\lambda_0 \in \{0,\pm\infty\}$, а також асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

---

[1] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Степан Блажевський

Квазістатичні термопружні поля в двошарових симетричних просторах

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: blgs@ukr.net

Квазістатичне поле напружень в симетричному двошаровому просторі, породжене нестаціонарним температурним полем, опишуть відмінні від тотожнього нуля центральні компоненти тензора напружень

$$\begin{aligned}
\sigma_{11,j}(r,t) &= G_{0j}\Big(\frac{du_j}{dr}+\frac{(2\alpha_j+1)\mu_j}{1-\mu_j}\frac{u_j}{r}-m_{0j}T_j(t,r)\Big);\\
\sigma_{22,j}(r,t) &= G_{0j}\Big[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{du_j}{dr}+\Big(1+\frac{2\alpha_j\mu_j}{1-\mu_j}\Big)\frac{u_j}{r}-m_{0j}T_j(t,r)\Big]; \qquad (1)\\
\sigma_{33,j}(r,t) &= G_{0j}\Big[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{du_j}{dr}+\Big(2\alpha_j+\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\Big)\frac{u_j}{r}-m_{0j}T_j(t,r)\Big]; j=1,2.
\end{aligned}$$

При цьому радіальні компоненти $u_j(r,t)$ вектора переміщення повинні бути обмеженим на множині $I_1^+=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,+\infty)\}$ розв'язком сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера другого порядку [1]:

$$\frac{d^2u_j}{dr^2}+\frac{2\alpha_j+1}{r}\frac{du_j}{dr}-\frac{2\alpha_j+1}{r^2}u_j(r,t)=m_{0j}\frac{\partial T_j(t,r)}{\partial r}; j=1,2 \qquad (2)$$

за умовами ідеального механічного контакту

$$\left\{\begin{array}{c} [u_1(r,t)-u_2(r,t)]_{r=R_1}=0,\\ [\sigma_{11,1}(r,t)-\sigma_{11,2}(r,t)]|_{r=R_1}=0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Розв'язок задачі (1) – (3), побудований методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є-Бесселя на кусково-однорідній осі, має вигляд

$$u_j(r,t)=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}M_{(\alpha+1,\alpha);jk}(r,\rho)T_k(t,\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho, j=1,2. \qquad (4)$$

Проведено аналіз розв'язку для випадку двошарового осесиметричного простору.

[1] Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

Олександр Бурилко[1], *Яків Казанович*[2], *Роман Борисюк*[3]

Переможець отримує все в системі фазових осциляторів з адаптацією

[1] *Інститут математики, НАНУ, м. Київ, Україна*
E-mail: burylko@yahoo.co.uk
[2] *Інститут математичних проблем біології, РАН, м. Пущино, Росія*
E-mail: kazanovichyakov@gmail.com
[3] *Університет Плімута, м. Плімут, Великобританія*
E-mail: r.borisyuk@plymouth.ac.uk

Ми розглядаємо систему узагальнених фазових осциляторів з центральним елементом та радіальним зв'язком [1, 2]. На відміну від звичайних фазових осциляторів Курамотівського типу, динаміка змінних у нашій системі включає не лише фази кожного з осциляторів, а й власну частоту центрального осцилятора та сили зв'язків від периферичних осциляторів до центрального, що описуються окремими рівняннями. При відповідних значеннях параметрів система демонструє поведінку переможець–отримує–все (ПОВ) в термінах боротьби між периферичними осциляторами за синхронізацію з центральним елементом. Умови для ПОВ режимів описано для стаціонарних та нестаціонарних типів динаміки системи. Представлено біфуркаційний аналіз переходів від стаціонарних до нестаціонарних ПОВ динамік. Новий тип глобальної біфуркації, який ми називаємо сідло–вузол на інваріантному торі (saddle–node on invariant torus — SNIT), було виявлено та детально описано. Комп'ютерне моделювання системи дозволяє оптимально вибрати параметри для реалізації режимів переможець–отримує–все. Всі результати є новими та важливими для моделювання когнітивних функцій.

[1] Kazanovich, Y., Borisyuk, R. *Reaction times in visual search can be explained by a simple model of neural synchronization* // Neural Networks. – 2017 – **87**. – C. 1-7.

[2] Burylko, O., Kazanovich, Y., Borisyuk, R. *Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation* // Scientific Reports. – 2018. – **8**. – C. 416.

Яна Варга, Таміла Гапак

Про одну нелокальну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь частково розв'язаної відносно похідної

ДВНЗ „УжНУ“, м. Ужгород, Україна
E-mail: iana.varga@uzhnu.edu.ua, tamila.hapak@uzhnu.edu.ua

Вивчається крайова задача

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right),\ t \in [a,b]\,,$$

$$\Phi(x) = d,$$

де $\Phi : C([a,b]\,, D) \to \mathbb{R}^n$ неперервний вектор функціонал (можливо нелінійний), $f : [a,b] \times D{\times}D_1 \to \mathbb{R}^n$ неперервна функція, яка задовольняє локальну умову Ліпшиця в деякій обмеженій області $D \times D_1$, ($D \subset \mathbb{R}^n$ буде конкретизована, $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ задана область), $d \in \mathbb{R}^n$ заданий вектор, тобто

$$\begin{aligned} |f(t,u,v) - f(t,\widetilde{u},\widetilde{v})| \quad &\leq \quad K_1\,|u-\widetilde{u}| + K_2\,|v-\widetilde{v}|\,,\ \text{для всіх}\ \{u,\widetilde{u}\} \subset D, \\ \{v,v\} \quad &\subset \quad D_1\ \text{і всіх фіксованих}\ t \in [a,b]\,. \end{aligned}$$

Припускаємо, що максимальне по модулю власне значення матриць K_2 і $Q = \frac{3(b-a)}{10}K$ менше за одиницю

$$r(K_2) < 1,\ r(Q) < 1,\ \text{де}\ \ K = [I_n - K_2]^{-1}\,K_1.$$

Наш підхід конструктивний у тому розумінні, що дозволяє встановити не лише розв'язок крайової задачі, а і побудувати його наближення.

[1] Ronto A, Ronto M, Varha J.*A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems* //Applied Mathematics and Computation. – 2015. – **250**. – P. 689-700.

[2] Варга Я.В. *Про одну нелінійну інтегральну крайову задачу* // Наук. вісник Ужгород ун-ту. – 2016. – **28**, номер.1– С. 17-27.

Ганна Вережак

Нелокальна за часом задача для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
E-mail: g.verezhak@gmail.com

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку в узагальнених просторах типу S та просторах типу S' - просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів.

Розглядаються простори $S^{b_n}_{a_k}$, які будуються за послідовностями вигляду $\{b_n = \ n!\rho_n, \ n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{a_k = k!d_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\{\rho_n\}$, $\rho_0 = 1$, – послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями: а) вона монотонно спадна; б) $\exists c_b > 0 \ \exists \gamma_1 \in (0,1) \ \forall n \in \mathbb{N} : \rho_{n-1}/\rho_n \leq c_b \cdot n^{\gamma_1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$; г) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \ \rho_n \geq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n/n^n$. Послідовність $\{d_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $d_0 = 1$, також володіє властивостями а)–г), при цьому умова б) має вигляд: $\exists c_a > 0$ $\exists \gamma_2 \in (0,1) \ \forall n \in \mathbb{N} : d_{k-1}/d_k \leq c_a \cdot k^{\gamma_2}$. Вважаємо також, що параметри γ_1, γ_2 в умові б) для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$ пов'язані умовою д): $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta \leq 1$.

Символом $S^{b_n}_{a_k}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists\, c, A, B > 0 \ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq cA^k B^n a_k b_n.$$

Символом $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору $S^{b_n}_{a_k}$. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або узагальненим простором типу $\overset{\circ}{S}$, а його елементи – основними функціями.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{dt} = A_\varphi u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \tag{1}$$

де $A_\varphi = F^{-1}_{B_\nu}[\varphi F_{B_\nu}]$, функція φ – символ оператора A_φ є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. За цієї умови оператор A_φ є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. У праці [1] з'ясовано, що оператор A_φ можна розуміти як оператор Бесселя "нескінченного порядку" у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ вигляду

$$(A_\varphi \psi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-1)^k B^k_\nu \psi(x), \, \varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k}, \, \forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}.$$

При цьому вважаємо, що функція φ – символ оператора A_φ, належить до класу $\overset{\circ}{P}{}^{b_n}_{b_k}$, який складається з функцій, які задовольняють умови: 1) φ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, 2) $e^\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ (умови 1), 2) є певними аналогами умови "параболічності"для еволюційних рівнянь з частинними похідними).

Для рівняння (1) розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок $u \in C^1 \left((0,T],\ \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k} \right)$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t,\cdot) = f, \tag{2}$$

де $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k},\ *)'$, тобто, в слабкому сенсі в просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < ... < t_m \leq T-$ фіксовані числа, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$.

Символом $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k},\ *)'$ позначається клас узагальнених функцій з $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$, які є згортувачами в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$.

Теорема 1 *Задача* (1), (2) *коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = \ f * \ G(t,x),\ (t,x) \in \Pi_T,$$

де $G = F^{-1}_{B_\nu}[Q]$, $Q(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\}\right)^{-1}$.

[1] Городецький В.В., Вережак Г.П. *Узагальнені простори типу* $\overset{\circ}{S}$. // Буковинський матем. журн. – 2017. **Т. 5**, № 1-2. С. 49-61.

Оксана Гентош [1], *Анатолій Прикарпатський* [2]

Раціонально-факторизовані потоки Лакса на спряженому просторі центрального розширення операторної алгебри Лі

[1] *ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, Львів, Україна*
E-mail: ohen@ukr.net
[2] *Краківська політехніка ім. Тадеуша Костюшко, Краків, Польща*
E-mail: pryk.anat@cybergal.com

На спряженому просторі $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$ центрального розширення 2-коциклом Маурера-Картана операторної алгебри Лі $\mathcal{G}$ із стандартним комутатором та інваріантним скалярним добутком, яка розкладається у пряму суму двох підалгебр Лі $\mathcal{G}_+$ і $\mathcal{G}_-$, розглядаються два потоки Лакса

$$dl/dt = [(\nabla\gamma(l))_+,\ l - c\partial/\partial y],\quad d\tilde{l}/dt = [(\nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l}))_+,\ \tilde{l} - c\partial/\partial y], \tag{1}$$

де $l, \tilde{l} \in \mathcal{G}^*$, нижній індекс "+" позначає проекцію оператора на $\mathcal{G}_+$, $c \in \mathbb{C}$. Ці потоки породжуються $\mathcal{R}$-деформованою дужкою Лі-Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$ та функціоналами Казимира γ і $\tilde{\gamma} \in I(\mathcal{G}^*)$ у точках l і $\tilde{l} \in \mathcal{G}^*$ відповідно.

Доведено, що при перетворенні Беклунда

$$(A, B) \overset{P}{\mapsto} (l = AB^{-1}, \tilde{l} = B^{-1}(A - c\partial B/\partial y)), \tag{2}$$

де $A, B \in G_+$, G_+ – група Лі з алгеброю Лі $\mathcal{G}_+$, яке задає раціональну факторизацію елементів $l, \tilde{l} \in \mathcal{G}^*$, система потоків Лакса (1) на $\mathcal{G}^* \oplus \mathcal{G}^*$ еквівалентна до системи еволюційних рівнянь на $G_+ \times G_+$:

$$\begin{aligned} dA/dt &= (\nabla\gamma(l))_+ A - A(\nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l}))_+ + c(\partial(\nabla\gamma(l))_+/\partial y)B, \\ dB/dt &= (\nabla\gamma(l))_+ B - B(\nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l}))_+. \end{aligned} \tag{3}$$

Також показано, що система (3) є гамільтоновою відносно дужки Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{L}}$, пов'язаної з оператором Пуассона $\mathcal{L} = (P')^{-1}(\Theta \oplus \tilde{\Theta})(P'^*)^{-1}$, де Θ і $\tilde{\Theta}$ – оператори Пуассона, які породжують дужку Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$ у точках l і $\tilde{l} \in \mathcal{G}^*$ відповідно, P' – похідна Фреше відображення $P : (G_+ \times G_+) \to (\mathcal{G}^* \oplus \mathcal{G}^*)$ з (2), P'^* – спряжений до неї оператор, та гамільтоніаном $\gamma(A, B) := \gamma(l) + \gamma(\tilde{l})|_{l=l(A,B),\, \tilde{l}=\tilde{l}(A,B)}$.

За допомого системи (3) отримано апріорі інтегровні гамільтонові (2+1)-вимірні системи на функціональних многовидах.

Василь Городецький, Руслана Колісник,
Ольга Мартинюк

Про наближені розв'язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua,
alfaolga1@gmail.com

Багато задач математичної фізики можна подати у вигляді задачі Коші для еволюційного рівняння гіперболічного типу

$$u''(t) + t^{\gamma} A u(t) = 0, \quad t \in [0, T], u(0) = f, u'(0) = g,$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною областю визначення в сепарабельному гільбертовому просторі, $\gamma \geq 0$ – фіксований параметр. У працях А.В. Бабина методом вагового наближення функцій на півосі одержано зображення розв'язку зазначеної задачі (у випадку $\gamma = 0$, $g = 0$) у вигляді $u(t) = \lim\limits_{n \to \infty} P_n(t, A)f$, де $P_n(t, \lambda)$ – поліном степеня n змінної λ при фіксованому t. У припущенні, що f належить до області визначення оператора $\mathrm{ch}(R\sqrt{A})$, $R > 0$, за шукані поліноми беруться поліноми, які наближують на півосі $(0, +\infty)$ функцію $\cos(t\sqrt{\lambda})$, $\lambda \geq 0$, з вагою $\mathrm{ch}(R\sqrt{\lambda})$, $\lambda \geq 0$, $R > 0$. У праці [1] поліноми P_n будуються за допомогою наближення функцій на півосі частинними сумами їхніх рядів Фур'є, побудованими за ортогональними многочленами Лагерра, що утворюють ортонормований базис у просторі $L_2((0, \infty), \lambda^{\alpha} \exp(-\mu\lambda))$, де $\alpha > -1$, $\mu > 0$ – числа, залежні від початкового елемента f. У цій роботі знайдена оцінка збіжності $\sup\limits_{t \in [0,T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|$ у випадку, коли f належить до класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$, $1 < \beta \leq 2$ ($G_{\{1\}}(A) = H_a$), пов'язаного з оператором A. Одночасно дається характеристика класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$, $1 < \beta \leq 2$, з точки зору наближення розв'язку $u(t)$ вказаної задачі Коші функціями вигляду $P_n(t, A)f \equiv u_n(t)$.

[1] Городецкий В.В., Горбачук М.Л. *О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве* // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, 4. – С. 500–502.

Сергій Грищук

“Аналітичні” функції у комплексних алгебрах другого рангу, асоційовані з рівняннями для знаходження функцій напружень при певних ортотропіях

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: serhii.gryshchuk@gmail.com, gryshchuk@imath.kiev.ua

Серед двовимірних алгебр другого рангу з одиницею e над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ знайдено (єдину) алгебру $\mathbb{B}_0 = \{c_1 e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1,2\}, \omega^2 = e$, що містить базиси (e_1, e_2), такі, що $\mathcal{L}_p(e_1, e_2) := e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ для кожного фіксованого $p > 1$.

Здійснено опис множини $\mathcal{B}_p := \{(e_1, e_2)\}$ у явному вигляді.

Побудовано $\mathbb{B}_0$-значні “аналітичні” функції $\Phi\colon \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}, (e_1, e_2) \in \mathcal{B}_p, e_1 = e\} \longrightarrow \mathbb{B}_0$, такі, що

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\Phi(\zeta) = \mathcal{L}_p(e_1, e_2)\Phi^{(4)}(\zeta) \equiv 0,$$

де $\mathbb{R}$ є множиною дійсних чисел, $\Phi^{(4)}$ — відповідна похідна четвертого порядку для функції Φ.

Дійснозначні компоненти U_k, $k = \overline{1,4}$, функції $\Phi(\zeta) = U_1(x,y)\, e_1 + U_2(x,y)\, ie_1 + U_3(x,y)\, e_2 + U_4(x,y)\, ie_2$ задовольняють рівняння для знаходження функції напружень u у випадку плоских ортотропних деформацій: $u(x,y) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u(x,y) = 0$, де x, y — дійсні змінні. Знайдено клас узагальнених законів Гука [2] (конкретні випадки плоскої ортотропії) у явному вигляді, що відповідає даному рівнянню для знаходження функції напружень u.

Робота частково підтримана грантом Міністерства Освіти і Науки України (проект № 0116U001528).

[1] Грищук С. В. *Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I* // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 8. – С. 1058 – 1071 (у друці).

[2] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.

Іван Грод

Про регулярність лінійних розширень динамічних систем на многовидах

Тернопільський національний педагогічний університет імені
Володимира Гнатюка, Україна
E-mail: igrod@ukr.net

Одним з важливих питань в якісній теорії диференціальних рівнянь є знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях [1]. Ця задача тісно пов'язана з властивостями певного виду систем лінеаризованих по частині змінних. Такі системи диференціальних рівнянь, на сьогодні, прийнято називати лінійним розширенням динамічної системи на многовидах.

Об'єктом дослідження є системи вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right), \frac{dy}{dt} = A\left(x\right)y, \tag{1}$$

де $x \in R^m$, $y \in R^n$, $f\left(x\right) = \left(f_1\left(x\right), ..., f_m\left(x\right)\right)$-вектор-функція визначена при всіх $x \in R^m$, локально задовольняє умові Ліпшица. До того ж, будемо припускати, що вектор-функція $f\left(x\right)$ задовольняє нерівності $\left\|f\left(x\right)\right\| \leq \alpha_1 \left\|x\right\| + \alpha_2$ при всіх $x \in R^m$ з деякими невід'ємними постійними α_1, α_2. Простір таких функцій $f\left(x\right)$ коротко будемо позначати через $C_{Lip}\left(R^m\right)$. Приведені припущення дозволяють стверджувати, що задача Коші$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right)$, $x|_{t=0} = x_0$ має єдиний розв'язок $x = x\left(t; x_0\right)$ для кожного фіксованого $x_0 \in R^m$ і цей розв'язок визначений при всіх $t \in R$. Матриця $A\left(x\right)$ в системі (1) є квадратною $n \times n$-вимірною, елементами якої є дійсні скалярні функції, визначені, неперервні і обмежені на R^m.

Використовуючи метод знакозмінних функцій Ляпунова, для розширень динамічних систем на многообразиях вигляду (1) досліджується питання їх регулярності [2].

[1] Yu. A. Mitropolsky, A.M. Samoilenko,V.L. Kulik, *Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems* Taylor & Francis, London – New York, 2003.

[2] Грод І.М., Кулик В.Л. , *Конструкція функцій ляпунова у вигляді пучків квадратичних форм//* Нелінійні коливання.–2018. – **21**, № 2. – С. 147 – 154.

Ніколєтта Гряділь, Микола Бокало

Мішані задачі для еліптично-параболічних рівнянь в необмежених областях без умов на нескінченності

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: nikolyetta@gmail.com; mm.bokalo@gmail.com

Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$; $\partial\Omega$ – межа Ω, причому $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \emptyset$; $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0,T)$, де $T > 0$ – довільно задане число.

Розглядаємо задачу: *знайти функцію* $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, *яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння*

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q\,, \quad (1)$$

крайові умови

$$u(x,t)\Big|_{(x,t)\in\Sigma_0} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i(x)\Big|_{(x,t)\in\Sigma_1} = 0 \quad (2)$$

та початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega_0, \quad (3)$$

де $b : \Omega \to \mathbb{R}$ *– вимірна локально обмежена функція така, що* $b(x) \geq 0$ *для майже всіх* $x \in \Omega$, $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$, $a_j : Q \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ $(j = \overline{0,n})$, $f : Q \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ *– задані дійснозначні функції.*

Розглядаємо випадок, коли рівняння (1) – анізотропне, причому показники нелінійності – змінні, наприклад, воно має вигляд

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i}\right)_{x_i} + |u|^{p_0(x)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Зробивши додаткові припущення на вихідні дані, доводимо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) без обмежень на нескінченності. При цьому використовуємо теорію узагальнених просторів Лебега та Соболєва.

Надія Гузик [1], *Оксана Бродяк* [2]

Задача з вільною межею для параболічного рівняння з довільним слабким виродженням

[1] *Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайданого, Львів, Україна*
E-mail: hryntsiv@ukr.net
[2] *Національний університет " Львівська політехніка ", Львів, Україна*
E-mail: brodyakoksana1976@gmail.com

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$, $h(t) > 0, 0 < t < T$ – невідома функція, розглядається обернена задача визначення коефіцієнтів $a = a(t), a(t) > 0, b = b(t), t \in [0,T]$ у рівнянні

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le h(0), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h(t),t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t),\ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_5(t),\ 0 \le t \le T. \tag{6}$$

Відомо, що $\psi = \psi(t)$ – монотонно зростаюча функція така, що $\psi(t) > 0,\ t \in (0,T]$ та $\psi(0) = 0$. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі (1)-(6) у випадку слабкого виродження, коли $\lim\limits_{t\to+0} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$.

Володимир Данілов, Олександр Станжицький

Асимптотична поведінка та інваріантні міри стохастичних рівнянь у нескінченномірних просторах

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: danilov-vy@ukr.net, ostanzh@gmail.com

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ повний ймовірнісний простір. Ми розглядаємо наступне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Du(t,x) + f(x, u(t,x)) + \sigma(x, u(t,x))\dot{W}(t,x). \tag{1}$$

Тут

- D еліптичний оператор у необмеженій області із $\mathbf{R}^d$.
- $u(t,\cdot) \in H$, гільбертів простір функцій, тобто

  $$H = L^2_\rho(R^d) := \{u(x) | \int_{\mathbf{R^d}} |u|^2 \rho dx < \infty\}$$

  з $\rho \in L^1(R^d)$ $\rho \geq 0$ (типово поліноміально чи експоненціально затухаюча).
- $W = W(t,\cdot) \in H$ вінеровський процес, представлений як

  $$W(t,x) := \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k} W_k(t) e_k(x),$$

  де $W_k(t)$ незалежні скалярні вінеровські процеси, e_k ортонормований базис в H, такий, що $\sup_k \|e_k\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} < \infty$.
- $a := \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ –ядерна норма W.

Ми вивчаємо асимптотичну поведінку розв'язків (1). Наша ціль:

- знайти розв'язки, що є стаціонарними процесами;
- вивчити ергодичні властивості рівняння.

Анатолій Дворник, Віктор Ткаченко

Майже періодичні розв'язки системи Лотки–Вольтерра з дифузією та імпульсною дією

Ін-т математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: a.dvornyk@gmail.com, vitk@imath.kiev.ua

Розглянуто систему Лотки–Вольтерра з дифузією

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu_1 \Delta u + u\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \mu_2 \Delta v + v\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u - c_2(t,x)v\right), \end{aligned}$$

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \neq \tau_k(u(t,.), v(t,.))$, крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

та імпульсною дією в нефіксовані моменти часу

$$\begin{aligned} &u(t+0,x) - u(t,x) = d_{1k}u(t,x) + q_{1k}, \\ &v(t+0,x) - v(t,x) = d_{2k}v(t,x) + q_{2k}, \\ &t = \tau_k(u(t,.), v(t,.)) = \theta_k + r_k \int_\Omega (u^2(\xi) + v^2(\xi))d\xi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Додатнозначні обмежені функції $a_i(t,x), b_i(t,x)$ і $c_i(t,x)$ неперервно диференційовні по $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \Omega$ та майже періодичні за Бором по t рівномірно по $x \in \Omega$. Послідовності $\{d_{1k}\}, \{d_{2k}\}, \{q_{1k}\}, \{q_{2k}\}$ та $\{r_k\}$ майже періодичні, $d_{ik} > -1,\ q_{ik} \geq 0$. Строго зростаюча послідовність дійсних чисел $\{\theta_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць $\{\theta_{k+j} - \theta_k\}, j \in \mathbb{Z}$.

Встановлено умови існування і асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків системи.

[1] Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І. *Майже періодичні розв'язки систем Лотки–Вольтерра з дифузією та імпульсною дією* // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 177–192.

[2] Дворник А. В., Ткаченко В. І. *Майже періодичні розв'язки систем Лотки–Вольтерра з дифузією та нефіксованими моментами імпульсної дії* // Нелін. колив. – 2018. – **21**, № 3. – С. 305–322.

Т. Дерев'янко, В. Кирилич, О. Пелюшкевич

Оптимальне керування гіперболічною задачею Стефана

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
$E-mail: vkyrylych@ukr.net$

В області $\Pi = \{x,\ t : (x,t) \in (0, s(t)) \times (0, +\infty),\ s(0) = l\}$, розглянуто деякий процес, еволюцію якого в часі та просторі описано системою напівлінійних гіперболічних рівнянь першого порядку з похилими та ортогональними характеристиками [1], з нелінійними початково-крайовими умовами, а рух невідомої межі визначено рівнянням

$$s'(t) = F\Big(t, s(t), y(s(t), t), u^{(2)}(t)\Big),\ \ t \in \mathrm{R}_+.$$

Цільовий функціонал має вигляд

$$J = \int\limits_0^{+\infty} G_0(y(0,t), y(s(t),t), s(t), t)dt + \iint\limits_{\Pi} G(y(x,t), x, s(t), t)dxdt.$$

Потрібно дослідити задачу

$$\min_{V_{ad}} J(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}), \tag{1}$$

де V_{ad} - множина допустимих наборів $y, s, u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$, тобто для набору керувань $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$, які є в початкових та крайових умовах, існує єдиний глобальний розв'язок (y, s) відповідної мішаної задачі.

За допомогою підходу, запропонованого в [1,2] виведено необхідні умови оптимальності для сформульованої задачі.

[1] Андрусяк Р., Кирилич В., Пелюшкевич О. *Глобальна розв'язність мішаної задачі для виродженої гіперболічної системи* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2011. – **Випуск**, 75. – С. 5-16.

[2] Derevianko T. O., Kyrylych V. M. *Problem of optimal control for a semilinear hyperbolic system of equations of the first order with infinite horizon planning* // Ukrainian Math. Jornal. – 2015. – **V**, 67. – №2. – P. 211-229.

Андрій Дорош

Нелінійні крайові задачі для диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: uefa2012@ukr.net

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1\big),\ x \in [a;b], \tag{1}$$

$$y^{(p)}\left(x\right) = \varphi^{(p)}\left(x\right),\ p = 0, 1,\ x \in \left[a^*; a\right],\ y\left(b\right) = \gamma, \tag{2}$$

де $[y(x)] = \Big(y\big(x - \tau_0(x)\big), \ldots, y\big(x - \tau_n(x)\big)\Big)$, $[y(x)]_1 = \Big(y'\big(x - \tau_0(x)\big), \ldots, y'\big(x - \tau_n(x)\big)\Big)$, запізнення $\tau_0\left(x\right) = 0$, а $\tau_i\left(x\right),\ i = \overline{1, n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi\left(x\right) \in \mathbb{C}^1[a^*; a]$ – задана функція, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0 \le i < n} \left\{ \inf_{x \in [a;b]} \left(x - \tau_i\left(x\right)\right) \right\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$:

$$E_i = \big\{x_j \in [a, b] :\ x_j - \tau_i\left(x_j\right) = a,\ j = 1, 2, \ldots\big\},\ E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Розв'язком крайової задачі (1)-(2) вважатимемо функцію $y = y\left(x\right)$, якщо вона задовольняє рівняння (1) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (2).

У даній роботі визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків у залежності від структури відхилень аргументу. Встановлено достатні умови існування розв'язку таких задач, побудовано та обґрунтовано ітераційні схеми знаходження розв'язку цих задач за допомогою апроксимації кубічними сплайнами дефекту два, досліджено збіжність ітераційного процесу [1].

[1] Cherevko I., Dorosh A. *Existence and approximation of a solution of boundary value problems for delay integro-differential equations* // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2015. – **44**, 2. – C. 154–165.

Віталій Дронь

Гладкість об'ємного потенціалу для одного класу ультрапараболічних рівнянь

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, Чернівці, Україна
E-mail: vdron@ukr.net

Нехай T – додатне число, t – одновимірна часова змінна й x – n-вимірна просторова змінна, яка складається з груп змінних $x_j := (x_{j1}, ...x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Об'єктом дослідження в цьому повідомленні є інтеграл

$$u(t, x) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

який є об'ємним потенціалом, породженим фундаментальним розв'язком задачі Коші G для виродженого $\vec{2b}$-параболічного рівняння типу Колмогорова

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{\|k_1\| \leq 2b} a_{k_1}(t) \partial_{x_1}^{k_1}\Big) u(t, x) = f(t, x), \tag{2}$$

$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}$. Тут позначено через b найменше спільне кратне деяких чисел b_1, ..., b_{n_1} з $\mathbb{N}$; $\vec{2b} := (2b_1, ..., 2b_{n_1})$; $m_j := b/b_j$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; $\|k_1\| := \sum\limits_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$ для мультиіндекса $k_1 := (k_{11}, ..., k_{1n_1}) \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$. Коефіцієнти a_{k_1}, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $\|k_1\| \leq 2b$, є неперервними комплекснозначними функціями на $[0, T]$ і такими, що диференціальний вираз $\partial_t - \sum\limits_{\|k_1\| \leq 2b} a_{k_1}(t) \partial_{x_1}^{k_1}$ рівномірно $\vec{2b}$-параболічний на $[0, T] \times \mathbb{R}^{n_1}$.

В [1] з'ясовувався зв'язок гельдерівських властивостей і поведінки при $|x| \to \infty$ густини f і об'ємного потенціалу u та його похідних. Тепер уточнено гельдерівські показники, при яких зберігається відповідна гладкість функції (1).

[1] Дронь В.С., Івасишен С.Д. *Властивості об'ємного потенціалу для вироджених $\vec{2b}$-параболічних рівнянь типу Колмогорова* // Буков. мат. журн. – 2017. – **5**, 1–2. – С. 80-86.

В'ячеслав Євтухов, Анастасія Дрожжина

Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: emden@farlep.net, Drozhzhina221b@gmail.com

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{1}$$

де $n \geq 2$, $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \cdots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ - неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_k дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_k}- деякий однобічний окіл Y_k, k=0,1,. . . ,n-1.

Означення. *Розв'язок y рівняння (1), що визначений на проміжку* $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, *називається* $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*- резв'язком, де* $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, *якщо він задовольняє наступні умови*

$$y^{(k)}(t) \in \Delta_{Y_k} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \to \omega} y^{(k)}(t) = Y_k \ (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\lim_{t \to \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0.$$

При деяких умовах на функцію f встановлюються ознаки існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$- розв'язків у випадках, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Одержані результати є узагальненням результатів, що раніше були отримані в роботах [1], [2].

[1] Евтухов В.М., Клопот А.М. *Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями*// Дифференц. уравнения. – 2014. –**50**, 5. С. 584-600.

[2] Евтухов В.М., Кусик Л.И. *Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка*// Дифференц. уравнения. – 2013. – **49**, 4. С. 424-438.

Валерій Журавльов

Розв'язок інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром у банахових просторах

Житомирський національний агроекологічний університет,
м. Житомир, Україна
E-mail: vfz2008@ukr.net

У доповіді пропонується інший підхід, ніж у [1], до дослідження умов розв'язності та побудови загального розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах. Специфіка цієї задачі полягає в тому, що інтегро-диференціальний оператор не має оберненого.

Рзглядається інтегро-дифференціальне рівняння

$$z(t) - M(t) \int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big] ds = f(t), \tag{1}$$

де оператор-функція $M(t)$ діє з банахового простору $\mathbf{B}_2$ у банахів простір $\mathbf{B}_1$, сильно неперервна з нормою $|||M||| = \sup\limits_{t \in \mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_2} = M_0 < \infty$, а оператор-функції $W(t)$ и $V(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банахів простір $\mathbf{B}_2$, сильно непрервні з нормами $|||W||| = \sup\limits_{t \in \mathcal{I}} \|W(t)\|_{\mathbf{B}_1} = W_0 < \infty$ та $|||V||| = \sup\limits_{t \in \mathcal{I}} \|V(t)\|_{\mathbf{B}_1} = V_0 < \infty$, вектор-функція $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахів простір неперервних на $[a, b]$ вектор-функцій зі значеннями у $\mathbf{B}_1$.

Із застосованням теорії узагальненого обернення операторів у банахових просторах [2], отримано необхідні та достатні умови розв'язності та побудовано загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (1).

[1] Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А. *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром* // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, 11. – С. 1576 – 1579.

[2] Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Покутный А. А. *Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве* // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, 2. – С. 163 – 174.

Степан Івасишен

До історії розвитку теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними в Чернівецькому університеті

Національний технічний університет України "КПІ ім. Ігоря Сікорського" , Київ, Україна
E-mail: ivasyshen.sd@gmail.com

Інтенсивні дослідження диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) в Чернівецькому університеті розпочалися після ствоення у 1946 р. кафедри диференціальних рівнянь, першим завідувачем якої був М. І. Симонов, учень академіка І. Г. Петровського. Він прибув із Москви і привніс у Чернівці ідеї та напрямки досліджень у теорії ДРЧП, які проводилися московськими математиками під керівництвом І. Г. Петровського. Цими ідеями, їх реалізацією і розвитком захопився випускник Чернівецького університету 1948 р. С. Д. Ейдельман. Його послідовна й наполеглива індивідуальна наукова робота, робота із викладання студентам і викладачам новітніх навчальних дисциплін з теорії ДРЧП і його діяльність із залучення студентської молоді до серйозних математичних досліджень за порівняно короткий час принесла свої позитивні плоди. Нові важливі результати з теорії ДРЧП чернівецьких математиків поступово стали визнаватися спеціалістами в колишньому Радянському Союзі та за його межами.

У доповіді наводиться інформація про напрями та результати досліджень у галузі ДРЧП широко відомої Чернівецької наукової школи, створеної професором С. Д. Ейдельманом.

Галина Івасюк, Тоня Фратавчан

Про властивості прямих та спряжених операторів Гріна задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: h.ivasjuk@chnu.edu.ua, t.fratavchan@chnu.edu.ua

Розглядається задача Коші для параболічної за Ейдельманом системи N диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$\Big(I_N\partial_t - \sum_{\|\alpha\|\le 2b} A_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha\Big)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_T, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \ x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де n, N, b_1, $\ldots$, b_n– задані натуральні числа, I_N – одинична матриця порядку N, b – найменше спільне кратне чисел b_1, $\ldots$, b_n; $m := (m_1,\ldots,m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := b/b_j$, $j\in\{1,\ldots,n\}$; $\|\alpha\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$; $\Pi_T := \{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}\,|t\in(0,T], x\in\mathbb{R}^n\}$, $\overline{\Pi_T}$ – замикання Π_T, T – задане додатне число.

Припускається, що система диференціальних рівнянь (1) є рівномірно параболічна за Ейдельманом у шарі $\overline{\Pi_T}$, а її коефіцієнти обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера за x, неперервні за t, при цьому неперервність за t коефіцієнтів A_α, $\|\alpha\| = 2b$, рівномірна стосовно $x\in\mathbb{R}^n$.

Побудовано прямі та спряжені оператори Гріна задачі (1), (2), встановлена їх обмежена дія в позитивних просторах Гельдера спеціально підібраних зростаючих і спадних на нескінченності функцій.

За допомогою спряжених операторів вводяться відповідні негативні простори Гельдера та доводиться теорема про коректну розв'язність задачі Коші в таких просторах.

Світлана Іліка, Лариса Піддубна

Про збереження стійкості лінійних систем із запізненням

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: ilika.svitlana@gmail.com, laranpidd@gmail.com

Розглядається система диференціальних рівнянь із запізненням

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \tag{1}$$

де A, B - матриці розмірності $n \times n, x \in R, \tau > 0$.

За схемою Красовського-Рєпіна [1-2] системі (1) ставимо у відповідність апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{array}{l} y_0'(t) = Ay_0(t) + By_m(t), \\ y_j'(t) = \mu(y_{j-1}(t) - y_j(t)), j = \overline{1, m}, m \in N, \mu = \frac{m}{\tau}. \end{array} \tag{2}$$

Відомо [3], що сійкість системи (1) еквівалентна при великих m стійкості системи(2). Для характеристичного многочлена системи (2) має місце рівність

$$D_m(\lambda) = det(\lambda E - A - B(\frac{\lambda}{\mu + \lambda})^m)(\mu + \lambda)^{mn}, \tag{3}$$

а для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій

$$\psi_m(\lambda) = \frac{D_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}}, m \in N \tag{4}$$

збігається до квазіполінома системи (1) при $m \to \infty$.

Згідно рівності (4), нулі функції D_m можна брати в якості наближених значень неасимптотичних нулів квазіполінома системи (1). Це дозволяє оцінити верхню межу запізнення при якому зберігається стійкість лінійних диференціальних рівнянь із запізненням[1].

[1] О. В. Матвій, С. А. Пернай, І. М. Черевко. *Про стійкість лінійних систем із запізненням* // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2008. – **Вип. 421 : Математика.** С. 66–70.

[2] Репин Ю. М. *О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями.* – ПММ. – 1965. – **29**, №2. – С. 226–245.

[3] Черевко І.М., Матвій О.В. *Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість*// Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, №2. – С. 208–216.

Володимир Ільків [1], *Петро Каленюк* [1],
Зіновій Нитребич [1], *Михайло Симотюк* [2]

Міра та розмірність Гаусдорфа виняткових множин у задачах з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними

[1] *Національний університет «Львівська політехніка», Львів*
E-mail: ilkivv@i.ua, pkalenyuk@gmail.com, znytrebych@gmail.com
[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім.Я.С.Підстригача НАН України, Львів
E-mail: quaternion@ukr.net

Нехай $g_{q,j}(t,k)$, $q = 1,2$, $j = 1,\dots,n$, – розв'язок задачі Коші

$$g_{q,j}^{(n)}(t,k) + \sum_{r=0}^{n-1} A_{q,r}(k) g_{q,j}^{(r)}(t,k) = 0,\ g_{q,j}^{(r-1)}(0,k) = \delta_{j,r},\ r = 1,\dots,n,$$

де $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $A_{q,j}(k)$ – многочлен степеня $N_{q,j}$, $\delta_{j,r}$ – символ Кронекера; $\Delta(k,t_1) = \det \left\| \int_0^{t_1} g_{1,j}(t,k) g_{2,q}(t,k)dt \right\|_{j,q=1}^{n}$. При дослідженні задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними важливо з'ясувати питання про виконання нерівності

$$|\Delta(k,t_1)| \geq (1+|k|)^{-\omega} \exp(-\delta|k|^{\gamma}),\ \ |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|. \tag{1}$$

Буде подано такий результат: для кожного $\rho \in (0,1]$ існують такі значення $\omega_0(\rho), \delta_0(\rho), \gamma_0(\rho)$, що для всіх $\omega > \omega_0(\rho)$, $\delta \geq \delta_0(\rho)$, $\gamma \geq \gamma_0(\rho)$ множина тих $t_1 \in (0,T]$, $T > 0$, для яких нерівність, протилежна до (1), виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ (цю множину позначимо через $M_{\omega,\delta}^{\gamma}(0,T]$ і називатимемо винятковою), має нульову ρ-міру Гаусдорфа; будуть вказані межі для показників ω, δ, γ, для яких множина $M_{\omega,\delta}^{\gamma}(0,T]$ має нульову розмірність Гаусдорфа. Цей результат доповнює отримані в [1, 2] результати.

[1] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.* – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[2] Медвідь О.М., Симотюк М.М. Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними. *Мат. Студії*, 2007. – Т. 28, № 2. – С. 115–140.

Тетяна Касіренко, Ірина Чепурухіна

Про узагальнені соболєвські простори на многовидах

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
kasirenko@imath.kiev.ua, Chepurukhina@gmail.com

Уведено і досліджено розширену соболєвську шкалу (р.с.ш.) на довільному C^{∞}-многовиді $\overline{M}$ з краєм. Вона складається з гільбертових узагальнених соболєвських просторів $H^{\varphi}(M)$, для яких показником регулярності служить довільна вимірна за Борелем функція $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, яка є RO-змінною на ∞ за Авакумовичем; тут $M := \overline{M} \setminus \partial\overline{M}$. Простір $H^{\varphi}(M)$ означається на основі простору $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) = \{w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\}$ за допомогою локальних карт і відповідного C^{∞}-розбиття одиниці на $\overline{M}$; тут $n := \dim \overline{M}$, $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\widehat{w}$ — перетворення Фур'є w. Якщо $\varphi(t) \equiv t^s$, то $H^{\varphi}(M)$ — простір Соболєва $H^{(s)}(M)$ порядку $s \in \mathbb{R}$.

Р.с.ш. на $\overline{M}$ має такі властивості:

— кожний простір $H^{\varphi}(M)$ не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на $\overline{M}$;

— кожний простір $H^{\varphi}(M)$ отримується в результаті інтерполяції з деяким функціональними параметром пари соболєвських просторів $H^{(s_0)}(M)$ і $H^{(s_1)}(M)$, де $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$, а $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижнім і верхнім індексом Матушевської функції φ;

— ця шкала замкнена відносно інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів;

— вона складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва $H^{(s_0)}(M)$ і $H^{(s_1)}(M)$, де $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$.

Запропоновано застосування р.с.ш. до еліптичних крайових задач (ЕКЗ) на M. Доведено, що вони є нетеровими на відповідних парах просторів, що належать до р.с.ш. У термінах просторів $H^{\varphi}(M)$ отримано точну інтегральну умову на φ, за якою узагальнені розв'язки ЕКЗ належать до $C^k(\overline{M})$, де ціле $k \geq 0$.

Ці результати отримано спільно з О. О. Мурачем [1].

[1] *Касіренко Т. М., Мурач О. О., Чепурухіна І. С.* Узагальнені соболєвські простори на многовидах та їх застосування // Доповіді НАН України (прийнято до друку).

Іван Клевчук

Існування та стійкість біжучих хвиль у параболічних системах із малою дифузією

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: i.klevchuk@chnu.edu.ua

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть виникати складні просторові структури. У системах нелінійних гіперболічних рівнянь досліджено існування зліченного числа циклів, а у системах параболічних рівнянь з малою дифузією – існування як завгодно великої кількості циклів (феномен буферності) [1, 2].

Розглядається рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta) u \right] + (d_0 + ic_0) u^2 \overline{u} \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр.

Теорема 1 *Нехай* $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ *і для деякого цілого* n *виконується нерівність* $\alpha > \gamma n^2$. *Тоді знайдеться таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *задача (1), (2) має періодичні відносно* t *розв'язки*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon) t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова $(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2$ *при всіх* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

[1] Klevchuk I.I. *Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument* // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, 3. – P. 341–349.

[2] Klevchuk I.I. *Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion* // J. Math. Sci. – 2017. – **226**, 3. – P. 285–295.

Наталія Колун

Диференціальні рівняння другого порядку з нелінійностями різного типу

Військова академія, Одеса, Україна
E-mail: nataliiakolun@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1}$$

в якому $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1, m})$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, m})$ – неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$; $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, m})$, де Δ_{Y_0} - однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є неперервними функціями при $i = \overline{1, l}$ і двічі неперервно диференційовними при $i = \overline{l+1, m}$, причому для кожного $i \in \{1, ..., l\}$ при деякому $\sigma_i \in \mathbb{R}$ виконуються умови

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i} \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0,$$

а для кожного $i \in \{l + 1, ..., m\}$ –

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \;\; \text{при} \;\; y \in \Delta_{Y_0}, \;\; \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\}, \;\; \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi'^2_i(y)} = 1.$$

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Отримано необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків y диференціального рівняння (1), а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

Катерина Корепанова

Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь n–го порядку з правильно змінними нелінійностями

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: ye.korepanova@gmail.com

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}) \tag{1}$$

в якому $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ — неперевна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, ΔY_j — деякий однобічний окіл точки Y_j, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}$, $j = \overline{0, n-1}$.

В роботі [1] розглянуто випадки, коли необхідні та достатні умови існування розв'язків рівняння (1), для кожного з яких існує $k \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $(n-k)$–а похідна розв'язку прямує до відмінної від нуля сталої при $t \to +\infty$, можна отримати без додаткових обмежень на ці розв'язки.

У доповіді мова буде йти про всі інші випадки, коли для диференціального рівняння (1) вводиться клас так званих $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків, $k \in \{3, \ldots, n\}$, $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$. За своїми асимптотичними властивостями множина всіх $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків розпадається на $k+1$ ($k \in \{3, \ldots, n\}$) неперетинних підмножин. Для кожної з підмножин значень параметру λ_0 окремо розроблено методику дослідження асимптотичної при $t \to +\infty$ поведінки $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків. Встановлено асимптотичні формули при $t \to +\infty$ для $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків рівняння (1), а також отримано необхідні та достатні умови існування таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Вирішено питання про кількість розв'язків зі знайденими асимптотичними зображеннями.

[1] Евтухов В.М., Корепанова Е.С., *Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями* // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 9. – С. 1198–1216.

Ігор Король, Галина Семчишин

Інтегрування багатоточкових крайових задач для вироджених диференціальних систем

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна
E-mail: korol.ihor@gmail.com, Halyna_Semchyshyn@ukr.net

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$J\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t,y), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

підпорядкованих багатоточковим крайовим умовам

$$A_1y(a) + A_2y(t_2) + \ldots + A_{p-1}y(t_{p-1}) + A_py(b) = d, \tag{2}$$

де J – n-вимірна клітка Жордана, яка відповідає нульовому власному значенню, $A(t)=(a_{i,j}(t))_{i,j=1}^{n}$ – $(n\times n)$-вимірна матриця, $a_{i,j}(t)\in C[0,T]$, $f(t,y)$ – n-вимірна вектор-функція, $f(t,y)\in C[0,T]$; $A_1,\ldots,A_p$ – $((n-1)\times n)$-вимірні сталі матриці, $a=t_1<t_2<\ldots<t_p=b$, d – $(n-1)$-вимірний сталий вектор.

Для таких крайових задач у припущені, що $f_n(t,y) = f_n(t,y_2,\ldots,y_n)$ та $a_{n,1}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$, обґрунтовується можливість застосування чисельно-аналітичного методу для дослідження існування та наближеної побудов розв'язків у критичному випадку.

[1] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.* — К.: Вища школа., 2000. — 294 с.

[2] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.*Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.* — К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 294 с.

Василь Кравець, Наталя Сосницька

Застосування методу усереднення для дослідження коливних режимів функціонально-диференціальних рівнянь

Таврійський державний агротехнічний університет, м. Мелітополь, Україна
E-mail: v_i_kravets@ukr.net, nsosnickaya19@gmail.com

У роботі розглянуто багаточастотну систему диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon a(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega(x) + \varepsilon b(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \tag{1}$$

де x–n-мірний, а φ–m-мірний вектори, ε– малий параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 < \Delta$– стала, яка характеризує запізнення, $x_\Delta(t, \varepsilon) = x(t - \Delta, \varepsilon)$, $\varphi_\Delta(t, \varepsilon) = \varphi(t - \Delta, \varepsilon)$; вектор-функції $a(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta)$, $b(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta)$ і $\omega(x)$ визначені, достатньо гладкі і 2π-періодичні за змінними φ, φ_Δ в області $G = D \times R^m$, D–обмежена область в R^n. Багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь досліджувались в $[1, 2]$, випадок, коли $a = a_1(x, x_\Delta, \varphi) + a_2(x, x_\Delta, \varphi_\Delta)$ розглянутий в [3]. Відповідна системі (1) усереднена за швидкими змінними система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon a_0(\overline{x}), \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \omega(\overline{x}) + \varepsilon b_0(\overline{x}), \tag{2}$$

$$a_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int\limits_0^{2\pi} a(x, x, \varphi, \psi) d\varphi d\psi.$$

Нехай праві частини системи (1) і (2) задовольняють умови:

1) частинні похідні вектор-функцій a і b за змінними φ, φ_Δ до порядку l, $l > 2m + 1$, обмежені в області G;

2) вектор-функція ω обмежена разом із частинними похідними до другого порядку;

3) існує розв'язок усередненої системи (2), $\overline{x}(0) = x(0) = x_0$, який лежить в області D разом із деяким ρ-околом;

4) виконуються нерівності

$$\Big|\frac{\partial(k, \omega(x))}{\partial x}, a_0(x)\Big| \geq \sigma_1 > 0,$$

$$\sum_{\|k\| \geq 0} \Big|\frac{\partial a_k^{(i)}(x, x)}{\partial x_j}\Big| \leq \sigma_2; i, j = \overline{1, n}.$$

Тоді правильне наступне твердження.

Теорема 1 *Нехай система (1) при* $1 \leq \|k\| \leq N$ *має ізольовані резонанси і виконуються умови 1)–4). Тоді існує таке* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$, *що при всіх* $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, *справджується нерівність;*

$$\|x(t,\varepsilon) - \overline{x}(\varepsilon t)\| \leq c\varepsilon^{\frac{l-2m-1}{1+2(l-2m)}},$$

де $c > 0$ *і не залежить від* ε, $\overline{x}(\varepsilon t)$*– розв'язок усередненої системи,* $x(0,\varepsilon) = \overline{x}(0)$.

[1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.* – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

[2] Бигун Я.И., Фодчук В.И. *Применение метода усреднения для исследования одного класса многочастотных систем с запаздыванием* // Укр. мат. журнал – 1980. – **32**, №2. – С. 149–154.

[3] 3. Голец Б.И., Голец В.Л., Петришин Р.И. *Об усреднении в колебательных системах проходящих через резонанс* // Укр. мат. журнал – 1980. – **32**, №2. – С. 448–455.

Людмила Кусік

Про асимптотику $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язків одного рівняння другого порядку

Одеський національний морський університет, Одеса, Україна
E-mail: lk09032017@gmail.com

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

де $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} $(i \in \{0, 1\})$ - однобічний окіл Y_i, $Y_i \in \{0, \pm\infty\})$. Для рівняння (1) вивчаємо питання існування та асимптотики (при $t \uparrow \omega$) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язків.

Означення. Розв'язок y рівняння (1), що визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називаємо $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо виконані наступні умови

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \qquad \text{при } \ t \in [t_0, \omega[\ , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t) y''(t)} = \lambda_0.$$

При $\lambda_0 \in R \setminus \{0, 1\}$ знайдено умову (т.з. умова $(AL)_{\lambda_0}$) виконання якої на кожному $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язку гарантує зображення

$$f(t, y(t), y'(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y(t)) \varphi_1(y'(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- неперевна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$- неперервні правильно змінні при $y^{(i)} \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ функції порядків σ_i $(i = 0, 1)$, такі, що $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$.

В припущенні виконання умови $(AL)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 \in R \setminus \{0, 1\}$ встановлено необхідні, а також достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язків рівняння (1), вказано асимптотичні зображення таких розв'язків, з'ясовано кількість сімей цих розв'язків.

Андрій Лопушанський [1], *Галина Лопушанська* [2]

Визначення компоненти правої частини з простору розподілів типу Шварца у дифузійно-хвильовому рівнянні з дробовою похідною

[1] *Жешувський університет, Жешув, Польща*
E-mail: alopushanskyj@gmail.com
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*
E-mail:lhp@ukr.net

Нехай $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадаючих на безмежності нескінченно диференційовних функцій, $S_\gamma(\mathbb{R}^n)$ $(\gamma > 0)$ – простір типу $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [1, c. 201], $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_{\alpha,\delta}(v) e^{-(a-\delta)|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\alpha,\ \forall\ \delta > 0\}$, $\mathcal{S}(\bar{Q})$ $(\mathcal{S}_\gamma(\bar{Q}),\ \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}))$ – простір функцій $v \in C^\infty(\bar{Q})$ таких, що $(\frac{\partial}{\partial t})^s v(\cdot,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $(\mathcal{S}_\gamma(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}))$ для всіх $t \in [0,T]$, $s \in \mathbb{Z}_+$ і $(\frac{\partial}{\partial t})^s v(x,T) = 0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, E' – простір лінійних неперервних функціоналів (розподілів) на E, (f,φ) – значення розподілу $f \in E'$ на основній функції $\varphi \in E$, $S'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) = \{f \in S'_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) :\ \big(f(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) \in C[0,T] \quad \forall\varphi \in S_\gamma(\bar{Q})\}$.

При $\beta \in (m-1,m)$, $m = 1,2$ вивчаємо задачу Коші ((1), (2)) і обернену задачу

$$D_t^\beta u - \Delta u = F_0(x)g(t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} u(x,0) = F_j(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^T \big(u(x,t),\varphi(x)\big)\eta_0(t)dt = (F,\varphi) \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}_\gamma(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

визначення пари $(u,F_0) \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) \times \mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ при заданих регулярних g, η_0 і розподілах $F, F_j (j = \overline{1,m})$ типу Шварца у правих частинах. Знаходимо достатні умови однозначної розв'язності задач.

[1] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций. Т.2..* – Москва: Гостехиздат, 1958.

Володимир Лучко, Вікторія Лучко

Двоточкова крайова задача для параболічного рівняння з оператором Ейлера

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Україна
E-mail:vmluchko@gmail.com

В області $Q = (0, T) \times (0, \infty)$ розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A_2 x^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + A_1 x \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + A_0 u(t,x) + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0} - \mu u(t,x)|_{T=0} = \varphi(x), \qquad (2)$$

тут функції $\varphi(x)$ та $f(t,x)$ відомі, які апріорі допускають перетворення Фур'є, $A_j = const$, $j = 1, 2, 3$.

Теорема. *Нехай рівняння (1) параболічне, тобто* $A_2 > 0$, $|\mu| < 1$ *та виконуються умови:*

а) якщо початкова функція неперервна і обмежена $\varphi \in \mathcal{C}(0,\infty)$, *неоднорідність рівняння задовольняє рівномірну умову Гельдера, то розв'язок задачі (1)–(2) існує та единий в області* Q *і для його похідних правильні оцінки*

$$\left| |x|^m t^{\frac{|m|}{2}} D_x^{|m|} u(t,x) \right| \le c \left(|\varphi|_{\mathcal{C}} + x^\alpha t^{\frac{\alpha+m}{2}} |f|_\alpha \right), \quad m = 1, 2;$$

б) якщо початкова функція та неоднорідність рівняння задовольняє рівномірну умову Гельдера, то розв'язок задачі (1)–(2) існує та єдиний в області Q *і для його похідних правильні оцінки*

$$\left| |x|^{m-\alpha} t^{\frac{|m|-\alpha}{2}} D_x^{|m|} u(t,x) \right| \le c \left(|\varphi|_\alpha + t^{\frac{m}{2}} |f|_\alpha \right), \quad m = 1, 2;$$

в) якщо початкова функція задовольняє нерівність $|\varphi(x)| \le e^{a \ln^2 x} |\varphi|_\alpha$, *при* $x \to \infty$, a *– деяка додатна константа, неоднорідність рівняння задовольняє нерівномірну умову Гельдера*

$$|f(t,\beta) - f(t,\eta)| \le L_0 |\beta - \eta|^\alpha |f|_\alpha \left[e^{k(t)\ln^2 \beta} + e^{k(t)\ln^2 \eta} \right], \quad 0 < \alpha \le 1,$$

де $k(t) = \frac{a(c-\varepsilon)}{c-at}$, *то розв'язок задачі (1),(2) існує та единий в області* $Q = (0, t_1) \times (0, \infty)$, *де* $t_1 = \frac{c}{a}$ *і для похідних розв'язку правильні оцінки*

$$\left| |x|^m D_x^{|m|} u(t,x) \right| \le c e^{k(t)\ln^2 x} \left(t^{-\frac{|m|}{2}} \frac{1}{\sqrt{c-at}} |\varphi|_\alpha + x^\alpha t^{\frac{\alpha}{2}} |f|_\alpha \right),$$

$m = 1, 2$.

[1] I. Dimovski A transform approach to operational calculus for the general Bessel-type differential operator. C.R. Acad. Bulgare Sci. 27, No 2 (1974), P.155-158.

[2] I. Dimovski, V.Hristov, M.Sifi Mean-periodic solutions of Euler differential equations. In: Proc. 16-th Colloq. of Tunisian Math. Soc., Sousse, March 2008.

Ганна Малицька, Іван Буртняк

Функція Гріна для одного класу ультрапараболічних систем

ДВНЗ Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
bvanya@meta.ua

Роглянуто задачу побудови фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для ультрапараболічних систем

$$(\partial_t-\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ji}\partial_{x_{j+1i}})u_\mu(t,R)=\sum_{|k|\le 2b}\sum_{\nu=1}^{n_0}a_k^{\nu\mu}(t,R)D_{x_1}^k u_\nu(t,R), \qquad (1)$$

де $\mu=\overline{1,n_0}$, $n_1\ge n_2\ge n_3\ge n_4$, $R=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $x_j\in\mathbb{R}^{n_j}, n_j\in\mathbb{N}, j=\overline{1,4}$, $\sum\limits_{j=1}^{4}n_j=n$, $n_0\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}$. Оператор $\partial_t-\sum\limits_{|k|=2b}a_k(t,R)D_{x_1}^k$ - рівномірно параболічний за І.Г. Петровським в $\Pi=\{[0,T]\times\mathbb{R}^n\}$, $a_k(t,R)=(a_k^{\nu\mu})_{\mu\nu=1}^{n_0}$. Припустимо, що 1)$a_k(t,R),\partial_{x_j}a_k(t,R), j=\overline{1,4}$,- неперервні, обмежені в Π; 2) існують сталі $c_1>0,\alpha\in(0,1],r\in(0,1]$ такі, що для будь-яких $R,S\in\Pi, S=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ виконуються нерівності: $|a_k(t,R)-a_k(t,S)|\le c_1|x_1-\xi_1|^\alpha$, $|\partial_{x_j}a_k(t,R)-\partial_{x_j}a_k(t,S)|\le c_1|R-S|^r$; 3) Матриця $(a_k^{\nu\mu})_{\mu\nu=1}^{n_0}$ на характеристиках оператора

$\partial_t-\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=1}^{n_j}x_j\partial_{x_{j+1}}$ задовольняє умови Лаппо-Данилевського.

Теорема 1 *Якщо виконуються умови 1-3 то* (1) *має ФМРЗК* $G(t,R;\tau,S)$ *та справджуються оцінки* $|\partial_{x_j}^{m_j}G(t,R;\tau,S)|\le A\times$ $\times(t-\tau)^{-(\sum\limits_{l=1}^{4}((l-1)2b+1)n_l+m_j((j-1)2b+1))/2b}\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^k\Gamma(1+\frac{k\alpha}{2b})\Gamma(\frac{\alpha}{2b})\Gamma^{-1}(1+\frac{(k+1)\alpha}{2b})$ $\exp\{-c\rho-2^{-3qk}c(\rho_1+\rho_2+\rho_3)\}$, *де* $\rho=(|x_1-\xi_1|(t-\tau)^{-1/2b})^q$, $\rho_1=(|x_2-\xi_2+x_1(t-\tau)|(t-\tau)^{-1-1/2b})^q$, $\rho_2=(|x_3-\xi_3+x_2(t-\tau)+2^{-1}x_1(t-\tau)^2|(t-\tau)^{-2-1/2b})^q$, $\rho_3=(|x_4-\xi_4+x_3(t-\tau)+2^{-1}x_2(t-\tau)^2+6^{-1}x_1(t-\tau)^3|(t-\tau)^{-3-1/2b})^q$. *Сталі* A_{m_j}, c *залежать від* $n, 2b, \alpha, r$ *та сталої параболічності* δ.

Катерина Мамса [1], *Юрій Перестюк* [2]

Розривні цикли однієї імпульсної системи

Розглядається осцилятор під дією імпульсної сили

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \qquad \dot{x} \neq 0,$$

$$\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \alpha x, \qquad \alpha < 0.$$

В лінійному випадку (коли $\varepsilon = 0$) при певному значенні коефіцієнта $\alpha = \alpha^*$ всі розв'язки такого рівняння є періодичними, а траекторією кожного з них є двоімпульсний розривний цикл.

Запровадивши змінні (a, φ) за формулами

$$x = acos\varphi, \dot{x} = a(-\frac{\delta}{2}cos\varphi + \Omega sin\varphi), \Omega^2 = \omega^2 - \frac{\delta^2}{4}, \quad \text{дістаємо систему рівнянь}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta}{2}a + \frac{\varepsilon}{\Omega}f(acos\varphi, a(-\frac{\delta}{2}cos\varphi + \Omega sin\varphi))sin\varphi, \quad tg\varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega}f(acos\varphi, a(-\frac{\delta}{2}cos\varphi + \Omega sin\varphi))cos\varphi$$

$$a^+|_{tg\frac{\delta}{2\Omega}} = a\frac{cos\varphi_0}{cos\varphi^*}, \qquad \varphi^+|_{tg\varphi=\frac{\delta}{2\Omega}} = \varphi + \varphi^* - \varphi_0$$

$$\text{де} \qquad \varphi_0 = arctg\frac{\delta}{2\Omega}, \qquad \varphi^* = arctg\frac{\alpha^* + \frac{\delta}{2}}{\Omega}$$

Для цієї системи встановлені достатні умови на функцію $f(x, \dot{x})$, що забезпечують при малих значеннях параметра ε існування в ній єдиного асимптотично стійкого двоімпульсниго розривного циклу.

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* – -М.: Наука, 1974. – 502 с.

[2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Impulsive Diferential Equations.* – Singapore.: world Scientific, 1995. – 472 p.

[3] Perestyuk Yu. *Discontinuous oscilations in one impulsive system* // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 194., No.4 – Pp. 494-503.

Михайло Матійчук

Про задачі для фрактальних і псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: perungm@ukr.net

Задачі з дробовими похідними, диференціальними і псевдодиференціальними операторами виникають при моделюванні різних процесів і явищ та були предметом досліджень вітчизняних і зарубіжних математиків.

1. У області $\Pi = (0, \infty) \times B_n$ розглядається задача Коші з дробовою похідною Капуто порядку $\alpha \in \left(1, 1 + \dfrac{1}{2b-1}\right)$ за змінною t і порядку $2b$ за $x \in \mathbb{R}_n$

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = \sum_{|k| \leq 2b} A_k(x) \mathcal{D}_x^k u + f(t, x), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u'_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{2}$$

2. Задача Коші для псевдодиференціального рівняння

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = \mathrm{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left[\left(-u_\gamma(\sigma) + \sum_{k_0\gamma+\nu<\alpha\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma) u_t^{(k_0)}\right) \mathrm{F}_{x\to\sigma} u\right] + f(t, x), \tag{3}$$

де $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma > 1$, F_f, F_σ – оператори Фур'є.

3. Задача про коливання сили струму і напруги

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = \Delta_x u + a_1 u'_t + a_0 u + f(t, x), \tag{4}$$

$\alpha \in (1, 2)$ з умовами (2).

4. Задачі Діріхле і Неймана для півпростору до рівняння (4) з $a_1 = 0$, $\alpha \in (0, 1)$.

Розв'язки задач зображаються з допомогою функцій Гріна і оцінюються в нормованих просторах Діні.

[1] Матійчук М.І. *Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними* // Буковинський математичний журнал. – 2017. – **5**, 3-4. – С. 122-131.

Ігор Мединський [1], *Степан Івасишен* [2]

Про побудову та оцінки класичного фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова

[1] *Національний університет "Львівська Політехніка", Львів, Україна*
E-mail: i.p.medynsky@gmail.com
[2] *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна*
E-mail: ivasyshen.sd@gmail.com

Нехай n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної основної змінної x_1 та n_2-вимірної x_2 і n_3-вимірної x_3 змінних виродження, $n_1 \geq n_2 \geq n_3$.

Розглядається ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова вигляду

$$\Bigg(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} - a_0(t,x)\Bigg) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Запропоновано умови на коефіцієнти рівняння (1), за яких новою модифікацією класичного методу Леві побудовано класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші Z та одержано точні оцінки Z і його похідних. Випадок, коли змінна x_3 відсутня, тобто є лише одна група змінних виродження, розглянуто в праці [1]. Про модифікований метод Леві описано в статті [2].

[1] Івасишен С.Д., Мединський І.П. *Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. –2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.

[2] Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. *On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations* // Математичні студії. –2017. – **47**, № 1. – С. 33–46.

Лілія Мельничук

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: l.melnuchuk@chnu.edu.ua

Нехай $\{n,k,l,m\} \subset \mathbb{N}$, $l \le k \le n$; $\mathbb{R}^m_+ \equiv \{z \equiv (z_1,...,z_m)|z_i > 0, i \in \{1,...,m\}\}$. Розглядається задача Коші для ультрапараболічного рівняння 2-го порядку

$$\partial_t u(t,x,y,z) = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j} u(t,x,y,z) + \sum_{j=1}^{k} \partial_{x_j}(x_j u(t,x,y,z)) + \sum_{j=1}^{l} x_j \partial_{y_j} u(t,x,y,z) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} B_{z_j} u(t,x,y,z),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^l,\ z\in\mathbb{R}^m_+, \tag{1}$$

$$u(t,x,y,z)|_{t=0} = \varphi(x,y,z),\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^l,\ z\in\mathbb{R}^m_+, \tag{2}$$

$$\partial_{z_j} u(t,x,y,z)|_{z_j=0} = 0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^l,\ j\in\{1,2,...,m\}, \tag{3}$$

де $B_{z_j} \equiv \partial^2_{z_j} + \frac{2\nu_j+1}{z_j}\partial_{z_j}$ – оператори Бесселя різних порядків $\nu_j > 0$, $j \in \{1,2,...,m\}$. Коефіцієнти рівняння (1) при перших похідних по x_j, $j \in \{1,2,...,k\}$, та y_j, $j \in \{1,2,...,l\}$, є необмеженими при $|x|+|y| \to +\infty$, а при перших похідних по z_j, $j \in \{1,2,...,m\}$, – необмежені в околі точки $z=0$. Така задача при $m=1$ розглядалася в [1], а у випадку, коли шукана функція не залежить від y і коли $\nu_1 = ... = \nu_m$ – в [2].

Методом перетворення Фур'є–Бесселя і методом характеристик знайдено розв'язок задачі Коші (1)–(3) у вигляді інтеграла Пуассона

$$u(t,x,y,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+} G(t,x,y,z;0,\xi,\beta,\eta)\varphi(\xi,\beta,\eta)\eta^{2\nu+1} d\eta d\beta d\xi,$$

$$t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^l,\ z\in\mathbb{R}^m_+,$$

де $\eta^{2\nu+1} \equiv \eta_1^{2\nu_1+1} \cdot \eta_2^{2\nu_2+1} \cdot ... \cdot \eta_m^{2\nu_m+1}$, а ядро G його виписано в явному вигляді та доведено деякі його властивості.

[1] Мельничук Л.М. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами та оператором Бесселя*// IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. – 2014. – С. 127-128.

[2] Мельничук Л.М. *Структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння з операторами Бесселя* // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, 3-4. – С. 109-112.

Зіновій Нитребич [1], *Оксана Маланчук* [2]

Диференціально-символьний метод побудови квазіполіномних розв'язків двоточкової за часом задачі

[1] *Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна*
E-mail: znytrebych@gmail.com
[2] *Львівський національний медичний університет ім. Д. Галицького, Львів, Україна*
E-mail: Oksana.Malan@gmail.com

В області $(t,x)\in\mathbb{R}^{s+1}$ $(s\in\mathbb{N})$ досліджується множина розв'язків задачі

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial t}+a_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big]U(t,x)=0, \tag{1}$$

$$b_{k1}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(kh,x)+b_{k2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(kh,x)=\varphi_k(x),\ k\in\{0,1\}. \tag{2}$$

У рівнянні (1) $a_1\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$, $a_2\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – довільні диференціальні вирази загалом нескінченного порядку, символами яких є цілі функції $a_1(\nu),\ a_2(\nu)$ $(\nu\in\mathbb{C}^s)$. В умовах (2) $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – задані функції квазіполіномного вигляду, причому хоча б одна з них є ненульовою, $b_{01}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{02}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, h – додатне число.

Досліджено випадок, коли множина нулів характеристичного визначника задачі (1), (2) не є порожньою та не збігається з $\mathbb{C}^s$. За умови, що $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – квазіполіноми, доведено існування квазіполіномого розв'язку задачі (1), (2). Розв'язок задачі побудовано за допомогою диференціально-символьного методу [1].

[1] Каленюк П.І., Нитребич З.М. *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод.* – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

Олександр Омелян

Застосування нелокальних перетворень для побудови розв'язків системи рівнянь хемотаксису

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
E-mail: aomelyan@ukr.net

В даній роботі об'єктом дослідження є система рівнянь вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(u^2)^2 \end{pmatrix} \right], \tag{1}$$

де $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1,2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, нижній індекс означає диференціювання за відповідною змінною. Система рівнянь реакції-дифузії з виглядом матриці дифузії, як у системи (1), застосовується в природничих науках для моделювання хемотаксису (див. [1], [2]).

В наших дослідженнях для побудови розв'язків системи (1) ми використали нелокальні перетворення виду

$$\begin{array}{l} t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \\ t = x_0, \quad x = w^2, \quad v^1 = w^1, \quad v^2 = x_1, \\ x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w^1_1 = z^1, \quad w^2_1 = z^2, \end{array} \tag{2}$$

де x_0, x_1 – нові незалежні змінні, де $v^a = v^a(t,x)$, $w^a = w^a(x_0,x_1)$, $z^a = z^a(x_0,x_1)$ – нові невідомі функції. Зокрема, одержано такий нелокальний анзац системи (1)

$$u^1 = e^{kt}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = \frac{1}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad \omega = x, \tag{3}$$

який редукує систему (1) до системи звичайних диф. рівнянь

$$\ddot{\varphi}^1 = k\varphi^1, \quad \ddot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 - 1 = 0. \tag{4}$$

Розв'язавши систему (4), одержали такий розв'язок системи (1):

$$u^1 = c_1 e^{kt}\cos mx, \quad u^2 = \frac{1}{\mu}\frac{\frac{1}{2m}\tan mx + (\frac{x}{2}+c_2)\frac{1}{\cos^2 mx}}{(\frac{x}{2m}+\frac{c_2}{m})\tan mx + t + c_3}. \tag{5}$$

[1] Adler J. *Chemotaxis in bacteria.* // Sciense. – 1996. – **V.153**. – P. 708-716.

[2] Keller E.F., Segel L.A. *Model for chemotaxis.* // J.Theor.Biol. – 1971. – **V.30**. – P. 225-234.

Михайло Осипчук

Стійкі випадкові процеси та деякі початково-крайові задачі для псевдодиференціальних рівнянь

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано-Франківськ, Україна
E-mail: mykhailo.osypchuk@gmail.com

Для фіксованих параметрів $c > 0$ і $\alpha \in (1, 2)$ нехай $\mathbf{A}$ — псевдодиференціальний оператор, що задається символом $(-c|\xi|^{\alpha})_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Нехай $\mathbf{B}$ — псевдодиференціальний оператор, який визначається своїм символом — $\mathbb{R}^d$-значною функцією $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Для кожного одиничного вектора $\nu \in \mathbb{R}^d$ введемо оператор $\mathbf{B}_\nu = (2c\nu, \mathbf{B})$. Розглядатимуться наступні задачі та ймовірнісні представлення їх розв'язків.

1) Задача Коші для рівняння ($(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — $\mathbb{R}^d$-значна функція)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x) + (a(x), \mathbf{B}u(t,\cdot)(x)), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

2) Початково-крайова задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S);$$

$$u(0+, x, \varphi) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-) = r(x)u(t,x), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times S.$$

3) Задача Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S);$$

$$r(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times S,$$

$$u(0+, x, \varphi) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Тут $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — неперервна обмежена функція, S — достатньо гладка двостороння поверхня з одиничним вектором $\nu(x)$ нормалі до однієї з її сторін в точці $x \in S$, $(q(x))_{x\in S}$ і $(r(x))_{x\in S}$ — неперервні обмежені (друга з невід'ємними значеннями) функції, а через $f(x+)$ (відповідно, $f(x-)$) позначено границю функції $f(z)$, коли z наближається недотичним чином до $x \in S$ зі збереженням знаку виразу $(z - x, \nu(x))$ позитивним (відповідно, негативним).

Галина Пасічник

Про інтегральні зображення розв'язків ультрапараболічного рівняння з необмежено зростаючими молодшими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: pasichnyk.gs@gmail.com

Нехай n_1, n_2, n_3 – натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$. Розглядається рівняння вигляду

$$\alpha(t)\partial_t u(t,x) - \beta(t)\Bigg(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} u(t,x) + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} u(t,x) +$$

$$+ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} u(t,x) + b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}\Big(x_{1j}u(t,x)\Big)\Bigg) - au(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де α і β – неперервні на $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0;T]$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, a_{js}, a і b – дійсні числа, причому $a_{js} = a_{sj}$ і матриця $(a_{js})_{j,s=1}^{n_1}$ додатно визначена.

Для рівняння (1) знайдено явний вираз для фундаментального розв'язку задачі Коші G, встановлено властивості функції G, зокрема, отримано точні оцінки її та похідних від неї. За допомогою цих властивостей доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків рівняння (1), які як функції x є обмеженими, а при $t \to 0$ поводяться відповідним способом залежно від типу виродження рівняння при $t = 0$.

М.О. Перестюк, О.В. Капустян

Стійкість глобальних атракторів імпульсних нескінченновимірних систем

[1] *Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна*
E-mail: pmo@univ.kiev.ua, alexkap@univ.kiev.ua

Одним з найбільш популярних математичних підходів до опису еволюційних процесів з миттєвими змінами є теорія імпульсних диференціальних рівнянь [1]. Важливим її підкласом є імпульсні динамічні системи, які описуються автономною еволюційною системою, траєкторії якої зазнають імпульсного впливу при досягненні фіксованої підмножини фазового простору (імпульсної множини). Теорія глобальних атракторів для таких систем була запропонована в роботі [2]. В даній роботі одержано результати щодо стійкості глобальних атракторів імпульсних систем. Ці результати застосовано до задачі

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y - \varepsilon f(y),\ t > 0, x \in \Omega,\ y|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

в фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ з імпульсною множиною

$$M = \{y \in X \mid (y, \psi) = a\}. \tag{2}$$

Для широких класів імпульсних відображень $I : M \mapsto X$ маємо

Теорема 1 *Для достатньо малих $\varepsilon > 0$ розв'язки імпульсної задачі (1), (2) породжують напівгрупу G_ε, що має глобальний атрактор Θ_ε, який є стійким в тому сенсі, що*

$$D^+(\Theta_\varepsilon \setminus M) \subset \overline{\Theta_\varepsilon \setminus M}, \tag{3}$$

де $D^+(A) := \bigcup\limits_{x \in A} \{y \mid y = \lim G_\varepsilon(t_n, x_n),\ x_n \to x,\ t_n \geq 0\}$.

[1] Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. *Impulsive differential equitations.* – Singapore : World Scientific, 1995. – 462 p.

[2] Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. *Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems* // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – **68**, 4. – P. 517-528.

Галина Перун[1], *Володимир Ясинський*[2]

Задача Коші для параболічного рівняння з вінеровими збуреннями та відхиленням аргумента

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,*
Чернівці, Україна
E-mail: perungm@ukr.net
[2]*Едмонтон, Канада, E-mail: yasinsk@list.ru*

Задачі для стохастичних рівнянь з частинними похідними розглядались у праці [1]. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F\{F_t, t \geq 0\}, P)$ з неспадним потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ для $t_1 < t_2$ визначена випадкова функція $u(t,x,\omega)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, вимірна відносно σ-алгебри F_t, яка з імовірністю 1 є розв'язком задачі Коші з відхиленням аргумента

$$d_t u(t,x,\omega) = \Big[\sum_{|k| \leq 2b} A_k(t) D_x^k u(t,x,\omega) + f\left(u(t-h), x\right) \Big] dt +$$

$$+ \Big[\sum_{|k| \leq b} B_k(t) D_x^k u(t,x,\omega) + g\Big(u(t-h), x\Big) \Big] dw(t,\omega),\ t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(t,x) = \varphi(t,x),\ 0 \leq t \leq h,\ x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

За допомогою перетворення Фур'є, властивостей інтегралів Іто методом кроків встановлюється

Теорема 1 *Нехай коефіцієнти* $A_k, B_k \in C(0,T)$ *і виконується умова параболічності [2, с. 103]; функції* f, g, φ *– детерміновані, які задовольняють умову Ліпшица за першим аргументом і допускають перетворення Фур'є за другим аргументом. Тоді з імовірністю 1 існує функція Гріна* $G(t,\tau,x,\omega)$. *Розв'язок задачі* (1), (2) *для* $hl \leq t \leq h(l+1)$, $l \geq 1$ *зображається формулою*

$$u(t,x,\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-h, 0, x-\xi, \omega) \varphi(lh, \xi) d\xi + \int\limits_{lh}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,s,x-\xi,\omega) \times$$

$$\times \Big[f\left(\varphi(s-h), \xi\right) - \sum_{|k| \leq b} B_k(t) D_x^k g\left(\varphi(s-h), \xi\right) \Big] d\xi ds +$$

$$+ \int\limits_{lh}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,s,x-\xi,\omega) g\left(\varphi(s-h), \xi\right) d\xi dw(s,\omega). \quad (3)$$

Оцінюється його норма $M|D_x^k u|_C$, M – операція математичного сподівання.

[1] Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. *Квазилинейные стохастические дифференциальные уравнения.* – Рига: Ориентир, 1992. – 316 с.

[2] Матійчук М.І. *Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні.* – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 248 с.

Ольга Поліщук (Чайчук)

Якісне дослідження деякого сингулярного функціонально–диференціального рівняння

Одеська Маріїнська гімназія Одеської міської ради Одеської області,
Одеса, Україна
E-mail: olgapolchai@gmail.com

Розглядається сингулярна задача Коші

$$t^r x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), x(0) = 0,$$

де $r > 1$, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — невідома функція, $f : D \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $D \subset (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $g : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ і $h : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервні функції, $g(t) \le t, h(t) \le t, t \in (0, \tau)$. Доводиться, що існує непуста множина неперервно диференційовних розв'язків $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ (ρ достатньо мале, $0 < \rho < \tau$) з потрібними властивостями.

[1] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984 – 421 с.

[2] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* // Назва журналу. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

[3] Зернов А.Е. *Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши* // Украинский матем. журнал. – 2001. – **Т.53**,
No 3. – С. 302-310.

Наталія Процах

Про обернену задачу для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння високого порядку

Національний лісотехнічний університет України, Львів, Україна
E-mail: protsakh@ukr.net

Нехай Ω і D — обмежені області з просторів $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$ відповідно, а їх межі $\partial\Omega \in C^{m_0}$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega,\ y \in D,\ t \in (0,T)$. Позначимо: $Q_T = \Omega \times D \times (0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$.

В області Q_T отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі відшукання набору функцій $(u(x,y,t), c(t), q_1(t), \ldots,\ q_s(t))$, який задовольняє рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} + \sum_{0<|\alpha|=|\gamma|\le m_0} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\alpha u) +$$

$$+(c(t) + b(x,y))u + g(x,y,t,u) = \sum_{i=1}^{s} f_i(x,y,t) q_i(t) + f_0(x,y,t) \qquad (1)$$

та умови

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \times D, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{\Sigma_T} = 0 \ \ (i = 0,\, 1,\, \ldots, m_0 - 1), \qquad u|_{S_T^1} = 0, \qquad (3)$$

$$\int\limits_D \int\limits_\Omega K_i(x,y) u(x,y,t)\, dxdy = E_i(t),\ t \in [0,T]\ (i = 1, \ldots, s+1), \qquad (4)$$

де $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, функція $g(x,y,t,u)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною u, ν — вектор зовнішньої нормалі до поверхні S_T, а $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \cos(\nu, y_i) < 0\}$.

Методами, описаними в [1], встановлено умови однозначної розв'язності мішаної задачі (1)–(3), коли функції $c(t), q_1(t), \ldots, q_s(t)$ відомі.

[1] Процах Н.П., Пташник Б.Й. *Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності.* – Київ: Наукова думка, 2017. – 278 с.

Іван Пукальський, Богдан Яшан

Одностороння крайова задача для параболічних рівнянь з імпульсною дією і виродженням

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: bohdanjaschan94@gmail.com

Нехай Ω – деяка обмежена область в R^{n-1}, D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $\overline{\Omega} \subset D$, $\eta, t_0, \ldots, t_{N+1}$ – фіксовані додатні числа $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{N+1}$, $t_0 < \eta < t_{N+1}$, $\eta \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1, \ldots, n\}$. Позначимо через $Q_0 = \{(t,x) | t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \Omega\} \cup \{(t,x) | t = \eta, x \in D\}$, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $\rho(x) = \min\limits_{x \in D \setminus \overline{\Omega}, z \in \overline{\Omega}} |x - z|$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $t \neq t_\lambda$, $(t,x) \notin Q_{(0)}$ рівняння

$$\Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) \partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big] u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0 + 0, x) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$u(t_\lambda + 0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = d_\lambda(t_\lambda, x) u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(t_\lambda, x) \tag{3}$$

і крайову умову

$$Bu|_\Gamma \equiv \Big[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) \partial_{x_k} u + b_0(t,x) u\Big]|_\Gamma \geq g(t,x) \tag{4}$$

$$u|_\Gamma \geq 0, \quad \Big[(Bu - g)u\Big]|_\Gamma = 0.$$

Задачу (1) – (4) дослідимо за таких обмежень на ріст коефіцієнтів при $x \longrightarrow \partial\Omega$, $t \longrightarrow \eta$:
$a_{ij} = O(\rho^{\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)}} |t - \eta|^{\beta_i^{(2)} + \beta_j^{(2)}})$, $a_r = O(\rho^{-\mu_r^{(1)}} |t - \eta|^{-\mu_r^{(2)}})$, $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $b_k = O(\rho^{\beta_k^{(1)}} |t - \eta|^{\beta_k^{(2)}})$, $b_0 \in O(\rho^{-\delta_0^{(1)}} |t - \eta|^{-\delta_0^{(2)}})$, $\beta_j^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\mu_i^{(\nu)} \in [0, \infty)$, $\delta_0^{(\nu)} \in [0, \infty)$, $a_0 > 0$, $b_0|_\Gamma > 0$.

При визначених умовах гладкості на коефіцієнти рівняння (1), крайової умови (4), функції f, φ_k, d_λ, g в гельдерових просторах зі степеневою вагою одержано умови єдиності, існування та встановлено оцінки похідних розв'язку поставленої задачі. Порядок степеневої ваги в гельдерових просторах залежить від чисел $\beta_i^{(\nu)}$, $\mu_i^{(\nu)}$, $\delta_0^{(\nu)}$, $\nu \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $r \in \{0, \ldots, n\}$.

Віктор Савчук

Точна оцінка залишку ряду Тейлора для обмежених голоморфних функцій

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: savchuk@imath.kiev.ua

Нехай B – клас функцій f, голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для яких

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1,$$

і нехай

$$r_n(f)(z) := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

– залишок порядку n ряду Тейлора функції $f \in B$.

Теорема 1 *Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{D}$*

$$\max_{f\in B} \Big| r_n(f)(|z|) \Big| = \max_{f\in B} \ \mathrm{Re}\Big(r_n(f)(|z|) \Big) =$$

$$= |z|^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 |z|^{2k} + (1-|z|^2) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} |z|^{2(k-n)} \right)^2 .$$

Для даного натурального n і $z \in \mathbb{D}$ максимум досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника функції

$$f(t) = \frac{t^n Q_n(1/t)}{Q_n(t)},$$

де

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} |z|^k t^k - \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} |z|^{2k-n} \right) t^n.$$

Валерій Самойленко, Юлія Самойленко

Асимптотичні Σ-розв'язки для сингулярно збурених рівнянь інтегровного типу зі змінними коефіцієнтами

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: valsamyul@gmail.com

Рівняння з частинними похідними інтегровного типу такі як рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння sin-Gordon, рівняння Кадомцева-Петвіашвілі є фундаментальними рівняннями сучасної теоретичної і математичної фізики. Ці рівняння описують багато важливих явищ і процесів природознавства та володіють широким класом розв'язків з різноманітними властивостями, серед яких найбільш відомими є солітонні розв'язки. Такі розв'язки описують відокремлені хвилі, взаємодія яких відбувається подібно частинкам. При цьому така взаємодія є нелінійною, але нагадує взаємодію лінійних хвиль, коли відповідні хвилі після взаємодії зберігають свої характеристики (амплітуду, швидкість руху, форму та ін.).

Якщо середовище, в якому відбувається процес, характеризується змінними параметрами і малою дисперсією, то коефіцієнти відповідного рівняння не є сталими, а залежать від просторової та часової змінних і малого параметра (при старших похідних). Як наслідок, чи не єдиним методом дослідження таких рівнянь є асимптотичний аналіз, за допомогою якого можна побудувати їх асимптотичні солітоноподібні розв'язки [1, 2, 3].

У даній доповіді на прикладах сингулярно збурених рівнянь Кортевега-де Фріза і регуляризованого рівняння Кортевега-де Фріза (рівняння Benjamine-Bona-Mahony) продемонстровано алгоритм побудови їх асимптотичного Σ – розв'язку, який за своїми асимптотичними властивостями подібний багатосолітонним розв'язкам рівнянь інтегровного типу зі сталими коефіцієнтами, тобто розв'язкам, які при великих значеннях незалежних змінних (при $|x+t| \to +\infty$) є асимптотичною сумою односолітонних розв'язків.

[1] Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. *Асимптотичні багатофазові Σ – розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами* // Укр. мат. вісник. – 2014. – **11**, 1. – С. 87 – 108. (In English: Asymptotic multiphase Σ-solutions to the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – **200**, 3. – P. 358 – 373.)

[2] Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. *Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами* // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, 7. – С. 970 – 987; **64**, 8. – С. 1089 – 1105. (In English: Asymptotic m-phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. – 2012. – **64**, 7. – P. 1109 – 1127; 2013. – **64**, 8. – P. 1241 – 1259.).

[3] Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. *Асимптотичні Σ – розв'язки сингулярно збуреного рівняння Benjamine-Bona-Mahony зі змінними коефіцієнтами* // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, 2. – С. 227 – 245.

Лідія Сергєєва

Побудова глобального розв'язку деякого неоднорідного рівняння з частинними похідними нейтрального типу із відхиленням за часом

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: sergeevalms@gmail.com

Описано алгоритм побудови глобального розв'язку та наведено умови його існування для деякого неоднорідного рівняння нейтрального типу з частинними похідними із відхиленням за часом вигляду

$$u_t(x,t) = p(t)u_{xx}(x,t+\mu) + r(t)u_t(x,t+\mu) + q(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

з нульовими крайовими умовами

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, t \in \mathbb{R}\}$, $p(t)$, $r(t)$ – неперервні функції на $\mathbb{R}$, причому відхилення μ достатньо мале.

Припускається, що функція $q(x,t)$ може бути представлена у вигляді суми перших n доданків ряду Фур'є.

Глобальний розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2) знайдено у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} sin\frac{k\pi x}{l}T_k(t),$$

де $T_k(t)$ – розв'язок лінійного рівняння $T'_k(t) + \bar{p}_k(t)T_k(t) - \bar{q}_k(t) = 0,\ \ k \le n,\ \ t \in \mathbb{R}$. Для знаходження коефіцієнтів $\bar{p}_k$ та $\bar{q}_k$ було застосовано метод послідовних наближень.

Отримано умови, при виконанні яких даний метод побудови глобального розв'язку (1), (2) є застосовним.

Запропонований метод було використано при дослідженні деяких інших типів рівнянь [1], [2].

[1] L. M. Sergeeva, *About global solutions of partial differential equation with deviating argument in the time variable*, ROMAI J., **v.11**, no.2(2015), pp. 109–118.

[2] Сергєєва Л.М. *Про глобальний розв'язок деякого неоднорідного диференціального рівнянння з частинними похідними, що містить відхилення за часом* // Буковинський математичний журнал. – 2017. – **5**, № 1-2. – С. 123-129.

Василь Слюсарчук

Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації

Національний університет водного господарства та
природокористування, Рівне, Україна
E-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Рух матеріальних точок $M_0, M_1, \ldots, M_n$ з масами $m_0, m_1, \ldots, m_n$ по відношенню до нерухомої прямокутної системи координат описується системою диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом

$$\begin{cases} m_i \dfrac{d^2\overline{r}_i(t)}{dt^2} = \\ = \displaystyle\sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \dfrac{Gm_im_j}{|\overline{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \overline{r}_i(t)|^3}\,(\overline{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \overline{r}_i(t)), \\ i = \overline{0,n}, \end{cases} \tag{1}$$

де $\overline{r}_i(t)$ – векторна функція, що визначає положення точки M_i в момент часу t, $\tau_{ji}(t)$ – функція, що задовольняє співвідношення

$$c\tau_{ji}(t) = |\overline{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \overline{r}_i(t)|$$

(тут c – швидкість гравітації), і

$$\frac{Gm_im_j}{|\overline{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \overline{r}_i(t)|^3}\,(\overline{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \overline{r}_i(t)) -$$

сила тяжіння, спричинена притягуванням точки M_i точкою M_j (на підставі закону всесвітнього тяжіння й урахування запізнювання $\tau_{ji}(t)$ гравітації).

При $n = 9$ система рівнянь (1) є математичною моделлю Сонячної системи [1].

Наведено властивості розв'язків розглянутої системи рівнянь.

[1] Слюсарчук В. Ю. *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації* // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 2. – С. 238–261.

Людмила Слюсарчук

Нелінійні диференціально-різницеві рівняння з асимптотично сталими розв'язками

Національний університет водного господарства та
природокористування, Рівне, Україна
E-mail: L.M.Sliusarchuk@nuwm.edu.ua

Нехай E – банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$, m – довільне натуральне число, $F : E \to E$ – C^0-відображення, $\varphi : E^m \to E$ – C^1-відображення і $q \in [0, 1)$.

Розглянемо диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{d(x(t+1) - \varphi(x(t), x(t-1), \ldots, x(t-m+1)))}{dt} =$$

$$= F(x(t) - \varphi(x(t-1), x(t-2), \ldots, x(t-m))),\ t \geqslant 0. \tag{1}$$

Вважаємо, що $F(0) = 0$, нульовий розв'язок рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = F(z(t-1)),\ t \geqslant 0,$$

є глобально асимптотично стійким і справджується співвідношення

$$\|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) - \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant q \max \{\|x_1 - y_1\|_E, \|x_2 - y_2\|_E, \ldots, \|x_m - y_m\|_E\}$$

для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in E$.

Показано, що всі розв'язки рівняння (1) є асимптотично сталими.

При дослідженні рівняння (1) використовуються результати робіт [1]–[3].

[1] Слюсарчук В. Ю. *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією.* – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.

[2] Слюсарчук Л. М. *Нелінійні диференціально-різницеві рівняння з асимптотично сталими розв'язками* // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, № 1–2. – С. 143–144.

[3] Дороговцев А.Я. *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.* – Киев: ,,Факт“, 2004. – 560 с.

Анжела Стехун

Про асимптотичну поведінку розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку

Одеська державна академія будівництва та архетектури, Одеса, Україна
E-mail: angela.stehun@gmail.com

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – повільно змінна при $y \to Y_0$ неперервна функція, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- деякий односторонній окіл Y_0.

В силу властивостей повільно змінних функцій (див. [1], розділ 1) рівняння (1) є асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) y,$$

і тому викликає значний теоретичний інтерес.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$– розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений в деякому лівому околу ω і задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 1, 2),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t) y'(t)} = \lambda_0.$$

Для кожного з можливих значень λ_0 встановлюються необхідні та достатні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків. Крім того, одержуються асимптотичні формули при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

[1] Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* – М.: Наука. – 1985. – 144с.

Юрій Теплінський

Метод функції Гріна–Самойленка у дослідженні інваріантних торів еволюційних рівнянь, визначених у просторах обмежених числових послідовностей

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: triton1950@ukr.net

У цій доповіді обговорюється застосування методу функції Гріна-Самойленка для побудови і дослідження властивостей інваріантних торів еволюційних рівнянь у просторах обмежених числових послідовностей. Розглянуто лінійні, квазілінійні та нелінійні різницеві рівняння з параметрами, що визначені на скінченновимірних та нескінченновимірних торах і містять незалежні відхилення дискретного аргументу. Для цих рівнянь досліджено умови існування та властивості гладкості інваріантних торів. Аналогічні результати отримано для диференціально-різницевих рівнянь з параметрами, що визначені на нескінченновимірних торах і містять нескінченну кількість сталих різнознакових відхилень скалярного аргументу. Для побудови інваріантних торів лінійних систем застосовано метод укорочення, тобто функцію, що визначає відповідний інваріантний тор, подано у вигляді границі послідовності функцій, кожна з яких визначає інваріантний тор укороченої системи при необмеженому зростанні порядку укорочення. Зауважимо, що багато результатів з вказаної тематики та суміжних з ними опубліковано в роботах [1–3].

[1] Samoilenko A.M. and Teplinskii Yu.V. *Countable Systems of Differential Equations.* – Utrecht-Boston: VSP, 2003. – 287 p.

[2] Samoilenko A.M., Teplinskii Yu.V. *Elements of Mathematical Theory of Evolutionari Equations in Banach Spaces.* – Singapore: World Scientific. Series A, Volume 86, 2013. – 400 p.

[3] Теплінський Ю.В. *Інваріантні тори диференціально-різницевих рівнянь у просторах обмежених числових послідовностей.* – Кам'янець-Подільський: Препр. / МОН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – 130 с.

Наталія Турчина

Властивості та застосування операторів Гріна модельної $2\vec{b}$-параболічної крайової задачі

Національний технічний університет України ”КПІ ім. Ігоря Сікорського”, Київ, Україна
E-mail: nataturchina@gmail.com

Нехай $n, N, b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа; $\vec{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s— найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j := s/b_j, j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|k\| := \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – n-вимірний мультиіндекс; $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, $\Pi_T^+ := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in (0,T], x \in \mathbb{R}_+^n\}$, $\Pi_T' := \{(t,x') \in \mathbb{R}^n | t \in (0,T], x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, якщо T – задане додатне число.

В області Π_T^+ розглядається така крайова задача:

$$(I_N \partial_t - \sum_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k) u(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi^+, \tag{1}$$

$$\sum_{2sk_0+\|k\|=r_j} b_{jk_0k} \partial_t^{k_0} \partial_x^k u(t,x)|_{x_n=0} = g_j(t,x'), \tag{2}$$

$$(t,x') \in \Pi', j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{3}$$

де u, f і ϕ — матриці-стовпчики висоти N; a_k і b_{jk_0k} — сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$; I_N — одинична матриця порядку N; $g_1, \ldots, g_m$— скалярні функції; $r_1, \ldots, r_m$ — невід'ємні цілі числа. Припускається, що система (1) рівномірно $\vec{2b}$-параболічна за Ейдельманом, а крайові умови (2) задовольняють умову доповняльності [1].

Для задачі (1)–(3) побудовано матрицю Гріна й досліджено властивості її та породжених нею операторів Гріна. Ці властивості застосовано до встановлення коректної розв'язності задачі (1)–(3) у просторах Гельдера.

[1] Турчина Н.І., Івасишен С.Д. *Про модельну крайову задачу з векторною вагою* // Буковинський математичний журнал. – 2017. – **5**, № 3-4. – С. 163–167.

Петро Фекета[1], *Олена Капустян* [2], *Микола Перестюк* [3]

Стійкість тривіального тору для одного класу нелінійних багаточастотних систем

[1] *Університет Кайзерслаутерна, Німеччина*
E-mail: petro.feketa@mv.uni-kl.de
[2] *Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна*
E-mail: olena.kap@gmail.com
[3] *Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна*
E-mail: perestyuknn@gmail.com

Фундаментальні результати якісної теорії багаточастотних коливань були одержані в роботах А.М. Самойленка [1]. В данній роботі встановлено нові умови експоненційної стійкості тривіального тору нелінійних розширень динамічної системи на торі, які формулюються в термінах квадратичних форм, знакосталих не на всьому торі, а лише на множині неблукаючих точок динамічної системи на торі. В прямому добутку $\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$ розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x, \tag{1}$$

де P обмежена і локально ліпшицева, a - глобально ліпшицева.

Система $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ породжує динамічну систему $\varphi_t(\varphi)$ на $\mathcal{T}_m$, множину неблукаючих точок якої будемо позначати Ω.

Позначимо для $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{S}(\varphi, x) = \frac{\partial S}{\partial \varphi} a(\varphi) + \frac{\partial S}{\partial x}(P(\varphi, x)x) + SP(\varphi, x) + P^T(\varphi, x)S, \tag{2}$$

де $S = S(\varphi, x)$ - симетрична матриця з класу $C^1(\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n)$.

Теорема 1 *Нехай існує симетрична матриця $S = S(\varphi, x)$ з класу $C^1(\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n)$ така, що виконуються умови*

$$\forall\ \varphi \in \Omega \quad S(\varphi, 0) > 0, \quad \hat{S}(\varphi, 0) < 0. \tag{3}$$

Тоді тривіальний тор системи (1) експоненційно стійкий.

[1] Самойленко А. М. *Элементы математической теории многочастотных колебаний.* – М: Наука, 1987.

Віктор Ферук

Крайові задачі для слабкосингулярних інтегральних рівнянь

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: feruk.viktor@imath.kiev.ua

Розглядається слабкозбурена лінійна крайова задача для слабкосингулярного інтегрального рівняння

$$x(t) = f(t) + \int\limits_a^b \frac{H(t,s)}{|t-s|^{\gamma}} x(s)ds + \varepsilon \int\limits_a^b \frac{\overline{H}(t,s)}{|t-s|^{\beta}} x(s)ds, \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon Jx(\cdot). \tag{2}$$

Тут $H(t,s)$, $\overline{H}(t,s)$ — обмежені в області $[a,b] \times [a,b]$, $0 < \gamma, \beta < 1$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $l = col\begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \dots, & l_p \end{pmatrix} : L_2[a,b] \to R^p$ і $J = col\begin{pmatrix} J_1, & J_2, & \dots, & J_p \end{pmatrix} : L_2[a,b] \to R^p$ – обмежені лінійні векторні функціонали, $l_\nu, J_\nu : L_2[a,b] \to R$, $\alpha = col\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_p \end{pmatrix} \in R^p$, $\varepsilon << 1$ - малий параметр.

Використовуючи методи теорії слабкозбурених операторних крайових задач з нетеровою лінійною частиною [1], [2], знайдено умови біфуркації розв'язків крайової задачі (1), (2), при умові, що породжуюча задача (1), (2), тобто задача

$$x(t) = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

$$lx(\cdot) = \alpha$$

не має розв'язку.

Побудовано загальний вигляд розв'язку задачі (1), (2) у вигляді частини степеневого ряду з сингулярністю, який збігається при фіксованому, достатньо малому параметрі.

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M., *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht, Boston, 2004.; 2nd edition, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016. – 314 p.

[2] Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений* // УМН. – 1960. – **15**, вып. 3. – С. 3—80.

Микола Філіпчук

Про розв'язність і наближену побудову розв'язку однієї крайової задачі

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: filko@ukr.net

Розглядається двоточкова крайова задача для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), x(\lambda_2(t)), ..., x(\lambda_k(t))), \tag{1}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, \tag{2}$$

$$\det(A + B) \neq 0, \tag{3}$$

де $t \in [0, T]$, $T = const > 0$; x, f – n-вимірні вектор-функції ($n \in \mathbb{N}$); $\lambda_i : [0, T] \to [0, T]$ $(i = \overline{1, k})$ – довільні неперервні відображення ($k \in \mathbb{N}$); A і B – сталі $n \times n$ матриці; d – сталий n-вимірний вектор.

Для дослідження крайової задачі (1)-(3) запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка [1], де відсутнє визначальне рівняння.

Отримано достатні умови існування єдиного розв'язку $x^*(t)$ крайової задачі (1)-(3) та оцінку похибки побудованих його послідовних наближень $x_m(t)$.

Відзначимо, що у праці [2] за допомогою традиційного варіанту чисельно-аналітичного методу з визначальним рівнянням досліджено крайову задачу (1),(2) у випадку, коли для деяких фіксованих дійсних чисел $k_1 \neq k_2$ виконується співвідношення

$$\det(k_1 A + k_2 B) \neq 0.$$

Таким чином, анонсований отриманий результат логічно доповнює та завершує дослідження, розпочаті у праці [2].

[1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.

[2] Філіпчук М.П. *Двоточкова крайова задача для системи з багатьма перетвореними аргументами* // Бук. мат. журн. – 2017. – **Т. 5**, № 1-2. – С. 139-143.

Володимир Шинкаренко[1], *Наталія Шарай*[2]

Асимптотика розв'язків напівлінійних диференціальних рівнянь третього порядку

[1] *Одеський національний економічний університет, Одеса, Україна*
E-mail: shinkar@te.net.ua
[2] *ОНУ імені І.І. Мечнікова, Одеса, Україна*
E-mail: rusnat@i.ua

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^{\sigma}, \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega) \longrightarrow (0, +\infty)$ – неперервна функція, $\sigma \in R$, $\infty < a < \omega \leq +\infty$.

Рівняння (1) належить класу рівняннь вигляду

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t)\, L(y), \tag{2}$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega) \longrightarrow (0, +\infty)$ – неперервна функція, $\infty < a < \omega \leq +\infty$, функція L неперервна, додатня та в деякому сенсі близька до лінійної в односторонньому околі Δ_{Y_0} нулевої точки або $\pm\infty$.

Розв'язок y рівняння (1), заданий на проміжку $[t_y, w) \subset [a, \omega)$ називаємо $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язком, якщо він задовольняє наступні вимоги:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{''}(t)]^2}{y^{'''}(t) y^{'}(t)} = \lambda_0$$

У роботі [1] було отримано результати у випадку, коли значення $\lambda_0 \in R \backslash \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$. Встановлено умови існування у рівняння (1) $P_\omega(\pm\infty)$-розв'язків, а також $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків у критичних випадках, тобто для значень $\lambda_0 \in \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$. Для кожного з таких граничних значень отримано умови існування у рівняння (1) $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичні розвиненя при $t \uparrow \omega$ розв'язків та їх похідних до другого порядку.

[1] Шинкаренко В. Н., Шарай Н.В. *Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, близких к линейным* // Нелінійні коливання, - 2015. - **Том 18**, № 1. - С. 133-144.

Ольга Чепок

Асимптотичні зображення розв'язків з повільно змінними похідними диференціальних рівнянь другого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями у правій частині

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: olachepok@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$ — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – однобічний окіл Y_i. Крім того, вважаємо, що функція φ_1 є правильно змінною ([1], с. 17) при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція φ_0 двічи неперервно диференційовна, строго монотонна на Δ_{Y_0} та така, що $\lim\limits_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}$, $\lim\limits_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \dfrac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{\left(\varphi_0'(y)\right)^2} = 1.$ З цих умов випливає, що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при $y \to Y_0$([1], с.139) та належать класу функцій Γ який був введений Л. Ханом ([1], с.75), а також класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був введений у роботі [2] як узагальнення класу Γ.

Встановлені необхідні і достатні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку. При цьому було застосовано методику, що використовувалась у роботі [2] при дослідженні рівнянь виду (1), де $\varphi_1 \equiv 1$.

[1] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L., *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*// Cambridge university press, – Cambridge, – 1987.

[2] Евтухов В.М., Черникова А.Г. *It Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями*//Укр.Мат. Ж. – 2017. – **69**, № – 10. - С. 1345 - 1363.

Ігор Черевко

Схеми апроксимації диференіально-функціональних рівнянь та їх застосування

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: i.cherevko@chnu.edu.ua

Схема апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь уперше запропонована М. М. Красовським [1] при дослідженні задачі про синтез оптимального регулятора в системах із запізненням. Точність апроксимації нелінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням досліджена Ю. М. Рєпіним [2], який розглянув апроксимацію скалярного елемента запізнення у випадку, коли його вхідна функція є диференційованою або задовольняє умову Ліпшиця.

Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в просторах неперервних функцій на скінченному інтервалі здійснено у працях І. М. Черевка та Л. А. Піддубної [3-4]. Аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та узагальнення схем апроксимації для систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого і нейтрального типів розглянуто в роботах І. М. Черевка та О. В. Матвія [5,6].

Побудова та обгрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в роботах І.М. Черевка та С.А. Іліки [7,8].

Вивчення зв'язків між диференціально-різницевими рівняннями і відповідними апроксимуючими системами звичайних диференціальних рівнянь дозволили запропонувати алгоритми розв'язання ряду прикладних задач. У роботах [3-5] запропоновано схеми апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь, а методика дослідження стійкості розв'язків таких рівнянь наведена в роботах [5,9]. Конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями одержані в [10].

[1] Красовский Н.Н. *Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием* // ПММ. – 1964. – **29**, № 4. – С. 716–725.

[2] Репин Ю. М. *О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями.* – ПММ. – 1965. – **29**, №2. – С. 226–245.

[3] Cherevko I.M., Piddubna L.A. *Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials* // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – **28**, N1. – P. 15–21.

[4] Піддубна Л.А., Черевко І.М. *Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь* // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, №1. – С. 42–50.

[5] Матвій О.В., Черевко І.М. *Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість* // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, №2. – С. 208–216.

[6] Матвій О.В., Черевко І.М. *Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь* // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, №3. – С. 329–335.

[7] Іліка, С.А. МатвійО.В. Піддубна Л.А. *Апроксимація систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу* // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія : Математика : зб. наук. праць. – Чернівці : ЧНУ, 2012. – **Т.2**, №1. – С. 35–39.

[8] Іліка С.А., Черевко І.М. *Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, №1. – С. 39–48.

[9] Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М. *Про стійкість лінійних систем із запізненням* // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2008. – **Вип. 421**: Математика. – С. 66–70.

[10] Клевчук І.І., Пернай С.А., Черевко І.М. *Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь* // Доповіді НАН України, 2012. – **7**. – С. 28–34.

Анастасія Чернікова

Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку зі швидко змінною нелінійністю

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: a4erry@gmail.com

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1,$$

Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- деякий односторонній окіл Y_0.

З умов на функцію φ безпосередньо випливає (див. [1], розділ 3, С. 91-92) що вона та її похідна першого порядку є швидко змінними функціями при $y \to Y_0$.

Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$– розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений в деякому лівому околу ω і задовольняє наступні умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Для кожного з можливих значень λ_0 встановлюються необхідні та достатні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків, а також одержуються асимптотичні формули при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

[1] Marić V. *Regular Variation and Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 1726.* –Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. – 2000. – 128p.

Віктор Чорний, Григорій Хома

Ідеї розвитку Т-періодичних розв'язків рівнянь в частинних похідних

*Тернопільський національний педагогічний університет імені
Володимира Гнатюка, Україна
E-mail: vzch@ukr.net*

Наша доповідь присвячена питанням дослідження розв'язків крайових Т-періодичних задач для рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу

$$u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) = F(t,x,u_t(t,x),u_x(t,x)).$$

Це пов'язано з тим, що методика академіка А.М. Самойленко [1] не повністю поширена для вказаних рівнянь. Нами на основі аналітичної формули розв'язків крайових Т- періодичних задач [2] вказано новий підхід дослідження даної проблеми. Розвинуто теорію дослідження математичного моделювання крайових Т-періодичних задач.

[1] Самойленко А. М., Ронто Н. И. *Численно-аналитические методы исследования периодических решений.* – Київ:: Вища школа, 1976. - 184 с.

[2] Митропольский Ю. А., Хома Г. П.,Громяк М. И. *Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа.* – Київ: Наук. думка, 1991. – 232 с.

Сергій Чуйко

Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна
chujko-slav@ukr.net

Досліджено задачу про побудову розв'язків [1]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_n[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^n$$

лінійної диференціально-алгебраїчної системи [2, 3]

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad f(t) \in \mathbb{C}[a,b]; \tag{1}$$

тут

$$A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$$

— неперервні матриці. Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучі, прямокутною: $m \neq n$, або квадратною та виродженою.

Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для лінійної диференціально-алгебраїчної системи. Знайдено достатні умови для зведення диференціально-алгебраїчної системи до послідовності систем звичайних диференціальних та алгебраїчних рівнянь без використання центральної канонічної форми та досконалих пар и трійок матриць [3]. Побудовано класифікацію, а також єдину схему знаходження розв'язків лінійних диференціально-алгебраїчних систем.

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition).* – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

[2] Campbell S.L. *Singular Systems of differential equations.* — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.

[3] Чуйко С.М. *О понижении порядка в дифференциально алгебраической системе* // Укр. мат. вестник. — 2018. — **14**. — №1. — P. 13 — 25.

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України (номер державної реєстрації 0115U003182).

Сергій Чуйко, Марина Дзюба

Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна
chujko-slav@ukr.net

Знайдено умови існування розв'язків [1, 2]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ i = 1, 2, \dots, p$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{1}$$

Тут

$$\mathcal{A}Z'(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\},$$

$$\mathcal{B}Z(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$$

— оператори, які для будь-яких скалярних функцій $\zeta(t), \xi(t)$ та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечують рівності

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t),$$

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p} \ell_i z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu},$$

де $\ell_i z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \ \ i = 0, \ \dots\ , p-1, \ \tau_0 := a, \ \ell_p z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$ — лінійні обмежені матричні функціонали. Крім того $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$.

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition).* – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

[2] Чуйко С.М., Дзюба М.В. *Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача с импульсным воздействием* // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, №4. — С. 564 — 573.

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України (номер державної реєстрації 0115U003182).

Олексій Чуйко, Влада Чечетенко

Узагальнений оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна
chujko-slav@ukr.net

Знайдено умови існування розв'язків [1, 2, 3]

$$Z(t) \in \mathbb{D}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{D}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, Z'(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{L}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі для рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$Z'(t) = \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s)\Big]\Psi(t)\,ds + F(t), \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Тут

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\gamma}[a;b], \quad A(t), B(t) \in \mathbb{L}^2_{\gamma\times\alpha}[a;b], \quad \Psi(t) \in \mathbb{L}^2_{\beta\times\beta}[a;b];$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot):\ \mathbb{D}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad F(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\beta}[a;b], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Запропоновані умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1) узагальнюють умови розв'язності та конструкцію узагальненого оператора Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі [2].

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition).* – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

[2] Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром* // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, №11. – С. 1576 — 1579.

[3] Чуйко С.М., Чуйко О.С., Чечетенко В.О. *Оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі* // Праці ІПММ 2017. — **31**. — 2017. — С. 151 — 162.

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України (номер державної реєстрації 0115U003182).

Володимир Ясинський[1], *Ігор Юрченко*[2], *Ірина Дорошенко*[2], *Тарас Лукашів*[2]

Достатні умови існування функціонала Ляпунова-Красовського для стохастичної динамічної системи випадкової структури зі скінченною післядією

[1] *Едмонтон, Канада*
E-mail: yasinsk@list.ru
[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: yurchiv@gmail.com, doroshenkoirina111@gmail.com, t.lukashiv@gmail.com

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{F} := \{\mathfrak{F}_t \in \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ розглядається динамічна система випадкової структури зі скінченною післядією, яка задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$dx(t) = \alpha \cdot a(t, x_t, \xi(t))dt + b(t, x_t, \xi(t))dw(t) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x_0 = \varphi(\theta) \in \mathbf{D}, \xi(0) = y \in \mathbf{Y} \tag{2}$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $x_t := x(t+\theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$, $t \geq 0$; $\mathbf{D} := \mathbf{D}([-\tau, 0], \mathbb{R}^m)$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі; ξ – марковський процес зі значеннями в просторі $(\mathbf{Y}, \mathfrak{Y})$ і генератором Q; w – стандартний вінерів процес; α – обмежена випадкова величина; причому ξ, w і α незалежні в сукупності.

Функціонали $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{D} \times \mathbf{Y} \to \mathbb{R}^m$ і $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{D} \times \mathbf{Y} \to \mathbb{R}^m$ є вимірними за сукупністю змінних і в будь-якій скінченній області $\|x_t\| < H (\|x_t\| := \sup\limits_{-\tau \leq \theta \leq 0} |x(t\theta)|)$ задовольняють умови Ліпшиця і обмеженості.

Для системи (1), (2) установлено достатні умови існування функціонала Ляпунова-Красовського за умови, що вона є асимптотично стійкою за ймовірністю.

Секція алгебри

Mitrofan Choban [1], *Petar Kenderov* [2], *Julian Revalski* [2]

Set-valued mappings, topological games and their applications

[1] *Tiraspol State University, Republic of Moldova*
E-mail: mmchoban@gmail.com
[2] *Institute of Mathematics and Informatics of Bulgarian Academy of Sciences, Bulgaria*

Many applications of set-valued mappings are associate with the solutions of the following problems:

Problem 1. *Let* $\theta : X \longrightarrow Y$ *be a set-valued mapping and* $\mathcal{P}$ *be a property of set-valued mappings. Under which conditions on* X, Y, θ *there exist a dense* G_δ*-subspace* Z *of* X *and a set-valued mapping* $\varphi : Z \longrightarrow Y$ *with property* $\mathcal{P}$ *such that* $\varphi(x) \subset \theta(x)$ *for each* $x \in Z$*?*

Let $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. A topological game is an infinite game of perfect information. These games are typically played between two players: Player α and Player β. They take turns in choosing special elements (points, subsets, families of sets etc) from a fixed space X. This process defines an infinite sequence $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ of the special elements, where the elements E_{2n} are choosing by the Player α and the elements E_{2n+1} are choosing by the Player β. Player α starts the play. Any such infinite sequence $\{E_n : n \in \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}\}$ is called a party or a play of the game. In addition, we have a family Win of the sequences which has the given property. Player β is said to win the party if the sequence $\{E_n : n \in \omega\}$ is in Win. Player α wins otherwise. A strategy for Player β in the game is a function $s(n, E_0, E_1, \ldots, E_{2n})$ defined for any $n \in \omega$ and any finite sequence $E_0, E_1, \ldots, E_{2n}$ of special elements of X. A party $\{E_n : n \in \omega\}$ is said to be played according to strategy s if $E_{2n+1} = s(n, E_0, E_1, \ldots, E_{2n})$ for any $n \in \omega$. The strategy s for Player β is said to be winning if for every play according to strategy s results in a win for him. A stationary strategy is a strategy which depends on the opponent's last move only.

Problem 2. *Fix a topological game on topological spaces. Under which conditions on a space* X *there exists a winning strategy for the given player?*

We study the topological games $GM(X, S)$ with some applications in optimization, differentiability of functionals and set-valued analysis. This game is a modification of the game of Banach and Mazur. The game $GM(X, S)$ on a topological space X is played as follows. The players choose alternately a sequence $U_0, U_1, U_2, \ldots$ of non-empty open subsets of the space X so that: $U_{n+1} \subset U_n$ for each $n \in \omega$; the sets $\{U_{2n} : n \in \omega\}$ are chooses by the first Player α; the sets $\{U_{2n+1} : n \in \omega\}$ are selected by the second Player β.

The Player β wins the play (party) $\{U_n : n \in \omega\}$ in the game $GM(X, S)$ if and only if either (i) $F = \cap\{U_n : n \in \omega\}$ is the empty set or (ii) $F = \cap\{U_n : n \in \omega\}$ is a singleton subset.

The Player β wins the play (party) $\{U_n : n \in \omega\}$ in the game $GM^c(X, S)$ if and only if $\cap\{U_n : n \in \omega\}$ is a singleton subset and $\{U_n : n \in \omega\}$ is a base of X at this point.

A metric d on a space X fragmentable open subsets if for any non-empty open subset U of X and $\varepsilon > 0$ there exists an open subset $V = V(U, d, \varepsilon)$ of X such that $V \subset U$ and $diam(V) \leq \varepsilon$.

Theorem 1. *For a regular space X the following assertions are equivalent:*

1. On X there exists a metric which fragmentable open subsets.

2. The Player β has a winning strategy in the game $GM(X, S)$.

3. The Player β has a stationary winning strategy in the game $GM(X, S)$.

4. For any quasi-open minimal set-valued mapping $F : Y \longrightarrow X$ of a complete metrizable space Y into a space X the set $Y_1 = \{y \in Y : |F(y)| \leq 1\}$ contains a decse G_δ-subset of the space Y.

5. For any quasi-open minimal set-valued mapping $F : Y \longrightarrow X$ of a space Y into a space X the set $Y_2 = \{y \in Y : |F(y)| \geq 2\}$ is a subset of the first category of the space Y.

6. There exists a subset Z of the first category of the space X such that on $Y = X \setminus Z$ there exists a metric which fragmentable open subsets.

A metric d on a space X strongly fragmentable open subsets if for any non-empty open subset U of X and $\varepsilon > 0$ there exist a point $x = p(U, \varepsilon) \in U$, a number $\delta > 0$ and an open subset $V = V(U, d, \varepsilon)$ of X such that $\delta \leq \varepsilon$ and $x \in V \subset B(x, d, \delta) \subset U$. A metric d on a space X continuously fragmentable open subsets if: the metric d strongly fragmentable open subsets of X; if $\{U_n : n \in \omega\}$ is a sequence of open subsets, $x \in \cap\{U_n : n \in \omega\}$, $U_{n+1} \subset U_n$ and $diam_d(U_n) < n^{-1}$ for each $n \in \omega$, then the sequence $\{U_n : n \in \omega\}$ is a base of the space X at the point x.

Let X be a Tychonoff space and $C(X)$ be Banach space of continuous bounded function on X with the norm $supremum\{|f(x)| : x \in X\}$. For any function $f \in C(X)$ we put $m_X(f) = infimum\{f(x) : x \in X\}$. Each function $f \in C(X)$ determine a minimization problem: find $x_0 \in X$ with $f(x_0) = m_X(f)$. We designate this problem by (X, f). The minimization problem (X, f) is is said to be *Tychonoff well-posed* if it has a unique solution x_0 and $x_n \to x_0$ whenever $f(x_n) \to m_X(f)$. We put $G^*(X) = \{g \in C(X) :$ *the function* m_X *is Gâteaux differentiable at* $g\}$ and $T_{wp}(X) = \{g \in C(X) :$ *the minimization problem* (X, g) *is Tychonoff well-posed*$\}$.

Theorem 2. *For a Tychonoff spaceX the following assertions are equivalent:*

1. On X there exists a complete metric which continuously fragmentable open subsets.

2. The space X contains a dense complete metrizable subspace.

3. The Player β has a winning strategy in the topological game $GM^c(X, S)$.

4. The set $T_{wp}(X)$ contains a dense G_δ-subset of the space $C(X)$.

5. The set $G^*(X)$ contains a dense G_δ-subset of the space $C(X)$.

6. For any quasi-open minimal set-valued mapping $F : Y \longrightarrow X$ with closed non-empty images $F(y)$, $y \in Y$, of a space Y with the Baire property into a space X the set $S = \{y \in Y : |F(y)| = 1$ and the mapping F is continuous at the point $y\}$ contains a dense G_δ-subset of the space Y.

Taras Goy

On connection between some number sequences using Hessenberg matrices

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: tarasgoy@yahoo.com

Let F_n, P_n, J_n and T_n be the Fibonacci, Pell, Jacobsthal and tribonacci numbers defined, for all integers $n \geq 0$, by $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$; $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$; $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, $J_0 = 0$, $J_1 = 1$; $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, $T_0 = T_1 = 0$, $T_2 = 1$, respectively.

Теорема 1 *Let $n \geq 1$, except when noted otherwise. Then*

$$\begin{aligned}
F_n &= \sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|+1} p_n(s) P_1^{s_1} P_2^{s_2} \cdots P_n^{s_n}, \\
F_{n+1} &= 2^{1-n} \sum_{\sigma_n = n} p_n(s) J_2^{s_1} J_3^{s_2} \cdots J_{n+1}^{s_n}, \qquad n \geq 2, \\
F_{n-1} &= \sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|+1} p_n(s) J_0^{s_1} J_1^{s_2} \cdots J_{n-1}^{s_n}, \\
F_{n-2} &= \sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|+1} p_n(s) T_0^{s_1} T_1^{s_2} \cdots T_{n-1}^{s_n}, \\
F_{2n+3} &= \sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|+n} p_n(s) P_3^{s_1} P_4^{s_2} \cdots P_{n+2}^{s_n}, \\
P_{n+2} &= \sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|+1} p_n(s) T_2^{s_1} T_3^{s_2} \cdots T_{n+1}^{s_n}, \\
P_{n+2} &= \sum_{\sigma_n = n} (-1)^{n+|s|} p_n(s) F_5^{s_1} F_7^{s_2} \cdots F_{2n+3}^{s_n}, \qquad n \geq 2,
\end{aligned}$$

where $\sigma_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, $|s| = s_1 + \cdots + s_n$ $(s_i \geq 0)$, and $p_n(s) = \binom{|s|}{s_1, \ldots, s_n}$ is the multinomial coefficients.

Our approach is similar in spirit to [1, 2].

[1] Goy T. *On new identities for Mersenne numbers* // Applied Mathematics E-Notes. – 2018. – **18**. – P. 100–105.

[2] Goy T. *Some families of identities for Padovan numbers* // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. – 2018. – **21**, no. 3. – P. 413–419.

Сергій Гефтер, Всеволод Марценюк, Олексій Півень

Цілочисельні розв'язки неявного лінійного різницевого рівняння другого порядку

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна
E-mail: gefter@karazin.ua, martsenyukvv@gmail.com,
aleksei.piven@karazin.ua

Розглядається різницеве рівняння другого порядку

$$cx_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n - f_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

де a, b, c і f_n–цілі числа $(n = 0, 1, 2, ...)$, $c \neq \pm 1$ та числа a, b і c є взаємно простими. В роботі вивчаються питання існування та єдиності розв'язку рівняння (1) у цілих числах.

Теорема 1 *Однорідне рівняння* $cx_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$ *має тільки нульовий розв'язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли характеристичне рівняння* $c\lambda^2 - b\lambda - a = 0$ *не має цілих коренів.*

Для простого числа p через $\mathbb{Z}_p$ позначається кільце цілих p - адичних чисел зі стандартною топологією.

Теорема 2 *Нехай числа* c *і* b *мають спільний простий дільник* p*, який не є дільником числа* a*, та* λ_1, λ_2 *– різні корені характеристичного рівняння* $c\lambda^2 - b\lambda - a = 0$*. Якщо рівняння (1) має розв'язок у цілих числах, то цей розв'язок є единим і може бути поданий у вигляді*

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \frac{(-1)^k c^k}{a^{k+1}} f_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

де збіжність ряду в правій частині рівності (2) розуміється в топології простору $\mathbb{Z}_p$*.*

Олексій Зеленський[1], *Валентина Дармосюк*[2]

Матриця показників з мінімальною сумою елементів для допустимих сагайдаків

[1]*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,*
м. Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: esteticcode@gmail.com
[2]*Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського,*
м. Миколаїв, Україна
E-mail: darmosiuk@gmail.com

Для допустимого сагайдака Q виберемо матрицею показників ε з мінімальною сумою елементів, цю суму позначимо $F(Q)$, а матрицю будемо називати мінімальною матрицею показників для сагайдака Q, а допустиму вагову функцію ω, яка визначає матрицю ε, називатимемо мінімальною ваговою функцією для сагайдака Q.

Теорема 1 *Сума елементів зведеної матриці показників з одиничним сагайдаком Q не перевищує $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.*

Теорема 2 $C_n^2 \leq F(Q)$.

Теорема 3 *Для допустимого сагайдака $Q = Q(\varepsilon)$, який є простим циклом (або без петель, або з петлею в кожній вершині) сума елементів ε дорівнює pC_n^2, де p-вага циклу.*

Теорема 4 *Для довільного сильнозв'язного сагайдака Q з петлею в кожній вершині $F(Q) \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$.*

[1] Hazewinkel M.,Gubareni N., Kirichenko V.V. *Algebras Rings and Modules*: vol. 1, Kluwer Academic Publisheers, 2004.–380 p.

[2] Hazewinkel M.,Gubareni N., Kirichenko V.V. *Algebras Rings and Modules*: vol 2., Kluwer Academic Publisheers, 2007.–400 p.

[3] Kirichenko V. V., Zelenskiy O. V., Zhuravlev V. N. *Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings*// International J. of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5– 6. – P. 1–16.

[4] Zelenskiy O. V. *Rigid quivers of reduced exponent matrices*//Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics and Mathematics. - 2007. - №3. - p.27-31.

[5] Zhuravlev V.N. *Admissible quivers*//Fundamental and Applied Mathematics.- 2008. - Vol. 14, no 7.- p. 121-128.

[6] Kirichenko V. V., Zhuravlev V. N.,Tsyganivska I. N. *On rigid quiver*//Fundamental and Applied Mathematics. - 2006.- Vol 12, no 8.- p. 105-120.

Віра Сікора

Про мінімальні системи твірних у вінцевих добутках скінченної кількості знакозмінних груп

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: v.sikora@chnu.edu.ua

Системи твірних у вінцевих добутках скінченної кількості знакозмінних груп вивчалися в роботах [1, 2]. Було встановлено, що кратний вінцевий добуток знакозмінних груп $A_{k_1} \wr A_{k_2} \wr ... \wr A_{k_s}$ (метазнакозмінна група рангу s та метастепеня $(k_1, k_2, ..., k_s)$, де $s \geq 2$, $k_i \geq 7$, $1 \leq i \leq s$) при довільному r ($4 \leq r \leq s$) має незвідні системи твірних, які складаються з r елементів. Це твердження було використане в [3] при побудові топологічних r-елементних систем твірних ($4 \leq r < \infty$) в метазнакозмінних групах нескінченного рангу. Природним є питання про мінімальну кількість елементів у незвідних системах твірних для таких груп та побудову таких мінімальних систем твірних. Справедлива наступна

Теорема 1 *Вінцевий добуток* $A_{k_1} \wr A_{k_2} \wr ... \wr A_{k_n}$ *скінченної кількості знакозмінних груп підстановок* A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_n} *степенів* k_1, k_2, ..., k_n *відповідно, містить мінімальну (щодо кількості елементів) систему твірних, яка складається з двох елементів.*

[1] Заводя М.В., Сікора В.С., Сущанський В.І. Системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – **Вип.** 314-315. – С. 64-72.

[2] Заводя М.В., Сікора В.С., Сущанський В.І. Двохелементні системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу // Математичні студії. 2010. – **Том** 34, N 1. – С. 3-12.

[3] Олійник Б.В., Сущанський В.І., Сікора В.С. Метасиметричні та метазнакозмінні групи нескінченного рангу // Математичні студії. 2008. – **Том** 29, N 2. – С. 139-150.

Секція

математичного моделювання

та інформаційних технологій

Radu Buzatu

BLP modelling of the convex cover problem of a graph

Moldova State University, Chişinău, Republic of Moldova
E-mail: radubuzatu@gmail.com

Convex cover problem of a graph is defined in [1]. Some latest results related to this problem can be found in [2].

A binary linear programming (BLP) formulation is proposed for the convex cover problem of a graph. For minimum convex partition problem of a graph a BLP model is already developed [3]. Similarly, with some minor modifications, minimum convex cover problem of a graph can be formulated as BLP. Obtaining a BLP for convex cover problem of a graph with a fixed number of convex sets is a little more challenging but also feasible and, more importantly, absolutely vital for further research. Therefore, these models are being developed and used in solving practical problems.

[1] D. Artigas, S. Dantas, M.C. Dourado, J.L. Szwarcfiter. *Convex covers of graphs* // Matemática Contemporânea, Sociedade Brasileira de Matemática. – 2010. – **Volume 39**. – P. 31–38.

[2] R. Buzatu, S. Cataranciuc. *On nontrivial covers and partitions of graphs by convex sets* // Computer Science Journal of Moldova. – 2018. – **Volume 26, no.1(76)**. – P. 3–14.

[3] R. Buzatu. *A binary linear programming model for minimum convex partition of a graph* // Proceedings of the International summer mathematical school in memorim V. A. Plotnikov. Odessa, Ukraine, June 11-16, 2018.

Arkadii Chikrii

Conflict: Analysis and Methods of Making Decision

Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Ukraine
E-mail: g.chikrii@gmail.com

We consider conflict-controlled processes in the case when the block of initial data is separated from control block in the description of the process dynamics. General form of the process trajectory presentation, lying at the heart of investigation, encompasses a wide class of functional-differential and fractional-order systems.

The method of resolving functions [1, 2] serves as a basic mathematical tool of this study. Scheme of the method employs the apparatus of set-valued mappings and inverse Minkowski' functional.

We deduce sufficient conditions for solvability of the game problem of approach in a finite time in the class of quasi- and stroboscopic strategies. Pontryagin's condition or one of its modifications stands for a key condition that allows a measurable control choice on the basis of the Filippov-Castaing theorem. In the case when this condition does not hold, on the basis of the support function properties the concept of upper and lower resolving functions [3] are introduced in order to realize the original idea. Use of the matrix resolving functions [4] essentially expands the class of conflict-controlled processes susceptible to study.

It should be noted that the game problems are analyzed in the frames of unified scheme for various process dynamics. What is more, the scheme also encompasses complicated processes with teams of participants on both counteracting sides. We illustrate situation of "encirclement"in the group pursuit and demonstrate effect of parallel pursuit in the successive pursuit, both justified with the help of the method of resolving functions [2]. In the case of spherical and ellipsoidal control domains the resolving function appears as the greater positive root of certain quadratic equation. This fact allows constructing control in analytic form.

Suggested technique is also efficient in the cases of distributed [5] and hybrid systems.

[1] Chikrii A.A. *An analytic method in dynamic pursuit games* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Vol. 271. – Pp. 69–85.

[2] Chikrii A.A. *Conflict-Controlled Processes.* – Dortrecht/Boston/London: Springer Science Business Media, 2013. – 424 p.

[3] Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. *Matrix resolving functions in game problems of dynamics* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2015. – **Vol. 291**, suppl. 1. – Pp. 56–65.

[4] Chikrii A.A., Chikrii V.K. *Image structure of multi-valued mappings in game problems of motion control* // J. of Automation and Information Sciences. – 2016. – **Vol. 48**, N3. – Pp. 20–35.

[5] Vlasenko L.A, Rutkas A.G., Chikrii A.A. *On a differential game in an abstract parabolic system* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. – **Vol. 293**, suppl 1. – Pp. 254–269.

G.Ts. Chikrii

Principle of time extension in dynamic games

Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: g.chikrii@gmail.com

Presentation concerns the time extension principle developed for solving the games of pursuit for which Pontryagin's condition [1] does not hold. This condition lies at the heart of all direct methods and reflects an advantage of the pursuer over the evader. Deep insight to this condition by M.S. Nikolskij [2] resulted in some its modification [3]. Close relation of the modified condition with the passage from the original game to an auxiliary game with delayed information was shown in [4]. It gave rise to the development of an efficient approach to solving complicated pursuit games, going under the title 'time extension principle'. Its central idea consists in introduction of the time extension function, through which the function of information delay is expressed. The principle proved its efficiency for solving the problems of soft meeting for a number of second-order linear differential games, for which the time extension function is found in explicit form [4]. In this presentation we apply it to the games with dynamics of general form, encompassing a wide range of the functional-differential systems [5]. Sufficient conditions on the game parameters are derived insuring feasibility of the game termination at a finite instant of time. In so doing, the pursuer constructs its current control on the basis of the evader's control in the past. Existence of a measurable control is provided by the Filippov-Castaing theorem on measurable choice. By way of example we study a model of conflict interaction of two moving objects with the integro-differential dynamics. Sufficient conditions on the motions parameters are derived, insuring possibility for the finite-time capture.

[1] Понтрягин Л.С. *Избранные научные труды: Т. 2.*- М.: Наука, 1988. – 576 с.

[2] Никольский М.С. *О применении первого прямого метода в линейных дифференциальных играх* // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики. – 1972. – №10. – С. 51–56.

[3] Зонневенд Д. *Об одном методе преследования* // ДАН СССР. – 1972. – **Т. 204**, №6. – С. 1296–1299.

[4] Chikrii G.Ts. *Using the effect of information delay in differential pursuit games* // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – **Vol. 43**, No.2.– P. 233–245.

[5] Chikrii G.T. *Principle of time stretching in evolutionary games of approach* // Journal of Automation and Information Sciences. – 2016. – **Vol. 48**, No 5. – P. 12-26.

Nataliya Kharchenko

Consensus State of Opinion Dynamical System

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine
E-mail: dovbysh@imath.kiev.ua

We propose a model which describes the probability of choosing one of multiple options. Our model was inspired by Deffuant-Weisbuch model [1] and the model studied in [2]. In these models interaction of two agents decreases the distance between their opinions. In our model we propose the other approach to describing opinions redistribution, but we get similar dynamics. When we consider interaction of a pair of agents we get their opinions distributions become closer in l_1-metrics.

Consider a spread of $n \geq 2$ opinions on a network. Each agent in the network may hold one of the opinions with some probability at any time t $(t \geq 0)$, that is each agent is associated with a stochastic vector $\mathbf{p}^v(t) = (p_1^v(t), ...p_n^v(t))$. We call $\mathbf{p}^v(t)$ an *opinion distribution* of agent v at time t. Note that $\sum_{i=1}^n p_i^v(t) = 1$.

At each time step we randomly choose a agent v and update its opinion distribution in the following way. We randomly choose one of its neighbours u and update vectors $\mathbf{p}^v(t)$ and $\mathbf{p}^u(t)$ by the rule of attractive interaction [3]:

$$p_i^v(t+1) = \frac{1}{z^{v,u}(t)} p_i^v(t)(1 + p_i^u(t)), p_i^u(t+1) = \frac{1}{z^{v,u}(t)} p_i^u(t)(1 + p_i^v(t)), \quad (1)$$

where $z^{v,u}(t)$ is a scaling coefficient.

Теорема 1 *If all the agents in the network have such opinion distribution that* $p_1^v(t) = max_{i=\overline{1,n}}\{p_i^v(t)\}$, *then the system converges to the consensus state* $(1, 0, ...0)$.

[1] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, and G. Weisbuch. *Mixing beliefs among interacting agents* // Adv. Compl. Syst. – 2000. – **3**. – P. 87–98.

[2] L. Li, A. Scaglione, A. Swami, Q. Zhao. *Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks* // IEEE J. on Selected Areas in Communications. – 2013. –**31**, 6. –P. 1072-1083.

[3] S. Albeverio, M. V. Bodnarchuk, V. D. Koshmanenko. *Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents* // Methods Funct. Anal. Topology. –2005. –**11**, 4. –P. 309-319.

Tatyana Knignitska, Igor Malyk

Method for Evaluating Time Series Similarity

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: knig.tatyana.v@gmail.com, malyk.igor.v@gmail.com

Existing studies on time series are based on two categories of distance functions. The first category consists of the L_p–norms. They are metric distance functions but cannot support local time shifting. The second category consists of distance functions which are capable of handling local time shifting but are nonmetric. The main result of the work is clustering optimization based on the selection of model parameters and the best model $ARMA(p,q), p <= P, q <= Q$ according to the developed algorithm for finding distances. The basic time series model has the form

$$\Phi(L) = \phi_0 + \phi_1 L + ... + \phi_p L^p,$$

$$\Theta(L) = \theta_0 + \theta_1 L + ... + \theta_p L^p.$$

As a measure of similarity between models, the following measure is determined

$$HM(G_1, G_2, ..., G_m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{n_k - 1} \sum_{i<j \in G_k} d(M_i, M_j), \tag{1}$$

$$d(M_i, M_j) = \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\theta}_k^i - \tilde{\theta}_k^j| \tag{2}$$

is a distance between time series i-th and j-th models. The important thing is that distance will be interpreted precisely as the distance between the models of time series, not distance between data.

[1] Brockwell, Peter J., Davis, Richard A. *Introduction to Time Series and Forecasting.* – NY: Springer, 2012. – P. 500.

[2] Luis E. Nieto-Barajas, Alberto Contreras-Crist. *A Bayesian Nonparametric Approach for Time Series Clustering* // Bayesian Analysis. – 2014. – **Vol.**, 9. – P. 147-170.

Ludmila Novac

About the the Informational Extended Games and their applications

Moldova State University
E-mail:novac-ludmila@yandex.com

The non-cooperative Informational Extended Games are such static games in which the players choose their actions simultaneously, with assumption that they have some information about the future strategies which will be chosen by other players. All informational extended games of this type assume that players payoff functions are common knowledge. The informational extension concept for games has on its basis the assumptions that the participants of the game have possibility to send and to receive (or to guess) some information about the chosen strategies of other participants and about their behavior. This type of games is a particular case of Howard meta-games. We analyze the discreet case (so called informational extended bimatrix games) and the informational extended games with continuous functions. The conditions of the Nash equilibria existence for the informational extended games are defined for both cases. We analyze some applications of the informational extended games.

Vladislav Seichiuc, Eleonora Seichiuc, Gheorghe Carmocanu

Developing an intelligent support system to solve integral equations of the second order

Trade Co-operative University of Moldova, Chişinău, Republic of Moldova
Moldova State University, Chişinău, Republic of Moldova
E-mail: seiciucvladislav@gmail.com, gcarmocanu@yahoo.com

The elaboration of numerical and approximate methods for solving of integral equations (IE) remains an actual problem, but, IEs can be exactly solved just in special cases. At present, these methods are increasingly integrated into Intelligent Software Tools aimed for solving of certain IE classes. One of such Intelligent Software Tools is Intelligent Support System (ISS) for approximate solving of Fredholm and Volterra IE (ISS_IE) of the second order (see [1]). The ISS_IE is based on the following received results:

– new and efficient computing algorithms for spline-collocations methods to solve of Fredholm and Volterra IE of the second order are developed;

– new and efficient computing algorithms for spline-quadratures methods to solve of Fredholm and Volterra IE of the second order have also been obtained;

– a theoretical substantiation of the developed computing algorithms is obtained in the space of continuous functions and in the Hölder spaces;

– for elaborated algorithms the ISS_IE of the second order is developed.

The core components of ISS_IE are: 1) the Base of Kernel Prototypes of IE (BPK_IE_COMP) for checking the sufficient conditions of IEs compatibility; 2) the Base of Kernel Prototypes of IE (BPK_IE_COL) for solving IE by spline-collocations methods; 3) the IE Solver (IES), accompanied by the convenient interface during the solving of integral equations.

[1] Seichiuc E. *The approximate solving of Integral Equations by the Intelligent Software Tools.* Abstract of PhD thesis in physics and mathematics. –Chişinău: MSU, 2008, –27 p.

Yurii Sheliazhenko

Two-Agent Model of Personal and Group Autonomy in Distributive Justice

KROK University of Economics and Law, Kyiv, Ukraine
E-mail: yuriy.sheliazhenko@gmail.com

Legal analysis needs mathematical methods to clarify the principles and norms of law. Presenting conception of justice as equal distribution of liberty and wealth, Rawls used Kant's notion of autonomy to describe agency of one or more persons and suggested further mathematical refinement [1]. Some models for this purpose are already proposed [2]. In the next iterative model, agents $A_n(t)$ and $B_n(t)$ donate equal parts $0 < t < 1$ of wealth to reduce inequality gap via practicing charity, in Ukraine regulated by the Law on Charity and Charitable Organisations. Personal autonomy model (1) is based on direct mutual donations:

$$A_0 = a,\ B_0 = b,\ A_{n+1} = (1-t)A_n + tB_n,\ B_{n+1} = (1-t)B_n + tA_n \qquad (1)$$

Theorem 1 *Charity leads to equality* $\lim\limits_{n\to\infty} A(t)_n = \lim\limits_{n\to\infty} B(t)_n = \frac{a+b}{2}$

Proof. Let $M_n = \frac{1}{2}(1-(1-2t)^n)$. The next formulas can be proved by mathematical induction: $A_n = a + (b-a)M_n$; $B_n = b + (a-b)M_n$. Since $-1 < 1-2t < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \frac{1}{2}$ and the theorem is proved.

Group autonomy (2) demands to collect charitable donations as a common asset and distribute it equally among all members of the group:

$$A^G_{n+1} = (1-t)A^G_n + t \times \frac{A^G_n + B^G_n}{2},\ \ B^G_{n+1} = (1-t)B^G_n + t \times \frac{A^G_n + B^G_n}{2} \qquad (2)$$

Theorem 2 *Group autonomy model is equivalent to personal autonomy model with half donation* $A^G_n(t) = A_n(t/2)$, $B^G_n(t) = B_n(t/2)$.

A proof is obvious. It illustrates why, in the words of Rawls, well-ordered society affirms the autonomy of persons. Millionaire $a = 10^6$ and pauper $b = 0$ donating $t = 0.1$ of wealth need $n = 62$ iterations in personal and $n = 132$ in group autonomy model to reduce gap under \$1.

[1] Rawls J. *A Theory of Justice: Revised Edition.* – Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press, 1999. – 538 p.

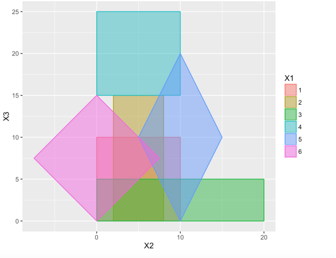
[2] Sheliazhenko Y. *Computer Modeling of Personal Autonomy and Legal Equilibrium* // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2018. – Vol. 765. – Pp. 74-81. – DOI: 10.1007/978-3-319-91192-2_8. – arXiv: 1808.05379

Tetyana Sopronyuk

Using Boost.Geometry Models to Convert the Basic R Data Types

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: t.sopronyuk@chnu.edu.ua

This abstract proposes a combination of powerful C++ and R programming languages for solving some geometric tasks. The Rcpp package is the most widely used language extension for R. It provides a powerful API that allows to directly exchange objects between R and C++. Consider a set of polygons stored as *dataframe* (data type of the R language) and visualized by R package *ggplot2*.



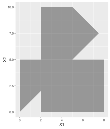
Let's consider the following transformations from R types to Boost.Geometry types and vice versa. Such transformations are carried out using two converting functions as() and wrap(), the prototypes of which are shown below.

```
// ‘as‘ converter from R to Boost.Geometry’s polygon type
template <> polygon as (SEXP pointsMatrixSEXP);
// ‘wrap‘ converter from Boost.Geometry’s polygon to an R (cpp) matrix
template <> SEXP wrap (const polygon & poly);
```

We wrote a set of C++ functions to perform the operations with polygons. These functions used the powerful capabilities of Boost.Geometry.

After certain transformations, the results are returned to the r-script. Thus, complex computational transformations are performed in C++ language, and the visualization - in R language.

For example, the result from the intersection of at least 2 of the original polygons 1,2,3 and 6 is shown below.



Yaroslav Vyklyuk, Petro Sydor

Hurricane forecasting using by machine learning

Computer System and Technologies dep, PHEI "Bukovinian
university Chernivtsi, UKRAINE
E-mail: vyklyuk@ukr.net, sydor.pete@gmail.com

This research is devoted to determinate the causal relationship between the flow of particles that are coming from the Sun and emergence of the hurricanes Irma, Jose, and Katia. Five parameters i.e. characteristics of solar activity (Radio Flux 10.7, the flows of protons and electrons with maximum energy, speed of solar wind particles, and density of solar wind particles) were chosen as model input, while wind speed and air pressure of Irma, Jose, and Katia hurricanes were used as model output. Input data were sampled to six hours interval in order to adapt time interval to the observed data about hurricanes, in the period between 28 September and 21 December 2017. As a result of the preliminary analysis of 12 274 264 linear and 594 Neural Networks models using by parallel calculations, the six of them were choose as bests[1]. The identified lags were the basis for refinement of models with the artificial neural networks. Multilayer perceptrons with back propagation have been chosen as common used artificial neural networks which are based on learning from real data. Comparison of the accuracy of both linear and artificial neural networks results confirmed the adequacy of these models. Sensitivity analysis has shown that Radio Flux 10.7 has the greatest impact on the wind speed of the hurricanes. Despite low sensitivity of pressure to change the parameters of solar wind, their strong fluctuations can cause a sharp decrease in pressure, and therefore the appearance of hurricanes.

Research in this paper has shown that applied model is accurate and adequate to predict the appearance of hurricanes 2-4 days ahead, after the outbreak of Sun Wind.

[1] Vyklyuk, Y., Radovanovic, M., Milovanovic, B., Leko, T., Milenkovic, M., Miloљevic, Z., et al. (2017). Hurricane genesis modelling based on the relationship between solar activity and hurricanes. Natural Hazards, 85(2), 1043–1062.

Дмитро Бобилєв

Регуляризація розв'язку при дослідженні НДС в задачах геомеханіки

Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна
E-mail: dmytrobobyliev@gmail.com

Однією із актуальних обчислювальних проблем моделювання є розрахунок властивостей тіл з малими і тонкими елементами структури, оскільки розширилось коло практичних питань, пов'язаних з проведенням таких розрахунків. Одним із перспективних є підхід, що базується на застосуванні теорії інтегральних рівнянь до опису напружено-деформованого стану таких структур та його чисельна реалізація методом граничних елементів (МГЕ). Перевага МГЕ в тому, що дискретизація потрібна тільки на границі досліджуваної області. Це приводить до систем істотно більш низького порядку, ніж в інших методах. Розв'язання задач при наявності малих і тонких областей зазвичай пов'язано з появою обчислювальної нестійкості і втратою точності [1]. При використанн МГЕ можливе виникнення нестійкості, що пов'язана з близькістю границі тонких елементів структури і використанням інтегральних рівнянь для переміщень. В більшості роботах використовується метод усереднення, а також гіпотези теорії пластин. В той же час потужні методи регуляризації не використовуються в повній мірі. Досліджувалось багатозв'язне кусково-однорідне тіло з отворами та тонкими елементами структури. На основі рівнянь класичної двовимірної теорії пружності, побудовано математичну модель, який описує напружено-деформований стан вказаного тіла в такій формі, що дозволяє розв'язати дану задачу за допомогою МГЕ та провести регуляризацію МГЕ-розв'язку (метод Тихонова, градієнтний метод); розроблено ефективний підхід до регуляризації градієнтним методом розв'язання задач для тіл з тонкими елементами структури, що дозволяє отримати стійкий чисельний метод для розв'язання двовимірної крайової задачі.

[1] Бормотин К. С., Олейников А. И. *Эффективная регуляризация метода граничного элемента при моделировании изделий с покрытиями.* – Информатика и системы управления. – 2004. – № 2. – С. 19-26.

Андрій Бомба [1], *Михайло Бойчура* [2]

Узагальнення числових методів комплексного аналізу розв’язання задач ідентифікації за даними томографії прикладених квазіпотенціалів

[1] *Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна*
E-mail: abomba@ukr.net
[2] *Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна*
E-mail: mboichura@gmail.com

Розглядається задача ідентифікації параметрів коефіцієнта провідності неоднорідного середовища за даними томографії прикладених квазіпотенціалів [1 – 3]. Пропонується варіант узагальнення методу реконструкції зображення, суть якого полягає у почерговому розв’язуванні задач аналізу (на основі числових методів квазіконформних відображень) і задач синтезу (параметричної ідентифікації) шляхом збільшення кількості ділянок прикладання квазіпотенціалів [4, 5]. На основі проведених числових розрахунків побудовано реконструйоване зображення розподілу провідності у внутрішності досліджуваного об’єкта при серії інжекцій для областей з двома та трьома ділянками прикладання квазіпотенціалів.

[1] Бомба А. Я., Бойчура М. В. *Метод прикладених квазіпотенціалів розв’язування коефіцієнтних задач ідентифікації параметрів* // Вісник НУВГП. Технічні науки: зб. наук. праць. – 2017. – **76**, 4. – С. 163-177.

[2] Бомба А. Я., Крока Л. Л. *Числовий метод квазіконформного відображення розв’язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії приклade-них потенціалів* // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2014. – **11**. – С. 24-33.

[3] Bomba A. Ya., Boichura M. V. *On a numerical quasiconformal mapping method for the medium parameters identification using applied quasipotential tomography* // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – **4**, 1. – P. 10-20.

[4] Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярощак С. В. *Методи комплексного аналізу: монографія.* – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.

[5] Бойчура М. В. *Узагальнення числового методу квазікнформних відображень розв’язання задач ідентифікації за даними томографії прикладених квазіпотенціалів* // Вісник КрНУ. – 2017. – **106**, 5. – С. 35-44.

Катерина Геселева

Колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: geseleva1702@gmail.com

Розглядається в просторі $L_2[a,b]$ інтегро-функціональне рівняння

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt + \int_a^b H(x,t)y(h(t))dt,\ x \in [a,b], \tag{1}$$

з умовою

$$y(x) = \psi(x),\ x \notin [a,b], \tag{2}$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx = \gamma_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

де $f(x)$, $\psi(x)$ – задані відповідно на $[a,b]$ та за його межами функції, а $y(x)$ – шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій $\Phi_i(x)$ та числова множина γ_i, $i = \overline{1,m}$ – відомі.

Задачу (1)-(3) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє умову (2) та обмеження (3) [1].

Розглядається випадок, коли функції $K(x,t)$, $H(x,t)$ в квадраті $[a,b]^2$ задовольняють умови

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt = K^2 < \infty, \tag{4}$$

$$\int_a^b\int_a^b H^2(x,t)dxdt = H^2 < \infty, \tag{5}$$

де функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $[a,b]$ і справджуються нерівності

$$x - h(x) \geq \Delta > 0, \tag{6}$$

$$h'(x) \geq 0. \tag{7}$$

Ідея колокаційно-ітеративного методу [2] стосовно задачі (1)-(3) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул:

$$y_k(x) = u_k(x) + z_k(x), \tag{8}$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \xi_i(x),\ x \in [a,b],\ u_k(x) = 0,\ x \notin [a,b], \tag{9}$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx = \gamma_i, i = \overline{1,m}. \tag{10}$$

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)(y_{k-1}(t) + w_k(t))dt +$$

$$+ \int_a^b H(x,t)(y_{k-1}(h(t)) + w_k(h(t)))dt. \tag{11}$$

$$w_k(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s^k \varphi_s(x), \tag{12}$$

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - y_{k-1}(x_i) = 0. \tag{13}$$

У проведених дослідженнях отримано умови сумісності задачі (1)-(3) та умови збіжності методу (8)-(13).

[1] Лучка А.Ю. *Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения* // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – **Том**, 3. – С. 82-96.

[2] Поселюжна В.Б., Семчишин Л.М. *Колокаційно-ітеративний метод розвязування диференціальних та інтегральних рівнянь.* – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – 203 с.

Тетяна Готинчан

Визначення розміру страхових премій у статичній моделі страхування у випадку декількох однорідних груп клієнтів

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Страхування та ринок страхових послуг є важливими складовими для соціально-економічного та інвестиційного розвитку, як національного ринку, так і на міжнародному рівні. Найдоцільніше для створення портфеля страхових полісів використовувати апарат математичного моделювання. Моделювання дозволяє в короткі терміни отримати необхідні характеристики портфеля у залежності від кон'юнктури ринку. Існує цілий ряд загальновизнаних моделей, що дозволяють оцінити основні характеристики (прибутковість і ризик) такого портфеля [1, 2].

Розглядається статична модель страхування [1], у якій задіяно $m \in \mathbb{N}$ груп однорідних клієнтів відповідно чисельністю n_i, і ризиками X_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Кожна сторона страхової угоди має свою систему переваг, яка характеризується зазвичай функцією неприйняття ризику $r(S)$ і відповідно функцією корисності $u(S)$, де S – капітал [1]. Відповідно до загальної теорії записуються оптимізаційні задачі визначення індивідуальних страхових премій клієнтів. У випадку експоненціальних функцій корисності страхової компанії та предстаників груп отримано умову угоди можливості страхування клієнтів. Крім того, розглянуто методи побудови ваг для зведення багатокритеріальної оптимізаційної задачі до однокритеріальної із застосуванням методу Паретто-оптимальності.

[1] Голубин А.Ю. *Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация.* – М.: Анкил, 2003. – 160 с.

[2] Берлин М.С.. *Моделі управління фінансовою стійкістю страхової компанії* // автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата економічних наук. – Донецьк: Юго-ВостокЛтд, 2008. – 14 с.

Андрій Громик

Математичне моделювання коливних процесів у обмежених кусково-однорідних клиновидних циліндрично-кругових середовищах

Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: gapon74@gmail.com

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D_k = \{(t,r,\varphi,z)|t>0; r\in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}(R_{j-1};R_j);$$

$$\varphi\in(0;\varphi_0), \varphi_0<2\pi; z\in(-l_1;l_2); l_j\geq 0; l_1+l_2\neq 0\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+ \tag{1}$$

$$+\chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}$$

з відповідними початково-крайовими умовами [2], умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Big|_{z=R_k} = 0; \tag{2}$$

$$j=1,2;\ k=\overline{1,n}$$

й одними з крайових умов на гранях клина

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t,r,z);\ u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t,r,z)\, r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{3}$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t,r,z);\ \frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t,r,z)\, r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t,r,z);\ u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t,r,z)\, r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t,r,z);\ \frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t,r,z)\, r\in I_j; \tag{6}$$

$$j=\overline{1,n+1}.$$

Щодо проміжку I_n^+ розглянуто 4 канонічних випадки:
1) $R_0=0$; $R_{n+1}=+\infty$ (клиновидний шар);

2) $R_0 > 0$; $R_{n+1} = +\infty$ (клиновидний шар з порожниною);

3) $R_0 = 0$; $R_{n+1} = R < +\infty$ (клиновидний суцільний циліндр);

4) $R_0 > 0$; $R_{n+1} = R < +\infty$ (клиновидний порожнистий циліндр).

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$; $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$; $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$; $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$; $\beta_{22}^k = 0$ (E_1, E_2 – модулі Юнга), то умови спряження (2) збігаються з умовами ідеального механічного контакту.

Отже, розглянуті гіперболічні крайові задачі математичної фізики можна вважати узагальненими математичними моделями коливних процесів в обмежених за змінною z кусково-однорідних за радіальною змінною r клиновидних за кутовою змінною φ циліндрично-кругових середовищах.

Інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних крайових задач одержано методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків. Побудовані розв'язки мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних клиновидних середовищах, які описуються циліндричною системою координат. Проведено аналіз одержаних розв'язків у залежності від типу крайових умов на гранях клина $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$.

[1] Самойленко В.Г., Конет І.М. *Рівняння математичної фізики.* – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2014. – 283 с.

[2] Конет І.М., Пилипюк Т.М. *Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах.* – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2017. – 84 с.

Згуровський М. З., Перестюк М. М.

Системне дослідження цивілізаційних розривів на початку 21-го століття

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Дослідження є продовженням та поглибленням цивілізаційного підходу Самуеля Хантінгтона до явищ глобальної взаємодії між культурами світу [1], на основі застосування кількісного та якісного аналізу відмінностей між світовими цивілізаціями шляхом проведення їх експертного попарного, порівняльного оцінювання. Робиться спроба виявити та вивчити закономірності впливу глобальних світових загроз на процеси змішування, часткового або повного поглинання одними цивілізаціями інших. Досліджуються кількісні характеристики «розривів» вздовж ліній розлому між існуючими цивілізаціями та їх зміни з часовим інтервалом 10 років [2-4].

Згідно теорії С. Хантінгтона, домінуючим чинником світової політики стануть саме цивілізації, а характер поведінки країн світу визначатиметься взаємодією і зіткненнями між окремими цивілізаціями. Це створить принципово інший, у порівнянні з сьогоденням, світовий порядок, в якому конфлікти між різними цивілізаціями переважатимуть над конфліктами всередині окремо взятих цивілізацій. Тому, за Хантінгтоном наступні глобальні загострення у світі будуть виникати вздовж ліній розлому між різними цивілізаціями [1].

В дослідженні наведено групу з 12 глобальних загроз для людства на початку 21 віку. Серед них є наростаючий дисбаланс між біоємністю Землі та сумарним споживанням цих ресурсів. Нестримною економічною, військовою і технологічною конкуренцією людство все більше і більше знекровлює біологічно продуктивні ресурси Планети. Як результат – боротьба за контроль за рештками природних ресурсів, в першу чергу вуглеводнів, у світі продовжує зростати, на фоні стрімкого зростання населення Землі, породжуючи все нові і нові конфлікти. Як наслідок, інтегральна конфліктність світу зростає. Природні аномалії та військові зіткнення поступово призводять до збільшення міграції цілих народів в регіони з більш комфортними умовами життя. Зазначені тенденції обумовлюють новий виклик перед наукою, який полягає у створенні науково-обґрунтованих методів аналізу зазначених процесів та напрацювання рекомендацій щодо раціонального розвитку людства на короткострокову та довгострокову перспективу.

В дослідженні уточняється цивілізаційний розподіл, запропонований С. Хантінгтоном, та з використанням методів експертного оцінювання здійснюється, науково-обґрунтована кластеризація країн за критеріями та ознаками, притаманними культурам відповідних цивілізацій та їх субцивілізацій (відмінності між якими рідко бувають яскраво вираженими, хоча цивілізаційні розбіжності є цілком реальними [1]).

На наступному етапі дослідження обчислюється середнє значення ступеню віддаленості груп країн світу, що входять до складу цивілізацій, від сукупності глобальних загроз та робиться спроба вивчення закономірностей їх впливу на окремі цивілізації.

З метою чіткої диференціації, формується набір інформативних та універсальних критеріїв для оцінювання культурних відмінностей між цивілізаціями.

За підсумками роботи групи експертів, було сформульовано 8 базових критеріїв, які найповніше характеризують культурні відмінності між цивілізаціями: 1. Цінність життя людини (діапазон: «Життя людини нічого не варте» - «Життя людини – найвища цінність»); 2. Свобода особистості в суспільстві (ступінь свободи пересування, свободи висловлення поглядів, свободи в особистому житті. . .); 3. Статус жінки в суспільстві (діапазон: «Повне домінування чоловічої статі» - «Гендерний паритет» - «Повне домінування жінки»); 4. Ступінь проникнення релігії в життя (діапазон: «Релігійні та церковні інститути взагалі не впливають на життя людей» - «Релігійні та церковні інститути визначальним чином впливають на життя людей»); 5. Етнічна однорідність (ступінь толерантності міжетнічних відносин всередині цивілізації); 6. Відкритість або закритість щодо інших культур (ступінь відкритості або закритості цивілізації); 7. Традиціоналізм в культурі і мисленні (схильність до змін в традиціях і світогляді); 8. Ступінь радикалізму в політичному житті (стабільність політичного життя та швидкість змін політичних курсів) [4].

Для проведення експертного оцінювання відмінностей між цивілізаціями на основі використання вищенаведених восьми критеріїв створюється група експертів, які мали досвід міжнародної діяльності в групах відповідних країн. Експерти оцінили культурні відмінності між цивілізаціями для кожного з критеріїв, привласнюючи якісні та кількісні значення, з використанням системи оцінок за шкалою Міллера. На основі визначення кількісних оцінок, за представленими 8 критеріями та застосовуючи математичний апарат багатофакторного регресійного аналізу сформовані профілі відмінностей між цивілізаціями, і визначені «зближення» і «розломи» між ними.

Зроблено висновки про те, що потенційні конфлікти можуть відбуватися між цивілізаціями, перш за все по лініях розломів, чисельні значення яких є найбільшими. І навпаки: потенційні об'єднання цивілізацій можуть відбуватися по лініях розломів, чисельні значення яких є найменшими. Використовуючи результати кластеризації відстаней, чисельні значення загальних розломів між цивілізаціями і сукупні відмінності цивілізацій, сформовано бачення на ближче і віддалене майбутнє щодо можливих об'єднань і конфліктів між світовими культурами.

Провівши порівняльний аналіз з результатами досліджень проведених у 2008 році [2,3], отримано дані, які можуть стати науково-обґрунтованою основою для передбачення створення ряду об'єднань та альянсів країн світу, а також для моделювання поведінки та розвитку окремих країн світу.

[1] 1. Samuel P. Huntington *The Clash of Civilizations?*. – Foreign Affairs, – Vol. 72., No.3 – (Summer, 1993), pp. 22-49.

[2] 2. Michael Zgurovsky, Alexis Pasichny. Modelling of the civilizations' break lines in context of their fundamental cultural differences // System Research and Information Technologies, №1, 2009. – 18p.

[3] 3. Alexis Pasichny. Two Methods of Analysis for Huntington's "Clash of Civilizations" // Social Sciences in Technologies, 2009. – p. 23-25.

[4] 4. М. З. Згуровський, М. М. Перестюк. Моделювання ліній розлому цивілізацій в контексті їх фундаментальних культурних відмінностей// Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали 20-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2018/ К. : ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – с. 10

Іван Конет, Тетяна Пилипюк

Еліптичні крайові задачі в обмежених кусково-однорідних циліндрично-кругових областях

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D_k = \{(r,\varphi,z)|r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j);$$

$$\varphi \in [0; 2\pi); z \in (-l_1; l_2); l_j \geq 0; l_1 + l_2 \neq 0\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу 2-го порядку [1]

$$\left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] u_j - \tag{1}$$

$$-\chi_j^2 u_j = -f_j(r,\varphi,z);\ r \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}$$

з крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h_1\right) u_j \bigg|_{z=-l_1} = w_j^1(r,\varphi);\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + h_2\right) u_j \bigg|_{z=l_2} = w_j^2(r,\varphi); \tag{2}$$

$$j = \overline{1, n+1},$$

умовами спряження [2]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\bigg|_{r=R_k} = 0; \tag{3}$$

$$j = 1, 2;\ k = \overline{1, n},$$

та відповідними крайовими умовами на межі проміжку I_n^+, де

a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, h_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі сталі;

$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0$; $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$;

$f(r,\varphi,z) = \{f_1(r,\varphi,z),\ f_2(r,\varphi,z),\ ..., f_{n+1}(r,\varphi,z)\}$;

$w^1(r,\varphi) = \{w_1^1(r,\varphi),\ w_2^1(r,\varphi),\ ..., w_{n+1}^1(r,\varphi)\}$;

$w^2(r,\varphi) = \{w_1^2(r,\varphi),\ w_2^2(r,\varphi),\ ..., w_{n+1}^2(r,\varphi)\}$; – задані обмежені неперервні функції;

$u(r,\varphi,z) = \{u_1(r,\varphi,z),\ u_2(r,\varphi,z),\ ..., u_{n+1}(r,\varphi,z)\}$– шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Стосовно проміжку I_n^+ розглянуто 4 канонічних випадки:
1) $R_0 \equiv 0$; $R_{n+1} \equiv +\infty$ (шар);
2) $R_0 > 0$; $R_{n+1} \equiv +\infty$ (шар з порожниною);
3) $R_0 \equiv 0$; $R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (суцільний циліндр);
4) $R_0 > 0$; $R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (порожнистий циліндр).

Інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних крайових задач одержано методом класичних інтегральних перетворень Фур'є та гібридних інтегральних перетворень (Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го роду, Ганкеля 2-го роду) у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна). Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків стаціонарних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

[1] Самойленко В.Г., Конет І.М. *Рівняння математичної фізики.* – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2014. – 283 с.

[2] Конет І.М., Пилипюк Т.М. *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах.* – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2017. – 84 с.

Юрій Крак [1], *Григорій Кудін* [2], *Дмитро Шкільнюк* [3]

Шкалювання характеристичних ознак для кластеризації та класифікації інформації з використанням засобів псевдообернення матриць

[1] *Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*
E-mail: krak@univ.kiev.ua
[2] *Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, Київ, Україна*
E-mail: gkudin@ukr.net
[3] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: dimonshk@gmail.com

При вирішенні проблем кластеризації та класифікації інформації часто виникають потреби візуалізації результатів в рамках істотного зменшення розмірності простору ознак – класи та кластери мають відображатися на площині або в тривимірному просторі. Підходи до такої візуалізації даних пропонує метод багатовимірного шкалювання – сукупність методів аналізу емпіричних даних про близькість об'єктів, за допомогою яких визначається розмірність простору істотних для даної змістовної задачі характеристик вимірюваних об'єктів і конструюється конфігурація точок (об'єктів) в цьому просторі. Цей простір – багатовимірна шкала – значення істотних характеристик вимірюваних об'єктів, яким відповідають певні позиції на вісях простору. Математичне формулювання цілей багатовимірного шкалювання – це пошук і інтерпретація в вихідному просторі ознак нових змінних, що дають можливість, на підставі даних про взаємно попарні відстані між об'єктами, сформулювати ступінь подібності між об'єктами простору ознак – відстані або інші міри подібності об'єктів між характеристиками об'єктів [1, 2].

В доповіді пропонується розвиток засобів синтезу систем класифікації, кластеризації даних з використанням засобів псевдо обернення матриць для вирішення задач візуалізації інформації відносно взаємного розташування об'єктів класифікації і/або кластеризації на послідовності дво-, три- вимірних площин в деякому просторі, відмінному від початкового простору ознак. Для вирішення поставлених проблем істотно використовуються результати Кириченка М.Ф. з теорії збурення псевдо обернених і проекційних матриць [3, 4]. Доповідь містить тезисне викладення основних означень та співвідношень теорії псевдо обернених і проекційних матриць, відповідні подання відстаней відповідності між елементами та об'єктами просторів. Наведено алгоритми побудови кусково гіперплощинних кластерів, які забезпечують вирішення поставленої проблеми.

Ефективність запропонованого методу шкалювання інформації була продемонстрована на розпізнаванні дактилем української жестової мови [5], де в якості характеристичних ознак були взяті 52 ознаки, розподілені на 6 груп, залежно від способу їх отримання. Експерименти проводились з групами ознак, які характеризують геометро-топологічні характеристики кисті руки людини при показі букв дактильної абетки і для яких було отримано прийнятну якість розпізнавання [5]. На прикладі класифікації дев'яти букв абетки (А, Б, В, Г, Ж, І, Е, И, Й) за п'ятьма і трьома ознаками, було отримано роздільність цих дактилем на площині шкалювання. Відзначимо, що використання п'яти характеристичних ознак дозволило отримати більш чітку віддільність (відстані букв від площини шкалювання були в межах від 0.1580 до 0.3828) тоді як при використанні трьох характеристичних ознак відстані від площини шкалювання були значно менші (в межах від 0.0306 до 0.1274), тобто у три-п'ять разів менші. Виключення становила дактилема Б, як в першому випадку (0.0177), так і в другому випадку (0.0073), віддільність від площини шкалювання була незначною, що може свідчити про складність розпізнавання саме цієї дактилеми за даними характеристичними ознаками.

Подальші дослідження будуть спрямовані на удосконалення запропонованого методу і його застосування до всіх букв української дактильної жестової мови з метою отримання оптимального шкалювання характеристичних ознак для надійного розпізнавання.

[1] Девисон М. *Многомерное шкалирование. Методы наглядного представления данных.* – М.: Финансы и статистика, 1988. – 254 с.

[2] Воронцов К.В. *Лекции по алгоритмам кластеризации и многомерного шкалирования.* – 2007. – 18 с. Ресурс: http://www.ccas.ru/voron/download/Clustering.pdf.

[3] Kirichenko N.F. *Analytical representation of perturbations of pseudoinverse matrices* // Cybernetics and Systems Analysis. – 1997. – **33**, 2. – P. 230-238.

[4] Кириченко Н.Ф., Кудин Г.И. *Анализ и синтез систем классификации сигналов средствами возмущений псевдообратных и проекционных операций* // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – 3. – Р. 47-57.

[5] Kryvonos, I.G., Krak, I.V., Barmak, O.V., Shkilniuk, D.V. *Construction and identification of elements of sign communication* // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – **49**, 2. – P. 163-172.

Галина Крюкова

Приховані моделі Маркова: регуляризація та застосування в прикладних задачах

Національний університет «Києво-Могилянська Академія», м. Київ, Україна
E-mail: kriukovagv@ukma.edu.ua

Загальною постановкою задачі машинного навчання з вчителем є відновлення деякої невідомої змінної за спостережуваними даними. Одним з класичних підходів до вирішення цієї задачі є приховані марковські моделі (ПММ). В цій роботі значну увагу приділено опису переваг та недоліків підходу, а також методам подолання останніх зі збереженням перших.

Розглянуто метод занурення ПММ в гільбертів простір з відтворюючим ядром та методи регуляризації моделі на етапі навчання. Вивчено апроксимаційні оцінки методу за допомогою регуляризації Ністрома.

В роботі розглянуто методи розв'язання прикладних задач машинного навчання за допомогою прихованих моделей Маркова, зокрема, онлайн сегментація аудіо-записів, передбачення епілептичних нападів за показаннями електроенцефалограми, гео-локалізація та інші. Результати та алгоритмічна складність розглянутого методу порівнюються з результатами інших сучасних алгоритмів.

[1] Kriukova G., Pereverzyev S., Tkachenko P. *Nyström type subsampling analyzed as a regularized projection* // Inverse Problems. Special issue on learning and inverse problems. – 2017. – **33**, 7. –С. 074001.

[2] Kriukova G., Glybovets M. *Regularization of Hidden Markov Models Embedded into Reproducing Kernel Hilbert Space* // Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information. – 2018. – pp. 338-347.

Роман Кушнір

Математичне моделювання та методи дослідження термомеханічної поведінки термочутливих структур за складного теплообміну

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail:dyrector@iapmm.lviv.ua

Проаналізовано розвиток досліджень з термомеханіки термочутливих структур, які проводяться в ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України щодо формулювання математичних моделей та розроблення методів дослідження їх термомеханічної поведінки [1–3] за складного теплообміну з оточуючими середовищами та дії силових навантажень. Характерною особливістю цих моделей є те, що сформульовані задачі теплопровідності є нелінійними, а задачі термопружності – крайовими задачами зі змінними коефіцієнтами.

Аналізується використання методу поетапної лінеаризації при розв'язуванні задач теплопровідності для термочутливих структур із матеріалу з простою нелінійністю, на поверхнях яких відбувається конвективно-променевий теплообмін, а також метод лінеаризувальних параметрів для наближеного знаходження температурних полів в таких однорідних і шаруватих структурах за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем.

Побудова розв'язків крайових задач термопружності для термочутливих структур здійснюється за допомогою варіанту методу збурень або запропонованого способу їх зведення до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду на певні базові компоненти напружено-деформованого стану, через які визначаються інші його компоненти.

[1] Кушнір Р.М., Попович В.С. *Термопружність термочутливих тіл.* – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.

[2] Кушнір Р.М., Попович В.С., Процюк Б.В. *Про розвиток досліджень термомеханічної поведінки термочутливих тіл* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 7–27.

[3] Kushnir R. *Thermal and thermoelastic state of thermosensitive structures subject to complex heat exchange* // Structural Integrity. Vol. **5**. Proc. of the ICTAEM-1 / E.E. Gdoutos (ed.) – Springer, 2018. – P. 377–382.

Євген Любарщук

Достатні умови закінчення групового переслідування у нестаціонарних диференціально-різницевих іграх зближення нейтрального типу

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: finvara@gmail.com

Розглянемо задачу групового переслідування з k переслідувачами й одним утікачем. Задача описується системою лінійних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу

$$\begin{gathered}\dot{z_i}(t) = A_i z_i(t) + B_i z_i(t-\tau_i) + C_i \dot{z}_i(t-\tau_i) + \varphi_i(t,u,v), \\ z_i(t) = z_{0i}(t),\ -\tau \leq t \leq 0, \\ \dot{z_i}(t) = \dot{z_{0i}}(t),\ -\tau \leq t < 0,\ i = 1,..,k,\end{gathered} \tag{1}$$

де $z_i \in R$, A_i, B_i, C_i – $n_i \times n_i$ постійні матриці, $\tau_i = const$.

Термінальна множина $M_i^*(t) \in \mathbb{R}^{n_i},\ i = 1,..,k$, де

$$M_i^*(t) = M_{0i} + M_i(t),\ t \in [0, +\infty), \tag{2}$$

Кожен із групи переслідувачів обирає керування з урахуванням інформації про початкове положення $z_{0i}(\cdot)$ і $v_t(\cdot)$ у вигляді вимірної функції

$$u_i(t) = u_i(z_{0i}(\cdot), v_t(\cdot)),\ t \in [0,T], u_i(t) \in U_i,\ i = 1,..,k, \tag{3}$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s),\ s \in [0,t]\}$ – передісторія керування другого гравця до моменту t. Таке керування реалізує квазістратегію.

Теорема 1 *Нехай для конфліктно-керованого процесу* (1), (2) *виконується умова Понтрягіна, відображення* $M_i(t),\ i = 1,..,k$, *опуклозначне і для початкового стану* $z_0(\cdot)$, *і для деякого селектора* $\gamma_i(\cdot,\cdot) \in \Gamma$, $T_k \in T_k(z_0(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \emptyset$. *Тоді траєкторія процесу* (1) *може бути виведена з початкового стану* $z_0(\cdot)$ *на термінальну множину* $M^*(T_k)$ *у момент* T_k *за допомогою керування вигляду* (3).

[1] Chikrii A.A. *Conflict-Controlled Processes.* – New York: Springer, Science and Business Media, 2013. – 424 p.

[2] Беллман Р. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 p.

Василь Маценко

Моделювання динаміки популяцій розподіленими системами

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: vgmatsenko@gmail.com

Довгий час для опису динаміки популяцій використовувалися моделі з зосередженими параметрами, тобто розглядалися однорідні популяції, в яких всі особи ідентичні. Але особи в популяції розрізняються за деякими ознаками, насамперед за віком. Тому для більш точного опису динаміки популяцій застосовують системи з розподіленими параметрами. Такі моделі допомагають більш точно досліджувати проблеми демографії, мікробіології, біоценології, популяційної екології.

Класична модель динаміки вікової структури запропонована фон Фоерстером [1].

В даній праці модель фон Фоерстера узагальнюється до вигляду

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -\mu(\tau, t, P)x, \quad (\tau, t) > 0,$$

$$x(0,t) = \int\limits_0^\infty b(\tau, t, P)x(\tau, t)d\tau, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(\tau, 0) = \varphi(\tau), \ \ \tau \geq 0,$$

де $x(\tau, t)$ – вікова щільність особин віку τ в момент часу t,

$P = \int\limits_0^\infty \gamma(\tau)x(\tau, t)d\tau$ – зважена чисельність особин.

Для системи (1) доведені теореми існування та єдиності додатного розв'язку, теореми про існування стаціонарних розподілів та їх стійкість. Розглядаються частинні випадки (1).

[1] Von Foerster H. *Some remarks on changing population* // Kinetics of Cellular Proliferation. – New York: Grune and Stratton, 1959. – P. 382–407.

Ігор Нестерук [1], *Богдан Шепетюк* [2]

Моделювання форм тонких осесиметричних вентильованих каверн

[1] *Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна*
E-mail: inesteruk@yahoo.com
[2] *ЧНУ імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: shepetyukb@gmail.com

Опір високошвидкісних підводних транспортних засобів може бути зменшений з використанням суперкавітації. Ця ідея була розроблена у багатьох теоретичних, чисельних та експериментальних дослідженнях у багатьох країнах. Для отримання малих чисел кавітації на малих швидкостях транспортних засобів або на великих глибинах руху використовується вентиляція газу всередині каверни [1-2]. Деякі цікаві результати були отримані в роботах [3-4] для стаціонарного потоку рідини без гравітаційних ефектів. В роботі [5] результати цих робіт узагальнені для нестаціонарних вертикальних потоків в полі сили тяжіння. Зокрема, було запропоновано рівняння першого наближення для радіуса R(x) стаціонарної осесиметричної вентильованої каверни. У даному дослідженні розглянуті числові рішеннях даного рівняння при різних значеннях числа Фруда Fr і параметра k. Розраховані форми і розміри вентильованих каверн і проаналізовані критичні значення інтенсивності піддуву.

[1] Логвинович Г.В. *Гидромеханика течений со свободными границами.* – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.

[2] I. Nesteruk *Drag drop on high-speed supercavitating vehicles and supersonic submarines* // Applied Hydromechnics. – 2015. – **vol. 17**, N 4. – P. 52 – 57. http://hydromech.org.ua/content/pdf/ph/ph-17-4

[3] Манова З.І., Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. *Оцінки впливу вентиляції на форму тонких осесиметричних каверн* // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – **Т. 13(85)**,N 2. – С. 44-50.

[4] Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. *Форма штучних осесиметричних каверн ри до - та надкритичних значеннях інтенсивності піддуву* // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – **Т.14**, N 2. – С. 53-60.

[5] Nesteruk, I. *Shape of Slender Axisymmetric Ventilated Supercavities* // Journal of Computational Engineering. – 2014. – **V.2014**, Article ID 501590. – P. 18.doi:10.1155/2014/501590.

Михайло Петрик [1], *Ігор Бойко* [1], *Микола Шинкарик* [2],
Оксана Петрик [1]

Математична модель дифузійних процесів вуглеводнів у нанопористому каталістичному середовищі цеоліту ZSM-5 з використанням ізотерми Ленгмюра

[1] *Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль, Україна*
E-mail: mykhaylopetryk@tu.edu.te.ua
[2] *Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна*
E-mail: shmi@tneu.edu.ua

У пропонованій роботі викладені теоретичні основи моделювання неізотермічних процесів дифузії вуглеводнів в нанопористих каталізаторах для нелінійної ізотерми Лангмюра, що найбільш повно визначає механізм адсорбційної рівноваги для нанопористих мезосистем цеоліту.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial a(t,z)}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial z} = D_{inter}\frac{\partial^2 c}{\partial z^2};\\
&-H\frac{\partial T(t,z)}{\partial t} - uh_g\frac{\partial T}{\partial z} - Q\frac{\partial a}{\partial t} - \mathrm{X}^2 T + \Lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0;\\
&\frac{\partial a}{\partial t} = \beta\left(c - \frac{1}{b_0\exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right)}\frac{a}{a_{full}-a})\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

де перше та друге рівняння описуть процеси масопереносу та теплопереносу відповідно, третє рівняння - нелінійна ізотерма Ленгмюра.

Для розв'язання системи (1) було використано операційний метод Хевісайда [1] і перетворення Лапласа [2].

[1] Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Methods of theory of functions of a complex variable.* – M: Nauka, 1987. – 736 p.

[2] Petryk M., Leclerc S., D. Canet, Sergienko I.V., Deineka V.S., Fraissard J. *The Competitive Diffusion of Gases in a zeolite bed: NMR and Slice Procedure, Modelling anmd Identification of Parameters* // Journal of Physical Chemistry C. – 2015. – **119**, 47. – P. 26519-26525.

Андрій Чередарчук[1], *Галина Крюкова*[1,2], *Олександр Судаков*[1], *Володимир Майстренко*[1]

Апаратне та програмне забезпечення для чисельного моделювання системи зв'язаних осциляторів

[1] *Науковий центр з медико-біотехнічних проблем Національної Академії Наук України, м. Київ, Країна*
E-mail: g.kriukova@biomed.kiev.ua
[2] *Національний університет «Києво-Могилянська Академія», м. Київ, Країна*
E-mail: kriukovagv@ukma.edu.ua

В цій роботі для чисельного моделювання біологічних систем, заданих системою диференціальних рівнянь, було розроблено, протестовано та використано для наукового експерименту програмне забезпечення для хмарних обчислень, кластерів та грід.

Розроблене програмне забезпечення динамічно розподіляє навантаження між головним процессором (CPU) та графічними акселераторами (GPU). Використання різних графічних акселераторів прискорює моделювання в $12 - 50$ разів у порівнянні з моделюванням з одноядерним Intel Xeon, 2.4 GHz, в залежності від GPU та виконуваних задач.

Програмне забезпечення було ефективно використане для моделювання систем з 10^8 осциляторів моделі Курамото-Сакагучі. В ході чисельного експерименту досліджено умови синхронізації, фазові переходи та явища часткової частотної синхронізації, побудовано біфуркаційні діаграми.

В цій доповіді ми зосереджуємо увагу на побудові та налаштуванні комп'ютерної системи для моделювання, а також обговорюємо оптимізаційні рішення для досягнення високої продуктивності масштабованих паралельних обчислень.

[1] Sudakov O.O., Cherederchuk A.I., Maistrenko V.L. *Simulation of large neuronal networks in cloud and grid with graphics processing units* // 9th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS). – 2017. – C. 311–316.

Секція
теорії функцій та
функціонального аналізу

Andriy Bandura

Entire functions of bounded l-index and completely regular growth

[1] *Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,*
Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: andriykopanytsia@gmail.com

Notations and definitions are used from [1]. A.A. Goldberg [1] implicitly raised the following problem.

Problem 1. *What is a relationship between the class of entire functions of completely regular growth with finite order ρ and the class of entire functions of bounded l_ρ-index?*

We give some partial answer to the question. Out main result is following

Теорема 1 (Main Theorem) . *Let $\alpha \geq 1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a positive strictly increasing unbounded sequence such that $x_{n+1} - x_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{x_n^p} < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{x_n^{p-1}} = +\infty$ for some $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

Let $\rho = \inf\{\beta \geq 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{x_n^\beta} < \infty\}$, $m_1 = 1$, $m_{k+1} = m_k + [k^\alpha]$ $(k \in \mathbb{N})$, $\lambda_{m_k} = x_k$ and $\lambda_j = \lambda_{m_k} + \frac{j-m_k}{m_{k+1}-m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho}$ for $m_k \leq j < m_{k+1}$. Then an infinite product $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^p}{\lambda_k^p}\right)$ has the following properties:

1) *f is an entire function of order ρ;*
2) *zeros of the function f does not satisfy condition (C) and if, in addition, $n^{-\alpha}x_n^{1-\rho/2} \to 0$ as $n \to \infty$ then they do not satisfy condition (C');*
3) *f has unbounded l_ρ-index.*
4) *if $\alpha = 1$ and $x_n = n^\gamma$, $\gamma \in [1, 2]$ then the function f has completely regular growth.*

[1] Goldberg A.A. *An estimate of modulus of logarithmic derivative of Mittag-Leffler function with applications* // Mat. Stud. – 1996. – **5**. – P. 21–30 (in Ukrainian).

Nadiia Derevianko [1], *Vitalii Myroniuk* [1], *Jürgen Prestin* [2]

On an orthogonal bivariate trigonometric Schauder basis for the space of continuous functions

[1] *Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine*
E-mail: nadyaderevyanko@gmail.com, vetalmyronjuk@ukr.net
[2] *Institut für Mathematik, Universität zu Lübeck, Lübeck, Germany*
E-mail: prestin@math.uni-luebeck.de

We construct an orthogonal trigonometric Schauder basis in the space $C(\mathbb{T}^2)$ of 2π-periodic in each variable continuous on $\mathbb{R}^2$ functions [1]. Further for this basis we use a notation $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Our results generalize the one-dimensional construction that is based on the kernel of de la Vallée Poussin [2]. The polynomial degree is considered in terms of the l_1- and l_∞-norms.

To construct this basis we use ideas of a dyadic anisotropic periodic multiresolution analysis (PMRA) and corresponding wavelet spaces that were developed in [3] and [4]. The multiresolution analysis is formed using the sequence of only rotation matrices.

For a function $f \in C(\mathbb{T}^2)$ and $\mu \in \mathbb{N}$ we define the operator

$$S_\mu f = \sum_{k=1}^{\mu} \langle f, t_k\rangle t_k,$$

where $\langle f, t_k\rangle$ are the Fourier coefficients with respect to the basis $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. The main result is the estimation of the norm $\|S_\mu\|_{C(\mathbb{T}^2)\to C(\mathbb{T}^2)}$.

[1] Derevianko N., Myroniuk V., Prestin J. *On an orthogonal bivariate trigonometric Schauder basis for the space of continuous functions* // To appear in J. Approx. Theory.

[2] Prestin J., Selig K. K. *On a constructive representation of an orthogonal trigonometric Schauder basis for $C_{2\pi}$* // Oper. Theory, Adv. Appl., Birkhäuser, Basel. – 2001. – **121**. – – P. 402-425.

[3] Langemann D., Prestin J. *Multivariate periodic wavelet analysis* // Appl. Comput. Harm. Anal. – 2010. – **28**. – – P. 46–66.

[4] Bergmann R., Prestin J. *Multivariate periodic wavelets of de la Vallée Poussin type* // J. Fourier Anal. Appl. – 2015. – **21**. – P. 342–369.

Inna Hlushak, Oleh Nykyforchyn

Self-similar inclusion hyperspaces and non-additive measures

Vasyl' Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail:inna.glushak81@gmail.com, oleh.nyk@gmail.com

We follow the terminology and notation of [1, 3]. For a metric compactum (X, d) we consider the space GX of inclusion hyperspaces on X with the "double Hausdorff" metric d_{HH} and the space MX of capacities (= non-additive measures) with the Prokhorov metric $\hat{d}$. For $0 < q < 1$ the space $R_q(X)$ of the mappings $X \to X$ with contraction factors $\leq q$ with the uniform convergence metric is a compactum.

For any $\bar{r} \in \exp R_q(X)$ and $\mathcal{G} \in GX$ we put $G\bar{r}(\mathcal{G}) = \bigcap_{r\in\bar{r}} Gr(\mathcal{G})$. Then $G\bar{r}(\mathcal{G})$ is in GX and depends continuously on $(\bar{r}, \mathcal{G}) \in \exp R_q(X) \times GX$. Now for $\mathcal{R} \in GR_q(X)$ we define $G\mathcal{R}(\mathcal{F})$ by the formula $G\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \bigcup_{\bar{r}\in\mathcal{R}} G\bar{r}(\mathcal{F})$. For $H \in \exp X$ we have $H \in G\mathcal{R}(\mathcal{F})$ if and only if there is $\bar{r} \underset{\mathrm{cl}}{\subset} R_q(X)$, $\bar{r} \in \mathcal{R}$ such that for each $r \in \bar{r}$ the set H contains the image $r(F)$ of some $F \in \mathcal{F}$. We call $\mathcal{R}$ an *IFS for inclusion hyperspaces* and $G\mathcal{R} : GX \to GX$ an *IFS operator* [2] associated with $\mathcal{R}$.

Similarly IFS for normalized capacities is defined. We put $M\bar{r}(c) = \bigwedge_{r\in\bar{r}} Mr(c)$ for all $\bar{r} \in \exp R_q(X)$ and $c \in MX$. Then $M\bar{r}(c)$ is in MX and depends continuously on $(\bar{r}, c) \in \exp R_q(X) \times MX$. Now for $\mathcal{R} \in MR_q(X)$ the capacity $M\mathcal{R}(c)$ was defined in [1] with the formula:

$$M\mathcal{R}(c)(F) = \bigvee_{\bar{r}\in\exp R_q(X)} \min\{M\bar{r}(c)(F), \mathcal{R}(\bar{r})\} \text{ for } F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X.$$

It is known [1, Theorems 1,2] that there are unique fixed points (*attractors for IFSs*) for the mappings $G\mathcal{R}$ and $M\mathcal{R}$, which are called a *self-similar inclusion hyperspace* and a *self-similar capacity* respectively. Their fractal dimensions will be discussed in the talk.

[1] Nykyforchyn O.R., *Fractal capacities and iterated function systems//* Mathematical Gerold of Shevchenko Scientific Society **5** (2008), 259–273.

[2] Vrscay E.R., *From Fractal Image Compression to Fractal-Based Methods in Mathematics*, in *Fractals in Multimedia*, ed. by M. F. Barnsley, D. Saupe and E. R. Vrscay. — New York, Springer-Verlag, 2002.

[3] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R. *Capacity functor in the category of compacta//* Sbornik: Mathematics **199**:2 (2008), 159–184.

Nataliya Girya

One property of B^2-almost periodic functions

National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”,
Kharkiv, Ukraine
E-mail: n82giryagmail.com

Let the functions $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ be measurable and L^p-integrable on each compact in $\mathbb{R}^d$. Generalizing the definition of Besikovitch's and Stepanov's distances (see [1], [2]) for the function on $\mathbb{R}^d$ we have the following definitions.

Def 1. $D_{S^p}[f(x), g(x)] = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{\omega_d} \int\limits_{B(x,1)} |f(y) - g(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$. The metric generated by such distance is called Stepanov's metric.

Def 2. Put $D_{B^p}[f(x), g(x)] = \left\{ \overline{\lim\limits_{T\to\infty}} \frac{1}{\omega_d T^n} \int\limits_{B(0,T)} |f(y) - g(y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, the metric generated by this distance is called Besicovitch's distance of order p.

Def 3. Function $f(x)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ is called D–almost periodic function if there exists a sequence of finite exponential sums $S_n(x) = \sum\limits_j c_j e^{i\langle\lambda_j, x\rangle}, c_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}^d$, such that $\lim\limits_{n\to\infty} D[f(x), S_n(x)] = 0$.

In the case for $D = D_{B^p}$ the function f is called B^p–almost periodic function and in the case for $D = D_{S^p}$ the function f is called S^p–almost periodic function

In joint work with S.Yu Favorov we obtain the next theorem.

Theorem. Let $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, be B^2– almost periodic function with the spectrum $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Suppose that there exists a set of balls $\{B(x_j, R)\}$ such that the multiplicities of intersections do not exceed h, and numbers of elements $\lambda \in \Lambda \cap B(x_j, R)$ is uniformly bounded. Then the function $f(x)$ is S^2 – almost periodic.

[1] A. S. Besicovitch. *A*lmost periodic functions. Cambridge university press. – 1932. – 253 p.

[2] V. V. Stepanov. *A*bout metric in S_2–almost periodic function's space.// DAN USSR. – 1949. – **V.LXIV.**– No 3. – P. 171. (In Russian)

Vladimir Kofanov

A sharp Kolmogorov-Remez type inequalities for periodic functions of a small smoothness

Oles Honchar National University, Dnipro, Ukraine
E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com

For $r = 2, k = 1$ or $r = 3, k = 1,2$; any $q, p \geq 1$; $\beta \in [0, 2\pi)$ and arbitrary measurable set $B \subset I_{2\pi} := [-\pi/2, 3\pi/2]$, $\mu B \leq \beta$, we prove sharp Kolmogorov-Remez type inequality

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})}} \|f\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|f^{(r)}\|^{1-\alpha}_{\infty}, \quad f \in L^r_{\infty}, \tag{1}$$

with $\alpha = \alpha_1 := \min\{1 - k/r, (r - k + 1/q)/(r + 1/p)\}$, where φ_r is perfect Euler's spline of order r, $E_0(f)_{L_p(G)}$ is the best approximation of the function f by constants in the space $L_p(G)$, $B_{2m} = \left[\frac{\pi-2m}{2}, \frac{\pi+2m}{2}\right]$ and the number $m = m(\beta) \in [0, \pi)$ is defined by the number β uniquely.

Under the same conditions and $q < \frac{rp}{r-k}$ we also establish the following sharp Kolmogorov-Remez type inequality which takes into account the number $\nu(f^{(k)})$ of sign changes of the derivatives $f^{(k)}$:

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \left(\frac{\nu(f^{(k)})}{2}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{E_0(\varphi_r)^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{2m})}} \|f\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|f^{(r)}\|^{1-\alpha}_{\infty} \tag{2}$$

with $\alpha = \alpha_2 := (r - k + 1/q)/(r + 1/p)$.

Note that the exponent $\alpha = \alpha_1$ is the largest possible in the inequality (1) but $\alpha_2 > \alpha_1$ under the condition $q < \frac{rp}{r-k}$.

For $\beta = 0$ the inequalities (1) and (2) have been proved in [1].

[1] Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А. *Точные неравенства типа Колмогорова с ограниченной старшей производной в случае малых гладкостей* // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, 10. – С. 1298–1308.

Evgeny Sevost'yanov

On boundary extension of mappings in metric spaces in the terms of prime ends

Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine
E-mail: esevostyanov2009@gmail.com

Given a metric space (X, d, μ) with a measure μ, a *domain* in X is an open path-connected set in X. We call a bounded connected set $E \subsetneq \Omega$ an *acceptable* set if $\overline{E} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$. We call a sequence $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ of acceptable sets a chain if it satisfies the following conditions: 1. $E_{k+1} \subset E_k$ for all $k = 1, 2, \dots,$ 2. $\mathrm{dist}\,(\Omega \cap \partial E_{k+1}, \Omega \cap \partial E_k) > 0$ for all $k = 1, 2, \dots,$ 3. The impression $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{E_k} \subset \partial\Omega$. We say that a chain $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ divides the chain $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ if for each k there exists l_k such that $E_{l_k} \subset F_k$. Two chains are equivalent if they divide each other. A collection of all mutually equivalent chains is called an *end* and denoted $[E_k]$, where $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ is any of the chains in the equivalence class. The impression of $[E_k]$, denoted $I[E_k]$, is defined as the impression of any representative chain. We say that an end $[E_k]$ is a *prime end* if it is not divisible by any other end. The collection of all prime ends is called the *prime end boundary* and is denoted E_{Ω}. In what follows, we set $\overline{\Omega}^P := \Omega \cup E_{\Omega}$. If Ω is finitely connected at every boundary point, then it is called *finitely connected* at the boundary. Consider the condition $\mathbf{A}$ **: for all** $\beta : [a, b) \to X'$ **and** $x \in f^{-1}(\beta(a))$**, a mapping** $f : D \to X'$ **has a maximal** f**-lifting in** D **starting at** x**.**

Theorem 1. *Let D and D' be domains with finite Hausdorff dimensions α and $\alpha' \geqslant 2$ in spaces (X, d, μ) and (X', d', μ'), respectively. Assume that X is complete and supports an α-Poincaré inequality, and that the measure μ is doubling. Let D be a bounded domain which is finitely connected at the boundary, and let $Q : X \to (0, \infty)$ be a locally integrable function. Suppose that $f : D \to D'$, $D' = f(D)$, is a discrete, closed and open ring Q-mapping in ∂D, for which $\mathbf{A}$-condition holds. Moreover, suppose that $\partial D'$ is strongly accessible and $\overline{D'}$ is compact in X'. Then f has a continuous extension $f : \overline{D}_P \to \overline{D'}$, $f(\overline{D}_P) = \overline{D'}$, whenever $Q \in FMO(\partial D)$.*

Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu.

About the abscissas of convergence of random Dirichlet series

Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine
E-mail: olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probability space, $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ and $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ are sequences of nonnegative and complex-valued random variables on it respectively. Let $\mathcal{D}(\Lambda)$ be the class of formal random Dirichlet series of the form $F(z,\omega) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}$ $(z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega)$, $\mathcal{D} = \bigcup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$. Let Θ be the class of complex-valued random variables ξ_n such that $(\exists c_j \in (0, +\infty))(\forall n)\colon\ c_1 \le |\xi_n| \le c_2$ a.s. Let Δ be the class of nonnegative random variables δ_n such that $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\colon\ M(e^{x\delta_n}) \le C_1(x) < +\infty$. In particular, we have proved the following theorem.

Теорема 1 ([1]) *Let* $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, $F \in \mathcal{D}$ *with coefficients* $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ *and* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k \colon k \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.

1. *If* $M\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ *for every* $n \in \mathbb{N}$ *and any* $x \in \mathbb{R}$, *and* $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ *is a sequence of independent random variables for each* $x \in \mathbb{R}$, *then* $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \ge \sigma(F_3)$ *a.s., where* $F_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}$. *If we additionally assume that* $(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ M(e^{x\delta_n}) \ge C_2(x)$, *then* $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sigma(F_3)$ *a.s.*
2. *If* $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ *is a sequence of independent random variables for every* $x \in \mathbb{R}$, *then* $\sigma(F,\omega) \ge \sigma(F_4)$ *a.s. If we additionally assume that* $(\forall x, x < \sigma(F,\omega))(\exists a > 0)(\forall n \ge 1)\colon P\{\omega\colon |a_n|e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$ *and* $(\forall n \in \mathbb{N})\colon |\xi_n(\omega)| = c \ne \infty$ *a.s., also* $(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ De^{x\delta_n} \ge C_3(x)$, *then* $\sigma(F,\omega) = \sigma(F_4)$ *a.s., where* $F_4(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}$.

[1] Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2017. – Вип.84. – С.76–91.

O. B. Skaskiv, V. L. Tsvigun

Analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ of bounded L-index in joint variables

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
E-mail: olskask@gmail.com, 12lvan.n@ukr.net

Let $\mathbb{T}=\mathbb{D}\times\mathbb{C}$, $T_\beta=(0,\beta)\times(0,+\infty)$, $R=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}^2_+$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{T}$. For p, $q\in\mathbb{Z}_+$ and partial derivative of analytic function $F(z_1,z_2)$ in $\mathbb{T}$ we will use the notation $F^{(p,q)}(z_1,z_2):=\frac{\partial^{p+q}F(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}$. Let $\mathbf{L}(z)=(l(z_1,z_2),1)$, where $l(z_1,z_2):\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2_+$ is a continuous function such that $(\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{T})\colon\ l(z_1,z_2)>\frac{\beta}{1-|z_1|}$, where $\beta>1$ is a some constant.

An analytic function $F\colon\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ is called a function of *bounded* $\mathbf{L}$*-index (in joint variables),* if there exists $n_0\in\mathbb{Z}_+$ such that $\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{T}$ and $\forall(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2_+$

$$\frac{1}{p_1!p_2!}\frac{|F^{(p_1,p_2)}(z_1,z_2)|}{l^{p_1}(z_1,z_2)}\le\max\Big\{\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{l^{k_1}(z_1,z_2)}:0\le k_1+k_2\le n_0\Big\}.$$

By $Q(\mathbb{T})$ we denote the class of functions $\mathbf{L}$, which satisfy the condition $(\forall R\in T_\beta)\colon\ 0<\lambda_1(R)\le1\le\lambda_2(R)<\infty$, where

$$\lambda_1(R)=\inf_{(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{T}}\inf\left\{\tfrac{l(z_1,z_2)}{l(z_1^0,z_2^0)}:\ |z_1-z_1^0|\le r_1/l(z_1^0,z_2^0),|z_2-z_2^0|\le r_2\right\},$$

$$\lambda_2(R)=\sup_{(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{T}}\sup\left\{\tfrac{l(z_1,z_2)}{l(z_1^0,z_2^0)}:\ |z_1-z_1^0|\le r_1/l(z_1^0,z_2^0),|z_2-z_2^0|\le r_2\right\}.$$

Theorem. *Let* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{T})$*. An analytic function* F *in* $\mathbb{T}$ *has bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables if and only if for each* $R\in T_\beta$ *there exist* $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p_0>0$ *such that for every* $z^0=(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{T}$ *there exists* $(k_1^0,k_2^0)\in\mathbb{Z}^2_+$, $0\le k_1^0+k_2^0\le n_0$*, and*

$$\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)}:\ k_1+k_2\le n_0,\ |z_1-z_1^0|=\frac{r_1}{l(z_1^0,z_2^0)},\right.$$
$$\left.|z_2-z_2^0|=r_2\right\}\le\frac{p_0}{k_1^0!k_2^0!}\frac{|F^{(k_1^0,k_2^0)}(z_1^0,z_2^0)|}{l^{k_1^0}(z_1^0,z_2^0)}.$$

Тамара Антонова[1], *Ольга Сусь*[2]

Деякі достатні умови збіжності відповідних двовимірних неперервних дробів

[1]*НУ “Львівська політехніка”, Львів, Україна*
E-mail: tamara_ antonova@ukr.net
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна*
E-mail: olja_ sus@ukr.net

Об'єктом дослідження є послідовність $\{\tilde{f}_n(z_1,z_2)\},\ n=1,2,\ldots,$ скінченних двовимірних неперервних дробів (ДНД) вигляду

$$\tilde{f}_n(z_1,z_2)=$$

$$=\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{a_{j,0}z_1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{a_{0,j}z_2}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[n/2]}\frac{a_{k,k}z_1z_2}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-2k}\frac{a_{k+j,k}z_1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-2k}\frac{a_{k,k+j}z_2}{1}},\qquad(1)$$

де $a_{j,k},\ j,k=0,1,\ldots,\ j+k\geq 1,$ — сталі (коефіцієнти дробів), $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, $[\alpha]$ — ціла частина додатного числа α.

ДНД вигляду (1) пов'язані із задачею відповідності ДНД до деякого формального подвійного степеневого ряду [1, 2].

У доповіді буде розглянуте питання про збіжність послідовності $\{\tilde{f}_n(z_1,z_2)\},\ n=1,2,\ldots,$ за таких умов:

$$0\leq a_{j,k}\leq K,\ j,k=0,1,\ldots,\ j+k\geq 1,\quad (z_1,z_2)\in G_M,$$

$$G_M=\left\{|z_i|<M,\ |\arg(z_i)|<\frac{\pi}{2},\ i=1,2;|\arg(z_1)+\arg(z_2)|<\frac{\pi}{2}\right\},$$

де $K,\ M$ — додатні сталі.

[1] Кучмінська Х.Й. *Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – 7. – С. 614–618.

[2] Murphy J., O'Donohoe M. R. *A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions* // J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – **4**, 3. – C. 181 –190.

Андрій Бандура[1], *Наталія Петречко*[2]

Теорема існування для аналітичної у полікрузі функції обмежного L-індексу за сукупністю змінних

[1]*Івано-Франківський національний університет нафти і газу,*
Івано-Франківськ, Україна
E-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2]*Львівський національний університет ім.І. Франка, Львів, Україна*
E-mail: petrechko.n@gmail.com

Будемо використовувати деякі стандартні позначення. Нехай $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $R = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Для $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ позначимо $\|K\| = k_1 + \cdots + k_n$, $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$. Нехай $\mathbb{D}^n(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon\ |z_j - z_j^0| < r_j,\ j = 1, \dots, n\}$ — полікруг. $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, де $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Для $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ і частинних похідних функції $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ користуватимемось позначенням: $F^{(K)}(z) = \frac{\partial^{\|K\|} F}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}$. Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z) \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$ неперервна функція така, що

$$(\forall z \in \mathbb{D}^n) \colon\ l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|),\ j \in \{1, \dots, n\}, \tag{1}$$

де $\beta > 1$ деяка стала, $\boldsymbol{\beta} := (\beta, \dots, \beta) \in \mathbb{R}^n$. Аналітичну функцію $F \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ називають функцією *обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу (за сукупністю змінних) [1],* якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{D}^n$ і для будь-яких $J \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon\ K \in \mathbb{Z}^n_+,\ \|K\| \le n_0 \right\}. \tag{2}$$

Найменше ціле n_0 називають $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F і позначають $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^n) = n_0$. Нехай $\mathbb{Z}_F$ – множина нулів аналітичної функції $F \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$. Якщо $z^0 \in Z_F$, то через $p_F(z^0)$ позначимо кратність нуля z^0 функції F, тобто для всіх $J \in \mathbb{Z}^n_+$ із $\|J\| < p_F(z^0)$ маємо $F^{(J)}(z^0) = 0$, але хоча б для одного J, $\|J\| = p_F(z^0)$, виконується нерівність $F^{(J)}(z^0) \ne 0$.

Теорема 1 *Для того, щоб для аналітичної функції* $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ *існувала додатна неперервна функція* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, *що задовольняє* (1) *і така, що функція* F *є функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних, необхідно і достатньо, щоб існувало* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що* $p_F(z^0) \le p$ *для всіх* $z^0 \in Z_F$.

Ця теорема є узагальненням теореми для цілих функцій кількох змінних [2].

[1] Bandura A.I., Petrechko, N.V. *Properties of power series of analytic in a bidisc functions of bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables* // Carpathian Math. Publ. – 2017. – **9**, no. 1. – P.6–12. doi: 10.15330/cmp.9.1.6-12

[2] Бандура А., Скасків О. *Метричний простір Іера, теорема існування та цілі функції обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних* // Буковин. матем. журн. –2017. – **5**, №3-4. – С.8–14.

Дмитро Боднар [1], *Ірина Біланик* [2]

Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

[1] *Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна*
E-mail: bodnar4755@ukr.net
[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: i.bilanyk@ukr.net

Одержані результати стосуються гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) спеціального вигляду

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $b_0, b_{i(k)}$ – комплексні числа, $i(k)\in\mathcal{I}$,
$\mathcal{I}=\{i_1i_2\dots i_k\ : 1\le i_k\le i_{k-1}\le\ldots\le i_0;\ k\ge 1;\ i_0=N\}$, N – фіксоване натуральне число.

Теорема 1 *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови*

$$\Re(b_{i(k)})>0,\ \left|\arg b_{i(k)}\right|<\theta,\ \theta<\frac{\pi}{2},\ i(k)\in\mathcal{I},$$

і нескінченний добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\cos\theta}(1-\nu_k)\right)$ *розбігається до нуля, де*

$$\nu_k=\left\{\Re\big(b_{i(k)}\big)\left(\left|b_{i(k)}\right|+\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{1}{\Re\big(b_{i(k+1)}\big)}\right)^{-1} : i(k)\in\mathcal{I}_k\right\},$$

$$\mathcal{I}_k=\{i_1i_2\dots i_k\ : 1\le i_k\le i_{k-1}\le\ldots\le i_0;\ i_0=N\},\ k=1,2,3,\ldots\ .$$

Тоді ГЛД (1) *збігається і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f_n-f_p|\le\frac{2N}{\min\limits_{i_1}\Re\left(b_{i_1}\right)}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2s}\prod_{k=1}^{2s}(1-\nu_k),\ n>p,\ s=\left[\frac{p}{2}\right].$$

[1] Боднар Д. И. *Ветвящиеся цепные дроби.* – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.

Дмитро Боднар[1], *Роман Дмитришин*[2]

Про збіжність багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними

[1] *Тернопільський національний економічний*
університет, Тернопіль, Україна
E-mail: bodnar4755@ukr.net
[2] *ДВНЗ “Прикарпатський національний університет*
імені Василя Стефаника”, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: dmytryshynr@hotmail.com

Нехай N – фіксоване натуральне число, $\mathcal{I}_k = \{i(k): \ i(k) = (i_1 i_2 \dots i_k), \ 1 \le i_p \le i_{p-1}, \ 1 \le p \le k, \ i_0 = N\}$ – множина мультиіндексів, $k \ge 1$.

Гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} {\atop +} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)} z_{i_2}}{1} {\atop +} \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)} z_{i_3}}{1} {\atop +} \cdots, \tag{1}$$

де $c_{i(k)} > 0$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, називається багатовимірним S-дробом з нерівнозначними змінними і є узагальненням неперервного дробу Стільтьєса [1].

Теорема 1 *Нехай елементи* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними* (1) *задовольняють такі умови*

$$c_{i(k)} \le r, \quad i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 1,$$

де r – додатне дійсне число, і нехай

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} {\atop +} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)} z_{i_2}}{1} {\atop +} \cdots {\atop +} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{i(n)} z_{i_n}}{1}$$

– його n-й підхідний дріб. Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними (1) збігається до функції $f(\mathbf{z})$ в області

$$\bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \left(P_{\alpha,r} \bigcap Q_{\alpha,r} \right),$$

де

$$P_{\alpha,r} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{\cos^2 \alpha} < \frac{r}{2} \right\},$$

$$Q_{\alpha,r} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{r|z_k|}{\cos^2 \alpha} \right)^{1/2}}{\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4} - \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1} \cos^2 \alpha} \right)^{1/2}} < 1 \right\},$$

і для кожних $n \geq 1$ та $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, і для кожного $\mathbf{z}$ із області $P_{\alpha,r} \bigcap Q_{\alpha,r}$ виконуються такі оцінки

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{r|z_{i_k}|}{\cos^2\alpha}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \operatorname{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1}\cos^2\alpha}\right)^{1/2}\right)^{2n}}.$$

[1] Stieltjes T.-J. Recherches sur les fractions continues // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. – 1894. – **8**, 4. – P. J1-J122.

Тарас Василишин

Алгебри симетричних аналітичних функцій на деяких просторах вимірних за Лебегом функцій

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
E-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

Нехай Ω – деяка вимірна за Лебегом підмножина ненульової міри множини $\mathbb{R}$. Нехай $X(\Omega)$ – деякий переставно-інваріантний комплексний банахів простір вимірних за Лебегом функцій, які діють з множини Ω в множину $\mathbb{C}$. Позначимо Ξ_Ω множину всіх бієкцій $\sigma : \Omega \to \Omega$ таких, що σ і σ^{-1} є вимірними за Лебегом і зберігають міру Лебега, тобто $\mu(\sigma(A)) = \mu(A)$ для кожної вимірної за Лебегом множини $A \subset \Omega$, де μ – лінійна міра Лебега. Функцію $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо

$$f(x \circ \sigma) = f(x)$$

для всіх $x \in X(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$.

В даній роботі вивчаються алгебраїчні базиси і спектри алгебр симетричних аналітичних функцій на деяких переставно-інваріантних комплексних банахових просторах вимірних за Лебегом функцій.

Ганна Власик, Вікторія Шкапа

Оцінки L_q-норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік

Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна
E-mail: annawlasik@gmail.com, vshkapa@ukr.net

Нехай $L_q, 1 \leq q \leq \infty$, — простір вимірних 2π–періодичних функцій f зі стандартною нормою. Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}$, де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Далі, нехай $\psi \neq 0$ — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)}e^{i(kx+\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}k)}$ є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця (див. [1, с. 25]), назвемо (ψ, β)–похідною функції f і позначимо f_β^ψ. Для ψ — додатних і незростаючих та $\beta \in \mathbb{R}$ покладемо

$$L_m(\psi, \beta, q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)_\beta^\psi \right\|_q, \quad 1 < q < \infty,$$

де $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел.

Позначимо через Ψ множину додатних і незростаючих послідовностей ψ, таких, що $\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C$, $\tau \in \mathbb{N}$ і $C > 0$ деяка абсолютна стала. Тоді справедливе твердження.

Теорема 1 *Нехай $2 < q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім цього, існують $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такі, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q-\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає, а послідовність $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon_2}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, то*

$$L_m(\psi, \beta, q) \asymp \psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)\sqrt{m},$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

[1] Степанец А. И. *Классификация и приближение периодических функций.* – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

Світлана Галущак

Про властивості алгебри Фреше, породженої послідовністю поліномів на банаховому просторі

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
E-mail: sv.halushchak@ukr.net

Нехай X – комплексний банахів простір. Розглянемо послідовність $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ алгебраїчно незалежних поліномів на X, таких що для кожного $n \in \mathbb{N}$ поліном P_n є неперервним n-однорідним поліномом. Позначимо через $H_{\mathbb{P}}$ алгебру, яка породжена цими поліномами і замкнена в просторі $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу (обмежених на обмежених підмножинах банахового простору X). Нагадаємо, що алгеброю Фреше називають повну метризовану локально m-опуклу алгебру. Алгебра $H_{\mathbb{P}}$ є алгеброю Фреше відносно метрики простору $H_b(X)$. Кожен член ряду Тейлора функції $f \in H_{\mathbb{P}}$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементів множини $\mathbb{P}$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2\ldots k_n} P_1(x)^{k_1} P_2(x)^{k_2} \cdots P_n(x)^{k_n},$$

де $x \in X$, $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ і $k_1, k_2 \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Також у роботі досліджено спектри алгебр $H_{\mathbb{P}}(X)$ на деяких банахових просторах X.

Михайло Гембарський, Світлана Гембарська

Поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-mail: hembarskyi@gmail.com, gembarskaya72@gmail.com

В доповіді мова буде йти про колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [1] періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$, норма в якому є більш сильною ніж L_1-норма. Надалі Ω — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови Барі-Стєчкіна (S^{α}) та (S_l) [2], і для певної функції Ω класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з відомими класами Нікольського-Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$.

Нехай W – центрально-симетрична множина у просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$. Величина

$$d_M(W,X) = \inf_{L_M} \sup_{w\in W} \inf_{u\in L_M} \|w-u\|_X,$$

де $L_M \subset X$ – підпростір розмірності M, називається колмогоровським поперечником множини W у просторі X.

Теорема 1 *Нехай* $1 \le p,\ \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}$$

[1] Sun Yongsheng, Wang Heping. *Representation and approximation of multivariate periodic fanctions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова – 1997. – **219** – С. 356 – 377.

[2] Бари Н. К., Стечкин С. Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**, С.483 – 522.

Сергій Гефтер

Диференціальні оператори нескінченного порядку у просторах формальних рядів Лорана і формальних степеневих рядів

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна
E-mail: gefter@karazin.ua

Нехай F - довільне поле нульової характеристики, $\frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$ - простір формальних рядів Лорана виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^{n+1}}, c_n \in F$, і $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - формальний степеневий ряд з коефіцієнтами з F. Тоді диференціальний оператор нескінченного порядку $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)$ є коректно визначеним у просторі $\frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$, тобто $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g^{(n)}(z) \in \frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$, якщо $g \in \frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$. На $\frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$ будемо розглядати добуток (згортку) Гурвиця (див. [1], розділ 1.5):

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k a_k b_{n-k}}{z^{n+1}},$$

де $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}$ і $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{z^{n+1}}$.

Наступна теорема є деяким аналогом багатьох класичних тверджень про характеризацію трансляційно-інваріантних лінійних операторів.

Теорема 1 *Нехай лінійний оператор* $A : \frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]] \to \frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$ *є неперервним відносно топології Крулля. Тоді наступні умови є еквівалентними:*
a) оператор A *комутує з оператором диференціювання* $\frac{d}{dz}$*;*
b) A *комутує з будь-яким оператором зсуву у просторі* $\frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$*;*
c) A *є оператором згортки, тобто існує такий ряд Лорана*
$\Psi \in \frac{1}{z}F[[\frac{1}{z}]]$*, що* $A(g) = \Psi * g$*;*
d) існує такий формальний степеневий ряд $\varphi(z)$*, що* $A = \varphi(\frac{d}{dz})$*.*

За допомогою використання p-адичної топології на $\mathbb{Z}$ у роботі отримано деякий аналог теореми 1 і для кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з $\mathbb{Z}$.

[1] Л. Бибербах. *Аналитическое продолжение.* – Москва: "Наука 1967. – 240 с.

Володимир Гладун, Світлана Возна

Деякі множини стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами

Національний університет "Львівська політехніка", м.Львів, Україна
E-mail: volodymyr.r.hladun@lpnu.ua, svitlana.m.vozna@lpnu.ua

Об'єктом дослідження є числовий гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) з додатними частинними чисельниками

$$a_0\left(1+\operatorname*{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $N\in\mathbb{N}$ – кількість гілок розгалужень, $i(0)=i_0=0$, $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, $k=1,2,\ldots$, – мультиіндекси. Позначимо

$$I_0=\{0\}\,,\; I_k=\left\{i\left(k\right)=i_1i_2\ldots i_k : i_p=\overline{1,N},\, p=\overline{1,k}\right\},\; k=1,2,\ldots.$$

Нехай $\{E_{i(k)}\}$, $\emptyset\neq E_{i(k)}\subset\mathbb{R}_+$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, – послідовність множин елементів ГЛД (1):

$$a_{i(k)}\in E_{i(k)},\; i(k)\in I_k,\; k=0,1,2,\ldots.$$

Теорема 1 *Нехай існує стала α, $0<\alpha<1$, така, що відносні похибки усіх частинних чисельників ГЛД (1) задовольняють умови:*

$$\left|\alpha_{i(k)}\right|\le\alpha,\; i(k)\in I_k,\; k=0,1,2,\ldots.$$

Сукупність множин

$$E_0=\left(0,+\infty\right),\; E_{i(k)}=\left(0,\,\frac{k^{\gamma}}{N}\right],\; i(k)\in I_k,\; k=1,2,\ldots,\;\gamma<1,$$

є послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД (1). Для відносних похибок підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right|\le\alpha+\frac{N\alpha\left(1+\alpha\right)}{1-\alpha}\sum_{n=1}^{s}n^{\gamma}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{Nk^{\gamma}}\right)^{-1},\; s=0,1,2,\ldots.$$

Ольга Гой

Наближення функцій із класів Бєсова та Гельдера поліномами за базисом Хаара

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-mail: miss.olga.lutsk@gmail.com

В доповіді анонсовано результати щодо оцінок апроксимації функцій, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$, $d \geqslant 2$, які належать класам Бєсова та Гельдера, за допомогою поліномів, побудованих за кратним базисом Хаара в просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ зі стандартною нормою $\| \cdot \|_q$.

Базис H^d є результатом певного впорядкування системи $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_+^d}$ функцій d змінних, яка побудована на основі одновимірного базису Хаара і системи характеристичних функцій двійкового розбиття відрізка $[0,1]$ (див., наприклад, [1]).

Нехай $V_n := \operatorname{span} \{h_{\overline{k}},\ \overline{k} \in Y_{n,d}\} = \{u : \ u = \sum\limits_{\overline{k} \in Y_{n,d}} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}},\ c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$, де $Y_{n,d} := \{\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d) : \ 0 \le k_i < 2^n,\ i = \overline{1,d}\}$. Зазначимо, що $\dim V_n = 2^{nd}$. Через $E_{V_n}(f)_q$ позначимо величину найкращого наближення функції $f \in L_q(\mathbb{I}^d)$ елементами підпростору V_n і покладемо також $E_{V_n}(F)_q := \sup\limits_{f \in F} E_{V_n}(f)_q$ для $F \subset L_q(\mathbb{I}^d)$. Далі, через P_n позначимо оператор $P_n : \ L_1 \to V_n$ ортогонального проектування простору $L_1(\mathbb{I}^d)$ на підпростір V_n і покладемо $\mathcal{E}_{V_n}(f)_q = \mathcal{E}_{V_n}(f; \mathbb{H}_0^d; L_q) := \big\| f - P_n f \big\|_q$ та $\mathcal{E}_{V_n}(F)_q := \sup\limits_{f \in F} \mathcal{E}_{V_n}(f)_q$ для $F \subset L_q(\mathbb{I}^d)$.

При $0 < \alpha < 1$, $1 \le p \le \infty$ і $1 \le \theta < \infty$ через $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ та SH^{α}_p позначимо одиничні кулі відповідно у ізотропному просторі Бєсова $B^{\alpha}_{p,\theta}$ та у класичному просторі Гельдера H^{α}_p.

Теорема 1 *Нехай* $1 \le p, q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ *і* $\max\{0; \frac{d}{p} - \frac{d}{q}\} < \alpha < 1$. *Якщо* $W = SB^{\alpha}_{p,\theta}$ *чи* $W = SH^{\alpha}_p$, *то справедливі порядкові рівності*

$$E_{V_n}(W)_q \asymp \mathcal{E}_{V_n}(W)_q \asymp 2^{-n\alpha}.$$

[1] Романюк В.С. *Кратный базис Хаара и его свойства* // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, №9. – С. 1253 – 1264.

Уляна Грабова

Апроксимативні властивості тригармонійних інтегралів Пуассона на класах Ліпшиця

Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-mail: grabova_u@ukr.net

Задачі, пов'язані з апроксимацією функцій полігармонічними функціями, мають широке застосування в механіці. Розглянемо апроксимативні властивості тригармонійних інтегралів Пуассона на класах функцій, що задовольняють умові Ліпшиця в рівномірній метриці.

Нехай $f \in L, \delta > 0$. Величину

$$P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

де $\lambda_\delta(k) = \Big(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})k + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 k^2\Big)e^{-\frac{k}{\delta}}$, називають тригармонійним інтегралом Пуассона функції f.

Розглянемо клас Ліпшиця H^α [1, с. 120] функцій $f \in C$, які задовольняють умові

$$|f(x+h) - f(x)| \le |h|^\alpha, \ \ 0 < \alpha \le 1, \ 0 \le h \le 2\pi, \ x \in \mathbb{R}.$$

В даній роботі вивчається задача про знаходження асимптотичної поведінки величини $\mathcal{E}\big(H^1; P_3(\delta)\big)_C = \sup\limits_{f \in H^1} \big\|f(x) - P_3(\delta; f; x)\big\|_C$.

Теорема 1 *При $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність $\mathcal{E}\big(H^1; P_3(\delta)\big)_C = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}$.*

[1] Степанец А. И. *Методы теории приближения.* – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. — 427 с.

Ярослав Грушка

Узагальнені перетворення Лоренца та їх застосування для математичного обґрунтування тахіонової кінематики

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: grushka@imath.kiev.ua

В доповіді розглядаються узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami, V. Ольховського та R. Goldoni, що діють в просторі Мінковського $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{H}$ над довільним дійсним гільбертовим простором $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. У частинному випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$ такі перетворення було введено в роботах E. Recami, V. Ольховського та R. Goldoni, а пізніше перевідкрито в роботах С.Ю. Мєдвєдєва, M. Hill та Barry J. Cox. Множина узагальнених перетворень Лоренца $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H})$ містить класичну групу Лоренца $\mathfrak{O}(\mathfrak{H})$ над $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, причому ці перетворення можна розглядати, як узагальнення класичних перетворень Лоренца на випадок, коли швидкість інерційної системи відліку перевищує швидкість світла [1]. Можна довести, що, на відміну від класичного випадку, множина $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H})$ не утворює групу операторів в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ [2]. Незважаючи на це, використовуючи теорію мінливих множин [3], можна побудувати математично строгу модель кінематики, яка включає класичну кінематику спеціальної теорії відносності, і, в той же час, дозволяє існування надсвітлових швидкостей для інерційних систем відліку. Але, оскільки множина $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H})$ не є групою, така кінематика не буде задовольняти принцип відносності (рівноправності інерційних систем відліку) у діапазоні надсвітлових швидкостей.

Також будуть обговорюватись інші варіанти узагальнень перетворень Лоренца за межі світлового бар'єру (зокрема, узагальнені перетворення Лоренца, введені в роботах M. Hassani).

[1] Grushka Ya.I. *Tachyon generalization for Lorentz transforms* // Methods of functional analysis and topology. – 2013. – **Vol. 19**, N 2. – P. 127-145.

[2] Грушка Я.І. *Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца* // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2013. – **Том 10**, N 2. – С. 138-169.

[3] Grushka Ya.I. *Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0)*. – Preprint: ResearchGate, 2017. – 208 p. – DOI: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.

Мар'ян Дмитришин

Аналітичні оцінки спектральних апроксимацій для узагальнених диференціальних операторів Лежандра

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
E-mail: m_dmytryshyn@hotmail.com

Нехай $B^s_{2,\tau}(\Omega)$ — простір Бєсова, $0 < s < \infty$, $1 \le \tau \le \infty$, $\Omega = (a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$ і функція $p(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ така, що $p(\xi) > 0$ $(\xi \in \Omega)$, $0 < C_a = \lim\limits_{\xi \downarrow a} \frac{p(\xi)}{\xi - a} < \infty$, $0 < C_b = \lim\limits_{\xi \uparrow b} \frac{p(\xi)}{b - \xi} < \infty$. Для $m = 1, 2, \ldots$ і $l = 0, 1, \ldots, m$ визначимо диференціальний оператор Лежандра $A_{m,l}u = (-1)^m \dfrac{d^m}{d\xi^m}\left(p^l(\xi)\dfrac{d^m u}{d\xi^m}\right)$, з областю визначення $\mathfrak{D}(A_{m,m}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ і $\mathfrak{D}(A_{m,l}) = \big\{u \in C^\infty(\bar{\Omega})\colon u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0, j = 0, \ldots, m - l - 1\big\}$ для всіх $l = 0, 1, \ldots, m - 1$. Оператор $A_{m,l}$ має замикання $\bar{A}_{m,l}$ в $L_2(\Omega)$ ([1, теор. 7.4.1]), причому його підпростір векторів експоненціального типу щільний в $L_2(\Omega)$[2].

Нехай $\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}_{m,l}) = \big\{u \in \mathfrak{D}^\infty(\bar{A}_{m,l})\colon (\lambda_j I - \bar{A}_{m,l})^{r_j} x = 0\big\}$ — спектральний підпростір, асоційований з власним значенням λ_j кратності r_j; $\mathcal{R}^\nu(\bar{A}_{m,l})$ — комплексна лінійна оболонка в $L_2(\Omega)$ всіх спектральних підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}_{m,l})$ таких, що $|\lambda_j| < \nu$. Визначимо простір $\mathcal{R}(\bar{A}_{m,l}) = \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{R}^\nu(\bar{A}_{m,l})$ з квазінормою $|u|_{\mathcal{R}(\bar{A}_{m,l})} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \inf\big\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{R}^\nu(\bar{A}_{m,l})\big\}$.

Теорема 1 *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B^s_{2,\tau}(\Omega)} \le (\tau s^{-1}(s+1)^2)^{1/\tau} |u|^s_{\mathcal{R}(\bar{A}_{m,l})} \|u\|_{L_2(\Omega)},$$

$$E(t,u) \le 2^{(s+1)/2} (\tau^{-1} s (s+1)^{-2})^{1/\tau} t^{-s} \|u\|_{B^s_{2,\tau}(\Omega)},$$

де $E(t,u) = \inf\Big\{\|u - u^0\|_{L_2(\Omega)}\colon u^0 \in \mathcal{R}(\bar{A}_{m,l}), |u^0|_{\mathcal{R}(\bar{A}_{m,l})} \le t\Big\}$.

[1] Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М: Мир, 1980. – 664 с.

[2] Dmytryshyn M., Lopushansky O. *Bernstein-Jackson-type inequalities and Besov spaces associated with unbounded operators* // J. Inequal. Appl. – 2014. – **2014**, 105. – P. 1-12.

Іван Івасюк, Михайло Копач, Любов Костишин,
Ольга Петрів

Декомпозиція операторних рівнянь за допомогою методів ітеративного агрегування

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника Івано-Франківськ, Україна
E-mail: kopachm2009@gmail.com

Сучасні обчислювальні технології істотно експлуатують високопродуктивні багатопроцесорні режими обчислень, основою яких є алгоритми декомпозиції задач. Принцип декомпозиції грунтується на алгоритмах, за допомогою яких задачі високої розмірності замінюються задачами меншої розмірності. Цим часто створюється можливість побудови розпаралелених схем обчислень. З поміж найуживаніших методик декомпозиції операторних рівнянь досить результативними є багатопараметричні методи ітеративного агрегування (див., напр., [1]).

В пропонованій доповіді для рівняння $x = Ax + b$, де $A : E \to E$, $E-$ банахів простір, $b \in E$, $A-$ лінійний неперервний оператор, розглядаються способи побудови як однопараметричних, так і багатопараметричних методів ітеративного агрегування. При цьому запропонована Б.А. Шуваром та розвинута разом з його учнями (див., напр., [2]) методика дослідження методів ітеративного агрегування не вимагає додатності оператора A, вільного члена b та агрегуючих функціоналів, а також виконання умови $\rho(A) < 1$ для спектрального радіуса оператора A.

[1] Цурков В.И. *Декомпозиция в задачах большой размерности.* – М.: Наука, 1981. – 352 с.

[2] Шувар Б.А., Копач М.І., Обшта А.Ф. *Агрегаційно-ітеративна декомпозиція операторних рівнянь.* – Івано-Франківськ: Супрун В.П., 2016. – 164 с.

Загороднюк А.В., Кравців В.В.

Мультиплікативна згортка на алгебрі блочно-симетричних аналітичних функцій

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" , Івано-Франківськь, Україна
E-mail: azagorodn@gmail.com, maksymivvika@gmail.com

Нехай
$$\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^s$$
нескінченна ℓ_1-сума копій банахового простору $\mathbb{C}^s$. Тоді кожен елемент з $\overline{x} \in \mathcal{X}_\infty^s$ може бути зображений у вигляді послідовності $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, де $x_n \in \mathbb{C}^s$, з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{s}|x_k^i|$.

Поліном P на просторі $\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^s$ називається блочно-симетричним (або векторно-симетричним) якщо:

$$P\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^s \end{pmatrix}_1, \ldots, \begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ \vdots \\ x_m^s \end{pmatrix}_m, \ldots\right)$$
$$= P\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^s \end{pmatrix}_{\sigma(1)}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ \vdots \\ x_m^s \end{pmatrix}_{\sigma(m)}, \ldots\right),$$

для будь-якої підстановки $\sigma \in \mathcal{G}$, $\in \mathcal{G}$ — група підстановок на множині $\mathbb{N}$, де $\begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^s \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^s$. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ алгебру блочно-симетричних поліномів на $\mathcal{X}_\infty^s$.

Алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ утворюють поліноми

$$H_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(x^1, x^2, \ldots, x^s) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i^1)^{k_1}(x_i^2)^{k_2}\ldots(x_i^s)^{k_s},$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ — алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу і $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ — спектр цієї алгебри.

Означення 1.

Нехай $(x^1, x^2, \ldots, x^s), (y^1, y^2, \ldots, y^s) \in \mathcal{X}_\infty^s$. Введемо мультиплікативний зсув елементів $(x^1, x^2, \ldots, x^s)$ і $(y^1, y^2, \ldots, y^s)$ як вектор, який складається з елементів $\begin{pmatrix} x_i^1 y_j^1 \\ x_i^2 y_j^2 \\ \vdots \\ x_i^s y_j^s \end{pmatrix}$, занумерованих у довільному порядку, $i, j \in \mathbb{N}$ і позначимо $(x^1, x^2, \ldots, x^s) \diamond (y^1, y^2, \ldots, y^s)$.

Означення 2.

Для довільної функції $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ і $\theta \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)'$ мультиплікативну згортку введемо за формулою:

$$(\theta \diamond f)(\tilde{x}) = \theta[M_{\tilde{x}}(f)], \text{для кожного } \tilde{x} \in \mathcal{X}_\infty^s.$$

Означення 3.

Для довільних $\phi, \theta \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)'$ мультиплікативну згортку введемо за формулою:

$$(\phi \diamond \theta)(f) = \varphi(\theta \diamond f), \text{для кожного } f \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s).$$

У доповіді буде доведено деякі властивості мультиплікативного зсуву та мультиплікативної зготки.

Інна Кальчук, Юрій Харкевич

Про наближення класів $W^r_\beta H^\alpha$ бігармонічними інтегралами Пуассона в рівномірній метриці

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-mail: kalchuk_ i@ukr.net, kharkevich.juriy@gmail.com

Нехай $r > 0$ і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$ є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то цю функцію називають (r, β)-похідною функції f в розумінні Вейля-Надя і позначають через f^r_β. Множину усіх функцій f, котрі задовольняють таку умову, позначають через W^r_β [1].

Якщо $f \in W^r_\beta$, і при цьому $f^r_\beta \in H^\alpha$, тобто f^r_β задовольняє умову Ліпшиця порядку α: $|f^r_\beta(x+h) - f^r_\beta(x)| \le |h|^\alpha, 0 < \alpha \le 1, 0 \le h \le 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$, то кажуть, що f належить до класу $W^r_\beta H^\alpha$.

Величину

$$B_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})e^{-\frac{k}{\delta}}\big)\cos kt\Big\}dt, \delta > 0,$$

принято називати бігармонічним інтегралом Пуассона функції f.

В даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\delta \to \infty$ величин $\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \sup\limits_{f \in W^r_\beta H^\alpha} \|f(\cdot) - B_\delta(f;\cdot)\|_C$.

Теорема 1 *Нехай $r > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $r + \alpha \le 2$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність $\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{\theta(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha,\tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{1+r}} + \frac{1}{\delta^2}\right)$, $2^{\alpha-1} \le \theta(\alpha) \le 1$, де величина $A(\alpha,\tau)$ означена співвідношенням $A(\alpha,\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| dt$ і для неї справедлива оцінка $A(\alpha,\tau) = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln\delta), & r+\alpha = 2. \end{cases}$*

[1] Nagy B. *Über gewise Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I* // Periodischer Fall, Berichte der math. phys. KL. Akademie. – Leipzig, 1938. – **90**. – P. 103–134.

Анатолій Кореновський

Оцінки росту та спадання функції в термінах відносних коливань

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: anakor1958@gmail.com

Нехай майже всюди додатня на кубі $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$ функція $f \in L(Q_0)$. Відносне середнє коливання функції f на кубі $Q \subset Q_0$ відображає величина $\Omega(f;Q)/f_Q$, де $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x)\,dx$ – середнє значення, а $\Omega(f;Q) = |Q|^{-1} \int_Q \left|f - f_Q\right|\,dx$ – середнє коливання на кубі Q. Для $0 < \sigma \le |Q_0|$ позначимо
$$\nu(f;\sigma) = \sup_{|Q| \le \sigma} \left(\Omega(f;Q)/f_Q\right),$$
де точна верхня межа береться по всім кубам $Q \subset Q_0$, міра яких $|Q| \le \sigma$. Функція $\nu(f;\sigma)$ характеризує відносні середні коливання функції f на малих кубах. Очевидно, що $\nu(f;\sigma) \le 2$. За відомою теоремою Гурова – Решетняка та її подальших уточнень (див., наприклад, [1]), якщо $\nu(f;\sigma)$ достатньо мала принаймні при якому-небудь $\sigma > 0$, то швидкість росту функції f до нескінченності не може бути більшою, ніж степенева. Точніше, незростаюча рівновимірна перестановка $f^*(t)$ функції f при $t \downarrow 0+$ обмежена зверху степеневою функцією.

Основним результатом даного повідомлення є аналогічна оцінка знизу неспадної рівновимірної перестановки $f_*(t)$. Для формулювання відповідного твердження позначимо $f_{**}(t) = t^{-1} \int_0^t f_*(u)\,du$.

Теорема 1 *Нехай* $\nu(f;|Q_0|) \le \left(\mathrm{e}\left(1+2^d\right)\right)^{-1}$. *Тоді*
$$f_{**}(t) \ge \frac{1}{4} f_{Q_0} \exp\left(-\left(1+2^d\right)\mathrm{e}\int_{2^d \cdot t}^{|Q_0|} \nu(f;\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma}\right), \quad 0 < t \le 2^{-d}\,|Q_0|\,.$$

Основою доведення теореми 1 є оцінка відносних середніх коливань перестановки через функцію $\nu(f;\sigma)$, яка, можливо, представляє і самостійний інтерес. Тут ми її не наводимо за браком місця.

З теореми 1, зокрема, випливає, що за умови збіжності інтегралу
$$\int_0^{|Q_0|} \nu(f;\sigma)\,d\sigma/\sigma,$$
функція f відокремлена від нуля на Q_0. Раніше було відомо ([1]), що ця умова тягне також неперервність f на Q_0.

[1] Anatolii Korenovskii. *Mean Oscillations and Equimeasurable Rearrangements of Functions.* – Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 2007. – 190 pp.

Сергій Кріль

Динаміка дзета-функцій Рімана в критичній смузі, принцип оптимальності

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: krilso@i.ua

Досліджується поведінка дзета-функцій Рімана в критичній смузі. Ця функція для комплексних чисел $s = \sigma + it$ при $\sigma > 1$ визначена як сума узагальненого гармонійного ряду, тобто $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h^{-s}$.

В своїх дослідженнях Л. Ейлер показав, що має місце тотожність $\sum_{n=1}^{\infty} h^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, де добуток розглядається по всіх простих числах.

Для комплексних значень дзета-функцію вперше вивчав Б. Ріман, який і вказав ряд глибоких властивостей цієї функції [1].

При $0 < \sigma < 1$ дзета-функцію завжди (причому різними способами) можна подати у вигляді (1) [2-3]

$$\zeta(s) = f(x) + \chi(s) f(1 - s), \tag{1}$$

де $\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{-1}$, $f(s)$ – деякий аналітичний вираз. Зокрема, виходячи з (1) показано, що на критичній прямій, коли $\sigma = \dfrac{1}{2}$ для функції матиме місце представлення

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = k(t) \exp i\varphi(t)(1 + \exp(-2i(\theta(t) + \varphi(t))), \tag{2}$$

де $\theta(t) = \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t)$, $\Delta(t) = 0(t^{-1})$, $k(t)$ та $\varphi(t)$ – відповідно модуль та аргумент величини $f(s)$ при $s = \dfrac{1}{2} + it$. Це дає змогу прослідкувати динаміку функції на критичній прямій при зростанні t. Доведено, що на цій прямій знаходяться майже всі нетривіальні нулі, тобто має місце гранична рівність

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} = 1,$$

де $N(T)$ – кількість нетривіальних нулів функції в прямокутнику $D = \{0 < \sigma < 1,\ 0 < t \leq T\}$, $N_0(T)$ – кількість нулів на відрізку $0 < t \leq T$ критичної прямої.

Також розглянуто обернену задачу – відшукання нетривіальних нулів дзета-функції по відомих простих числах. При цьому використовуються псі-функція Чебишова, нулі Грама та один варіант варіаційно-ітеративного методу.

[1] Риман Б. *О числе простых чисел, не превышающих данной величины: сочинения.* – Москва: ОГИЗ, 1948. – 543 с.

[2] Титчмарш Е.К. *Теория дзета-функции Римана.* – Москва: ИЛ, 1953. – 409 с.

[3] Edward H.M. *Riemann's Zeta Function.* – Acad: Press, 1974. – 317 c.

Марія Марцінків

Оператор лінійного продовження для мультиліпшицевих та ліпшицево поліноміальних відображень

*ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника Івано-Франківськ, Україна
E-mail: mariadubey@gmail.com*

У статті [1] введено поняття дволіпшицевого відображення та побудовано вільний банахів простір, з допомогою якого дволіпшицеве відображення може бути подовжене до дволінійного, а також наведені деякі властивості вільних банахових просторів для дволіпшицевого відображення. У [2] введено клас ліпшицево поліноміальних відображень $\mathbb{P}({}^nX, E)$.

У запропонованій доповіді розглядатиметься клас мультиліпшицевих відображень $Lip_0^n(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$, властивості вільних банахових просторів для мультиліпшицевих відображень, а також властивості оператора продовження для мультиліпшицевих та ліпшицево поліноміальних відображень, зокрема:

Теорема 1 *Нехай* X *є замкненим підпростором банахового простору* Y*. Якщо* $B^n(X)$ *є локально доповнюваним у* $B^n(Y)$ *для деяких* $n > 0$*, тоді існує лінійний оператор продовження з* $Lip_0(X)$ *у* $Lip_0(Y)$*, з* $Lip_0^n(X^n)$ *у* $Lip_0^n(Y^n)$ *і з* $\mathbb{P}({}^nX)$ *у* $\mathbb{P}({}^nY)$.

Теорема 2 *Якщо банахів простір* X *є абсолютно ліпшицевим ретрактом, тоді для довільного банахового простору* Y*, який містить* X *як замкнений підпростір, існує неперервний лінійний оператор продовження з* $Lip_0(X)$ *у* $Lip_0(Y)$ *і з* $Lip_0^n(X^n)$ *у* $Lip_0^n(Y^n)$*, та з* $\mathbb{P}({}^nX)$ *у* $\mathbb{P}({}^nY)$.

[1] Dubei M., Tymchatyn E. D., Zagorodnyuk A. *Free Banach Spaces and Extension of Lipschitz Maps* // Topology, Elsevier. – 2009. – **V. 48,** , № 2. – P. 203–213.

[2] Дубей М. В.,Загороднюк А. В. *Лінеаризація ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. - 2011. – **Т.3,** , №1. – С.40–48.

Володимир Маслюченко

Аналіз у Чернівецькому університеті

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: v.maslyuchenko@gmail.com

Розвиток математичного аналізу в Чернівецькому університеті розпочався майже з його заснування, коли у 1876 році тут став працювати австрійський математик Леопольд Ґеґенбауер. Після нього в австрійський період аналізом у Чернівецькому університеті займалися такі відомі математики як Ґустав фон Емеріх, Йосип Племель, Ганс Ган, у румунський – Симион Стоїлов і Мирон Николеску, в радянський – Микола Боголюбов, Михайло Фаґе, Карл Фішман, Микола Нагнибіда. Їх вклад проаналізовано в працях [1,5-10].

У 50-их роках XX століття на кафедрі математичного аналізу з ініціативи М.Фаґе і К.Фішмана постала сильна школа з теорії операторів у просторах аналітичних функцій. Її досягненням проаналізовано в праці [2] Вклад у розвиток цієї школи внесли М. Нагнибіда,
Й. Кушнірчук, Т. Шмата, М. Березовський, Г.Сасько, П. Настасієв,
Н. Олійник, В. Маслюченко, С. Лінчук, Н. Лінчук, Т. Звоздецький, Ю. Лінчук. Дослідження М. Фаґе про L-базиси продовжив І. Григорчук, який працював і в теорії наближень. Історію розвитку функціонального аналізу і теорії нарізно неперервних відображень до 2010 року проаналізовано в працях [3,4].

Вказані напрямки активно розвивалися і в останнє дисятиліття, за яке на кафедрі математичного аналізу було захищено три докторських (О. Маслюченко, В. Несеренко, О. Карлова) і сім кандидатських дисертацій (О. Філіпчук, О. Гайдукевич, Г. Волошин, В. Холоменюк, О. Мороник, В. Косован, Г. Гуменчук), а ще дві кандидатські дисертації подано до захисту (Д. Онипа і В. Мельник).

Зараз на кафедрі математичного аналізу працює шість докторів фізико-математичних наук (В. Маслюченко, М. Попов, В. Михайлюк, О. Маслюченко, В. Нестеренко, О. Карлова) і три кандидати (Т. Звоздецький, Ю. Лінчук і О. Фотій). Про досягнення як наших сучасників, так і їхніх попередників і буде йти мова у доповіді.

[1] Маслюченко В.К. *Розвиток дослідҗжень з математичного аналізу в Чернівецькому університеті* // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу присв. 70-річчю кафери математичного аналізу Чернів. ун-ту, 30 вересня – 3 жовтня. 2010, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – С. 7–15.

[2] Лінчук С.С. *Огляд результатів досліджень з теорії операторв у просторах аналітичних функцій у Чернівецькому університеті* // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу присв. 70-річчю кафери математичного аналізу Чернів. ун-ту 30 вересня – 3 жовтня. 2010, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – С. 15–22.

[3] Маслюченко В.К., Попов М.М. *Функціональний аналіз у Чернівецькому університеті* // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу присв. 70-річчю

кафери математичного аналізу Чернів. ун-ту 30 вересня – 3 жовтня. 2010, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – С. 23–27.

[4] Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення у Чернівецькому університеті (1985-2010)* // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу присв. 70-річчю кафери математичного аналізу Чернів. ун-ту 30 вересня – 3 жовтня. 2010, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги- XXI, 2010. – С. 28–34.

[5] Маслюченко В.К. *Знайомство з Гансом Ганом.* – Чернівці: ЧНУ, 2014. – 108 с.

[6] Кушнірчук Й.Ф., Лінчук С.С., Маслюченко В.К., Настасієв П.П., Царьков М.Ю. *К.М. Фішман(1914-2010)* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2010. – **501**. – С. 120-124.

[7] Маслюченко В.К. *Карл Моріцович Фішман: до 100-ліття від народження* // Наукова конф., присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаґе, 1-4 липня, 2015, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці : ЧНУ, 2015. – С. 6-11.

[8] Маслюченко В.К., Фаґе Д.М. *До сторіччя від народження М.К. Фаґе* // Наукова конф., присвячена сторіччю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаґе, 1-4 липня, 2015, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці : ЧНУ, 2015. – С. 11-16.

[9] Звоздецький Т.І., Лінчук Н.Є., Лінчук С.С., Маслюченко В.К., Настасієв П.П. *Пам'яті професора Нагнибіди* // Мат. студії. – 2005. – **24**, №2. – С. 207-216.

[10] Лінчук С.С. *Про наукову спадщину професора Миколи Івановича Нагнибіди* // Мат. вісник НТШ. – 2009. – **6**, № 2. – С. 14-34.

Володимир Маслюченко, Галина-Жанна Маслюченко

Математика і Казимир Малевич

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: v.maslyuchenko@gmail.com

Геометричні фігури часто виступають як елементи картин художників. Вивчення таких явищ цікаве як для математиків, так і мистецтвознавців. Про них частково йшла мова у працях [1,2], де згадувалася творчість Леонардо да Вінчі, Альбрехта Дюрера, Мауріца Ешера та мистецький проект Святослава Вірсти "Я формула". Тут ми розглянемо вплив математики на творчість відомого художника Казимира Малевича (1879-1935), визначного діяча українського авангарду, засновника супрематизму і одного з фундаторів кубофутуризму, як сказано про нього у Вікіпедії.

Слово супрематизм, що його ввів сам митець, ймовірно походить від відомого математичного терміну супремум, що означає точну верхню межу множини, тбто найменшу з її верхніх меж. Воно породжене словами найвищий, граничний, початковий [3]. Іконою супрематизму [3, 4] вважають картину К. Малевича, датовану 1913 роком, широко відому в наш час під назвою "Чорний квадрат"(рис. 1)

Рис. 1: К. Малевич. Чорний Хрест. Чорний квадрат. Чорний круг.

Як бачимо на рис. 1 К. Малевич використовував і інші геометричні фігури: хрест і круг. Сам К. Малевич тлумачив свою картину так: "Квадрат = відчуття, біле поле = "Ніщо"поза цим відчуттям". У Петербурзі у 2001 році вийшов великий том [5] літературних творів К. Малевича російською мовою під назвою "Черный квадрат". До речі, К. Малевич народився в Києві, володів українською мовою і позиціонував себе українцем польського походження. Досить повну біографію написав Анжей Туровський [6], фрагменти цієї книги у перекладі Олени Новикової можна знайти в інтернеті.

Картин з геометричним антуражем у К. Малевича багато : білі і червоні квадрати, чорні та червоні прямокутники і круги, трикутники з накладеними кругами. Цікаву інформацію про К Малевича подав Ростислав Шмагало. У своїй монографії [7, с. 359] в абзаці про так званий "супрематичний чайник"він зазначає: "В основу формотворення художник поклав прямий кут, кулю, куб, циліндр. В основі орнаменту — математичний, тобто "машинний"шлях його створення".

Про зв'язки К. Малевича з Україною написано багато. Воно зібрано, наприклад, у згаданому вище перекладі розділу книжки А. Туровського. Згадаємо тут хоча б статтю Дмитра Горбачова [8], який вважається чи не найвідомішим Україні, а то й у світі знавцем творчості К. Малевича.

[1] Маслюченко В.К., Матвіїшин Г.Я. *Мистецтво і математика* //vii міжнар. наук.-пр. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта Світязь, 3-5 червня 2018р., тези доповідей. — Луцьк: ПП Іванюк В.П., 2018. — С.159.

[2] Маслюченко В.К., Матвіїшин Г.Я. *Мистецький проект "Я формула"* //vii міжнар. наук.-пр. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта Світязь, 3-5 червня 2018р., тези доповідей. — Луцьк: ПП Іванюк В.П., 2018. — С.160-161.

[3] Власенко Ірина. *Таемниця чорного квадрата* https://auamodna.com/articles/taemnytcya-chornogo-kvadrata/

[4] Філевська Тетяна. *Все що ви хотіли знати про "Чорний квадрат але боялись запитати.* https://life.pravda.com.ua/culture/2015/06/24/196184/

[5] Малевич К. *Черный квадрат.* – СПб: Азбука, 2001. – 576 с.

[6] Turowski A. *Malewicz w Warszavie.* – Krakow: 2002.

[7] Шмагало Ростислав. *Мистецька освіта в Україні середини XIX — середини XX ст.: структурування, методологія, художні позиції.* – Львів: Українські технології, 2005. – 528 с.

[8] Горбачов Дмитро. *Всесвіт Малевича з центром у Києві* // Україна. – 1988. – № 28 – С. 11-12.

Василь Мельник

Різні аналоги теореми Гана про проміжну функцію

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: windchange7@gmail.com

Ми називаємо пару функції (g,h) *парою Гана* на топологічному просторі X, якщо $g:X\to\mathbb{R}$ і $h:X\to\mathbb{R}$ — є, відповідно, напівнеперервними зверху та знизу, такими, що $g(x)\le h(x)$ на X. Якщо $g(x)<h(x)$ на X, тоді ми називаємо (g,h) *строгою парою Гана.* Функція $f:X\to\mathbb{R}$ називається *проміжною* для пари Гана (g,h) на X, якщо $g(x)\le f(x)\le h(x)$ на X та *строго проміжною*, якщо $g(x)<f(x)<h(x)$ як тільки $g(x)<h(x)$ і $g(x)=f(x)=h(x)$ коли $g(x)=h(x)$. Теорема Гана-Д‘єдонне-Катетова-Тонґа [1, p. 105] стверджує, що T_1-простір X тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана (g,h) на X має проміжну неперервну функцію. Ця теорема має ряд аналогів ([2] і література звідти). Тут представлено деякі з недавних результатів, що стосуються диференційовних проміжних функцій та проміжних функцій для пар Гана нарізно неперервних функцій.

Теорема 1 *Нехай X сепарабельний Гільбертовий простір та (g,h) — строга пара Гана на X. Тоді існує C^∞-функція $f:X\to\mathbb{R}$, яка є строго промжною для (g,h).*

Цей результат можна довести для асплундових просторів та паралелепіпедів в $\mathbb{R}^n$

Для $f:X\times Y\to Z$ та $(x,y)\in X\times Y$ покладемо $f^x(y)=f(x,y)=f_y(x)$. Для топологічних просторів X, Y та Z ми позначаємо через $C(X)$, $C^u(X)$ та $C^l(X)$ простори неперервних, напівнеперервних зверху та знизу відповідно функцій $f:X\to\mathbb{R}$, через $CC(X\times Y)$, $C^uC^u(X\times Y)$ і $C^lC^l(X\times Y)$ — простори неперервних, напівнеперервних зверху та знизу відповідно функцій, заданих $f:X\times Y\to\mathbb{R}$, і через $C(X,Y)$ та $CC(X\times Y,Z)$ — простори неперервних відображень $f:X\to Y$ і нарізно неперервних відображень $f:X\times Y\to Z$ відповідно.

Для топологічний просторів X і Y ми назвемо пару функцій (g,h), $g\in C^uC^u(X\times Y)$ та $h\in C^lC^l(X\times Y)$, *нарізною парою Гана.*

Нагадаємо, що *хрест-топологією* $\mathcal{C}$ на добутку $X\times Y$ двох топологічних просторів називається топологія, що складається з множин $O\subseteq X\times Y$ таких, що дя кожної точки $p=(x,y)\in O$ існують околи U точки x та V точки y в просторах X та Y відповідно з властивістю $(U\times\{y\})\cup(\{x\}\times V)\subseteq O$.

Теорема 2 *Нехай X і Y — T_1-простори. Тоді кожна нарізна пара Гана (g,h) на добутку $X\times Y$ має проміжну нарізну пару Гана тоді і тільки тоді, коли простір $Q=(X\times Y,\mathcal{C})$ є нормальним.*

[1] Р. Энгелькинг *Общая топология..* – М.: Мир, 1986. – 752 с.

[2] В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, В.С. Мельник *Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій* // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, 3-4. – С. 93-100.

Михайло Митрофанов

Деякі питання апроксимації неперервних функції на банаховому просторі пов'язані з топологією норми

*Інститут прикладних проблем механіки і математики імені
Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: mishmit@rambler.ru*

Часткову відповідь на питання апроксимації неперервних функції на підмножинах сепарабельних дійсних банахових просторів було дано у 1954 році Я. Курцвейлом у роботі [1]. Для апроксимації у розгляд були введені відокремлювальні поліноми. На ширшому підкласі дійсних банахових просторів у праці [2] були апроксимовані рівномірно неперервні функції. Для цього введені у розгляд рівномірно аналітичні та відокремлювальні функції. На підмножинах комплексного банохового простору апроксимації неперевних та рівномірно неперервні функції розглянуто у праці [4]. У праці [3] дається відповідь на питання співпадіння слабко поліноміальної топології та топології норми. А також досліджується питання співпадіння слабко, рівномірно слабко аналітичної топології та топології норми. Під час доповіді ми обговоримо топологічні питання пов'язані з апроксимацією неперервних функцій на банахових просторах, які стосуються відокремлювальних поліномів та відокремлювальних рівномірно аналітичних функції.

[1] J. Kurzweil, *On approximation in real Banach spaces* //Studia Math. – 1954. – **vol 14** – P. 214–231.

[2] Boiso M. C., Hájek P. *Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2001. – **V.256**– P. 80–98.

[3] Загороднюк А.В. Митрофанов М.А. *Слабко поліноміальна та слабко аналітична топологія на банахових просторах і на просторах фреше* // Карпатськи математичні публікації – 2012. – **Т.4** №1 – С. 49–57.

[4] Mitrofanov M. A. *Approximation of continuous functions on complex Banach spaces* (Translation) // Math. Notes – 2009. – **vol 86** – No. 4 – P. 530–541.

Василь Нестеренко, Олена Фотій

Про деякі характеризації аналогів неперервності

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
E-mail: v.nesterenko@chnu.edu.ua, ofotiy@ukr.net

Добре відомою є характеризація неперервності відображення в термінах замикання образу: відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \qquad (*)$$

для довільної підмножини A простору X. Зрозуміло, що коли вимагати виконання умови $(*)$ не для всіх підмножин простору X, а лише для деяких, то включення $(*)$ буде означати певне ослаблення неперервності. В [1] для деяких відомих ослаблень неперервності було знайдено системи множин, які характеризують їх за допомогою умови $(*)$. Однак, для деяких добре відомих аналогів неперервності (наприклад, квазінеперервності) таких систем не було знайдено.

Пізніше, в [2], було встановлено зв'язок між поняттям $\mathcal{A}$-неперервності та поняттям неперервності відносно системи. Це дало можливість узагальнити більшість результатів з [1].

Виявляється, що одержати характеризацію квазінеперервності функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ в термінах замикання образу (умова $(*)$) не вдається.

Теорема 1 *Для довільної системи* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ *існує квазінеперервна функція* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *така, що умова* $(*)$ *не виконуєтьcя для системи* $\mathcal{A}$.

[1] Нестеренко В.В. *Нові характеризації деяких ослаблень неперервності* // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, 3-4. – С. 106–113.

[2] Нестеренко В.В. *Характеризації різних ослаблень неперервності з допомогою замикання* // Буковинський математичний журнал. – 2014. –**2**, 2-3. – С. 177-182.

Наталія Парфінович

Найкращі несиметричні наближення класів згорток узагальненими сплайнами

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Нехай L_p $(1 \le p \le \infty)$ – стандартні простори 2π-періодичних функцій. Для $f \in L_p$ і $0 < \alpha, \beta < \infty$ покладемо $\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p$, $f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}$.

Найкращим (α, β)–наближенням класу функцій $M \subset L_p$ множиною $H \subset L_p$ в метриці L_p називають величину

$$E(M, H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_{p;\alpha,\beta}.$$

Якщо задані ядро $K \in L_1$ і множина $F \in L_1$, то через $K * \varphi$ позначимо клас функцій вигляду $f(x) = a\mu + (K * \varphi)(x)$, $\varphi \in F$, $\varphi \perp \mu$, $a \in \mathbf{R}$, де $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $K \perp 1$ і $\mu = \mu(K) = 0$ у супротивному випадку.

Неперервне на $(0, 2\pi)$ ядро K, що не є тригонометричним поліномом, будемо називати CVD-ядром $(K \in CVD)$, якщо $\nu(a\mu + K * \varphi) \le \nu(\varphi)$ для довільної неперервної функції φ, $\varphi \perp \mu$, і довільного $a \in \mathbf{R}$ ($\nu(g)$ – кількість змін знаку 2π-періодичної функції g на періоді).

Для невід'ємної функції $f \in L_1$ позначимо через $r(f, t)$ неспадне переставлення звуження функції f на проміжок $[0, 2\pi]$. Якщо g-довільна функція із L_1, покладемо $\Pi(g, t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t)$. Множину $F \subset L_1$ назвемо Π-інваріантною, якщо з $f \in F$ і $\Pi(g) = \Pi(f)$ випливає $g \in F$.

Для $n, r \in \mathbf{N}$ і $h \in (0; 2\pi/n)$ через $S^1_{2n,r}(h)$ поначимо простори 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами $2j\pi/n$ і $2j\pi/n + h$, $j \in \mathbf{Z}$, а через $\varphi_{n,0}(\alpha, \beta)$ – парну $2\pi/n$-періодичну функцію, яка дорівнює α для $t \in [0; \pi\beta/n(\alpha + \beta)]$ і $-\beta$ для $t \in (\pi\beta/n(\alpha + \beta); \pi/n]$.

Теорема 1 *Нехай* $n, r \in \mathbf{N}$, $h \in (0, 2\pi/n)$, $0 < \alpha, \beta < +\infty$, $K \in CVD$, F – *довільна* Π-*інваріантна множина* 2π-*періодичних функцій. Тоді*

$$E(K * F, K * S^1_{2n,r}(h))_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha, \beta); t) \Pi(f, t)\, dt.$$

Борис Пелешенко

Про обмеженість вагового середнього оператора Чезаро просторах типу Лоренця

*Дніпровський державний аграрно-економічний університет, Дніпро,
Україна*
E-mail: dsaupelesh@ukr.net

В доповіді сформульовані умови в одновимірному випадку про обмеженість оператора, який є сумою вагового середнього Харді-Літтвуда та вагового середнього Чезаро, з застосуванням інтерполяції квазілінійних операторів слабкого типу, встановленої автором [1]. Вперше Xiao одержав для вагових середніх операторів Харді-Літтвуда та Чезаро необхідні та достатні умови обмеженості в просторах p-суміруємих функцій в n-вимірному [2]. В [2] одержано умови обмеженості оператора Чезаро в просторах Герця.

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) \tag{1}$$

[1] Пелешенко Б.И. *Интерполяция операторов слабого типа в пространсвах Лоренця//* Укр. мат. журн. – 2005. – **57**. –С. 1490-1507.

[2] Kuang Jichang*The norm inequalities for the weighted Cesaro mtan operators //* Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – **56**. – С. 2588-2595.

Катерина Пожарська

Оцінки ентропійних чисел деяких класів періодичних функцій багатьох змінних

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: kate.shvai@gmail.com

Нехай X — банахів простір і $B_X(\boldsymbol{y}, r) = \{\boldsymbol{x} \in X\colon \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_X \leq r\}$ — куля радіуса r з центром в точці $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

Для компактної множини $A \subset X$ і $\varepsilon > 0$ через $\varepsilon_k(A, X)$ позначимо ентропійні числа (див., наприклад, [1]) цієї множини:

$$\varepsilon_k(A, X) = \inf \left\{ \varepsilon\colon \quad \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in X\colon \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_X(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon) \right\}.$$

У доповіді мова буде йти про ентропійні числа класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [2] періодичних функцій багатьох змінних, які при $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, співпадають із відомими аналогами класів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, та, при $\theta = \infty$, — класів Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$.

А саме, отримано порядкові оцінки величин $\varepsilon_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, $1 \leq q < \infty$, зокрема, у випадку малої гладкості, та величин $\varepsilon_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$.

[1] Höllig K. *Diameters of classes of smooth functions* // Quant. Approxim. — New York: Acad. Press, 1980. — P. 163–176.

[2] Yongsheng S., Heping W. *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1997. — **219**. — С. 356–377.

Микола Працьовитий

Неперервні функції з фрактальними властивостями: способи задання та методи дослідження

НАН України, НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: prats4444@gmail.com

Ми кажемо, що неперервна функція має фрактальні властивості, якщо фракталом (автомодельною множиною або множиною дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) є
1) або її графік;
2) або множина несталості;
3) або множина рівня;
4) або множина особливостей (диференціального, варіаційного тощо характеру).

Фрактальні властивості мають монотонні, немонотонні, ніде не монотонні, неперервні сингулярні функції, зокрема ніде не монотонні, недиференційовні функції. Їх сім'ї у просторі $C[0;1]$ є досить масивними, а саме: домінуючими в топологічному сенсі. Загальна теорія функцій вказаних типів ще достатньо бідна.

Явно задавати і вивчати такі функції непросто. Сьогодні успішно розвивається їх конструктивна теорія і для цього ефективно (залучаються) використовуються різні системи кодування (зображення) дійсних чисел, в яких моделлю дійсного числа є ряд або ланцюговий дріб. Результативність цього використання є наслідком детально вивченої геометрії зображення, відомих метричих відношень і нормальних властивостей дійсних чисел.

У доповіді пропонується ретроспективний погляд на існуючі способи задання функцій з автомодельними і фрактальними властивостями та схеми їх дослідження. Розглядувані класи функцій містять класичні функції: Мінковського, Салема, Серпінського та ін.

У доповіді також на модельних прикладах розглядається задача про розподіл значень функції при заданому розподілі аргумента.

[1] Працьовитий М.В. *Ніде не монотонні сингулярні функції* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2011. — **№12**. – С. 24-36.

[2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

Микола Працьовитий[1], *Яніна Гончаренко*[2],
Ірина Лисенко[2]

Функції розподілу канторівського типу, пов'язані з рядама Сільвестера і розподіли їх значень

[1] *ІМ НАН України, НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна*
E-mail: prats4444@gmail.com
[2] *НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна*
E-mail: yan_a@ukr.net, iryna.pratsiovyta@gmail.com

Неперервна функція розподілу називається функцією канторівського типу, якщо її спектр (тобто множина точок росту) є ніде не щільною. Взагалі кажучи, функція канторівського типу є сумішшю абсолютно неперервної та сингулярної компоненти:

$$F(x) = \alpha_1 F_{ac}(x) + \alpha_2 F_s(x), \;\; \alpha_i \geq 0, \;\; \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Окремої уваги заслуговують сингулярні функції канторівського типу (нагадаємо, що неперервна функція називається сингулярною, якщо вона відмінна від константи і має похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега). Зрозуміло, що коли спектр функції має нульову міру Лебега, то функція є сингулярною.

Для розвитку конструктивної теорії функцій канторівського типу ефективно використовуються системи зображення (кодування) дійсних чисел з нескінченним алфавітом. Однією з таких є система, яка в якості алфавіту використовує множину цілих невід'ємних чисел і грунтується на розкладах чисел в ряди Сільвестера.

Теорема 1 *Для довільного числа $x \in (0;1]$ існує єдина послідовність (q_n) натуральних чисел така, що $q_1 > 1$, $q_{n+1} > q_n(q_n - 1)$,*

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + ... + \frac{1}{q_n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} \equiv \Delta_{q_1 q_2 \ldots q_n \ldots} = \Delta^S_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots},$$

де $g_1 = q_1$, $g_2 = q_2 - q_1$, $g_{n+1} = q_{n+1} - q_n$, $n \in N$.

Доповідь присвячена розподілам значень випадкової величини $Y = F_\xi(X)$, де F – канторівська функція розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^S_{\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n \ldots}$ з незалежними цифрами (η_n) S-зображення, X – випадкова величина з заданим розподілом.

Анатолій Прикарпатський[1], *Тарас Банах*[2]

Про одну математичну проблему А.М. Самойленка в теорії ергодичних деформацій нелінійних гамільтонових систем

[1] *Інститут математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, Дрогобич, Україна*
E-mail: pryk.anat@cybergal.com
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*
E-mail: t.o.banakh@gmail.com

За останні роки методи симплектичної геометрії в застосуванні до вивчення широкого класу гамільтонових динамічних систем зазнали досить бурхливого розвитку. Зокрема, при аналізі структури періодичних розв'язків неавтономних гамільтонових систем на симплектичних многовидах були запропоновані нові математичні методи їх дослідження, що грунтуються на аналогу теорії Морса для нескінченно-вимірних многовидів петель та симплектичній геометрії лагранжевих многовидів. Так, вивчаючи ергодичні міри, асоційовані з лагранжевими динамічними системами на дотичних просторах до конфігураційних замкнутих многовидів, Дж. Мазер запропонував новий підхід до вивчення відповідних інваріантних ймовірнісних мір за допомогою спеціально сконтруйованої β-функції на групі гомологій лагранжевого многовиду. Ця функція дає, зокрема, можливість ефективно описати так звані гомології інваріантних ймовірнісних мір, що мінімізують відповідний лагранжевий функціонал дії. Як було показано в, підхід Дж. Мазера допускає нетривіальне узагальнення на випадок опису ергодичних мір, що пов'язані натурально з заданою неавтономною періодичною гамільтоновою системою на замкненому симплектичному многовиді. З цією метою в даній праці розвивається [1, 2, 3, 4] нова конструкція β-функції Дж. Мазера, асоційованої з відповідним многовидом Лагранжа та його гомологічною структурою. Грунтуючись, зокрема, на варіанті еліптичної техніки М. Громова. В праці конструюються скінченновимірні інваріантні підмноговиди петель, асоційованих з лагранжевим многовидом неавтономної гамільтонової системи, які є носіями відповідних інваріантних ергодичних мір. Оскільки побудовані інваріантні многовиди мають структуру метричних просторів, що допускають локально гомеоморфні відображення на стандартні метричні простори, в праці досліджується важлива проблема побудови ефективних критеріїв їх глобальної гомеоморфності, сформульована проф. А.М. Самойленком при дослідженні адіабатичних інваріантів повільно збурених інтегровних гамільтонових систем.

Acknowledgements.

Автори вважають своїм обов'язком виразити щиру вдячність колегам з Інституту математики НАН України та мехмату Київського наконального університету імені Тараса Шевченка за корисні обговорення отриманих результатів.

Зокрема, автори виражають щиру вдячність академіку А.М. Самойленку за стимулювання досліджень в теорії ергодичних деформацій гамільтонових систем. Авторам також приємно подякувати професору А.М. Плічку за ряд корисних порад та консультацій з функціонального аналізу, а також зауважень щодо деяких аспектів теореми Шоке та її застосувань.

[1] A. M. Samoilenko, A. K. Prykarpats'kyi, and V. H. Samoilenko, Lyapunov-Schmidt approach to studying homoclinic splitting in weakly perturbed Lagrangian and Hamiltonian systems, Ukrainian Mathematical Journal, 2003, Vol. 55, No. 1, pp 82-92

[2] Iryna Banakh, Taras Banakh, Anatolij Plichko, Anatoliy Prykarpatsky, On local convexity of nonlinear mappings between Banach spaces, Cent. Eur. J. Math. 2012, 10(6), pp 2264-2271

[3] Ya. A. Prykarpats'kyi, Mel'nikov-Samoilenko adiabatic stability problem, Ukrainian Mathematical Journal June 2006, Volume 58, Issue 6, pp 887–903

[4] Ya. A. Prykarpats'kyi, Symplectic approach to constructing ergodic measures, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 5, 2006

Софія Ратушняк

Клас фрактальних функцій, пов'язаних з Q_s-зображеннями дійсних чисел

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: ratush404@gmail.com

Нехай $A_s \equiv \{0, 1, ..., s-1\}$ – алфавіт, $L_s \equiv A_s \times A_s \times ... \times A_s \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту; $q_0, q_1, ..., q_{s-1}$ — задані додатні дійсні числа, менші 1, $q_0 + q_1 + ... + q_{s-1} = 1$. Теорема Працьовитого М.В. стверджує: *для* $\forall$ $x \in [0;1]$ *існує* $(\alpha_n) \in L_s$*:*

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \tag{1}$$

$\beta_{\alpha_k} = q_0 + q_1 + ... + q_{\alpha_k - 1}$. Ряд (1) називається Q_s*-представленням* числа x, а формальний запис $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ – Q_s*-зображенням* ряду (1) і числа x. Розглядається функція f, означена на $[0;1)$ рівністю

$$f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n\alpha_{n+1}...}) = \Delta^{Q_s}_{\varphi(\alpha_1,\alpha_2)\varphi(\alpha_2,\alpha_3)...\varphi(\alpha_n,\alpha_{n+1})...},$$

де $\varphi(i,j)$ – фінітна функція: $A_s \times A_s \xrightarrow{\varphi} A_s$. Оскільки, взагалі кажучи, $f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}) \neq f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)})$, то для коректності означення функції f використовуватимемо лише одне з двох зображень Q_s-раціональних чисел, а саме те: що містить період (0).

Існує рівно s^{s^2} так означених функцій, серед них оператор лівостороннього зсуву цифр Q_s-зображення, який відіграє важливу роль в ергодичній теорії та ймовірнісній теорії чисел. Частина функцій цього класу має фрактальні множини значень, автомодельні графіки, розподіли значень функцій при заданому розподілі аргумента в переважній більшості є сингулярними, а їх носії – фрактальними.

Теорема 1 *Серед класу функцій f неперервними є лише $s+2$ функції: $y = \Delta^{Q_s}_{(i)}$, $i = \overline{0, s-1}$, $y = x$, $y = I(x)$, де $I(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_s}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]...[s-1-\alpha_n]...}$ — інверсор цифр Q_s-зображення числа.*

Зауважимо, що випадок $s = 2$, який заслуговує на окрему увагу нами був детально вивчений раніше. У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, фрактальних, диференціально-інтегральних, тополого-метричних та автомодельних властивостей функцій даного класу при $s \geq 3$.

А.С. Романюк

Ентропійні числа і поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних

Інститут математики НАН України, м. Київ, Україна
E-mail: romanyuk@imath.kiev.ua

В доповіді будуть обговорюватися питання, пов'язані з оцінками ентропійних чисел і деяких поперечників класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних. Більш конкретно мова буде йти про точні за порядком оцінки ентропійних чисел, колмогоровських, лінійних та тригонометричних поперечників класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторах L_∞ і $B_{\infty,1}$. Зазначимо, що простір $B_{\infty,1}$ є аналогом простору Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,1}$ і норма в ньому є більш сильною, ніж L_∞-норма.

Мотивацією до дослідження згаданих асимптотичних характеристик у просторі $B_{\infty,1}$ була та обставина, що питання про їх порядки у просторі L_∞ в багатовимірному випадку залишається відкритим (див. [1] Open problems 4.2, 6.3).

В результаті проведених досліджень було виявлено, що в одновимірному випадку (на відміну від багатовимірного) оцінки відповідних величин у просторах L_∞ і $B_{\infty,1}$ співпадають за порядком.

[1] Dung D., Temlyakov V. N., and Ullrich T. *Hyperbolic Cross Approximation. Advanced Courses in Mathematics.* – CRM Barcelona: Birkhauser/Springer, to appear.

Віктор Романюк

Кратний базис Хаара в задачах апроксимації функцій

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: romanyuk@imath.kiev.ua

Доповідь сформована за результатами автора (див. [1]–[5]), які стосуються структурних та апроксимаційних властивостей кратного базису Хаара H^d в просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ функцій з d змінними, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$, $d \geqslant 2$.

Базис H^d, на відміну від класичної тензорної базисної системи Хаара, побудований на основі одновимірного базису Хаара і системи характеристичних функцій двійкового розбиття відрізка $[0,1]$.

Основні пункти доповіді:

- структурні властивості базису H^d;
- опис ізотропних просторів Бєсова та просторів Гельдера в термінах умов на коефіцієнти Фур'є–Хаара елементів цих просторів;
- опис гладкісних властивостей функцій, визначених на $\mathbb{I}^d$, в припущеннях певного ступеня їх наближення поліномами, побудованими за системою H^d;
- нелінійна апроксимація за базисом H^d: оцінки верхніх меж найкращих m–членних наближень у просторах $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, які належать до одиничних куль просторів Бєсова та Гельдера; практично здійсненний алгоритм побудови екстремальних (в сенсі порядкових оцінок наближень) нелінійних m–членних агрегатів;

[1] Романюк В. С. *Конструктивная характеристика классов Гельдера и m-членные приближения по кратному базису Хаара* // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 3. — С. 349-360.

[2] Романюк В. С. *Кратный базис Хаара в обратных теоремах приближения и теоремах вложения* // Anal. Math. — 2015. — **41**, № 4. — P. 241-255.

[3] Романюк В. С. *Кратный базис Хаара и его свойства* // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №9. — С. 1253 – 1264.

[4] Романюк В. С. *Кратный базис Хаара и m-членные приближения функций из классов Бесова. I* // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, №4. — С. 551 – 562.

[5] Романюк В. С. *Кратный базис Хаара и m-членные приближения функций из классов Бесова. II* // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, №6. — С. 816 – 825.

Руслан Салімов [1], *Марія Стефанчук* [2]

Логарифмічна асимптотика для розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі

[1] *Інститут математики НАН України, Київ, Україна*
E-mail: ruslan.salimov1@gmail.com
[2] *Інститут математики НАН України, Київ, Україна*
E-mail: stefanmv43@gmail.com

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ майже всюди (м.в.) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння виду $f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z$.

Відображення $f\colon G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал та його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$. Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.в.

Нехай $\sigma\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція та $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) рівняння

$$f_r = \sigma(re^{i\theta}) \cdot |f_\theta|^m \cdot f_\theta, \tag{1}$$

де f_r и f_θ — частинні похідні відображення f по r и θ, відповідно.

Позначимо $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Теорема 1 *Нехай* $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (1) *класу Соболєва* $W^{1,2}_{\rm loc}$, *причому* $f(0) = 0$. *Припустимо, що* $c > 0$, $m > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ *і* $\sigma\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *задовольняє умову*

$$\left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z|\,(\operatorname{Im}\overline{\sigma})^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \leqslant c\, r^{-m}$$

для м.в. $r \in (0, \varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|} \right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\frac{2c}{m} \right)^{\frac{1}{m}} < \infty.$$

.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом Ф75 Державного фонду фундаментальних досліджень.

Ольга Сафонова

Про точкову розривність і аналоги квазінеперервності

Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна
E-mail: olechkadeadin@ukr.net

Дослідженню властивостей аналогів неперервності присвячено багато праць. За останні десятиріччя у цьому напрямі відзначилась Чернівецька математична школа завдяки глибоким результатам, отриманим у працях В.К. Маслюченка та його учнів [1-3]. У цій замітці розглянуто зв'язки між точковою розривністю та різновидами квазінеперервності.

Теорема 1 *Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір. Тоді точково розривне відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли воно є майже ледь неперервним.*

Теорема 2 *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для точково розривного відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

- *f сильно квазінеперервне;*
- *f квазінеперервне;*
- *f майже квазінеперервне.*

Що стосується ледь неперервності і псевдоквазінеперервності, то жодна з них, як показують приклади, не рівносильна квазінеперервності навіть за умови точкової розривності відображень в евклідових просторах.

[1] Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення і простори Кете: дис. докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Маслюченко Володимир Кирилович.* – Чернівці, 1999. – 345 с.

[2] Михайлюк В.В. *Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень: дис. докт. фіз. – мат. наук: 01.01.01 / Михайлюк Володимир Васильович.* – Чернівці, 2008. – 333 с.

[3] Нестеренко В.В. *Аналоги неперервності: зв'язки між нарізними і сукупними властивостями та теореми про декомпозицію: дис. докт. фіз. – мат. наук: 01.01.01 / Нестеренко Василь Володимирович.* – Чернівці, 2016. – 320 с.

Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко

Рівномірні наближення сумами Фур'є класів диференційовних функцій

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$.

Нехай, далі, $r > 1$ і $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність дійсних чисел. Через $W^r_{\bar{\beta},p}, 1 \le p \le \infty$, позначимо множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\bar{\beta}}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \|\varphi\|_p \le 1, \quad \varphi \perp 1,$$

з ядром $B_{r,\bar{\beta}}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\Big(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\Big)$, $r > 1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$.

Якщо $\beta_k \equiv \beta$, то $W^r_{\bar{\beta},p}$ є відомими класами Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$.

Розглянемо величини

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},p})_C = \sup_{f \in W^r_{\bar{\beta},p}} \|f - S_{n-1}(f)\|_C, \tag{1}$$

де $S_{n-1}(f)$ — частинна сума Фур'є функції f порядку $n-1$.

Досліджується задача про знаходження сильної асимптотики величин (1) при великих значеннях r.

Теорема 1 *Нехай $r > 1$, $1 \le p \le \infty$, $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при $r \ge n+1$*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},p})_C = \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} n^{-r} + O\Big(n^{-r}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r}\Big), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{2}$$

рівномірно відносно всіх розлядуваних параметрів.

При $p = \infty$ оцінку (2) встановив С.Б. Стєчкін в [1, теорема 4].

Формула (2) є асимптотичною рівністю у випадку, коли $r/n \to \infty$, $n \to \infty$.

[1] Стечкин С.Б. *Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций* // Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.

Олег Скасків[1], *Ольга Тарновецька*[2]

Про класи збіжності для кратних рядів Діріхле

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*
E-mail: olskask@gmail.com
[2] *Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут", Чернівці, Україна*
E-mail: savinskaolga@gmail.com

Нехай $G \subset \mathbb{C}^p, p \geq 1,$ – полінійна область з класу σ ([1]), а для $r > 0$ і $A \in \mathbb{R}^p_+$: $G(r, A) := G + rA$.

Нехай $\Lambda^p = (\lambda_n)$, $\lambda_n = (\lambda^{(1)}_{n_1}, \dots, \lambda^{(p)}_{n_p})$, $n = (n_1, \dots, n_p)$ і $0 = \lambda^{(j)}_0 < \lambda^{(j)}_k \uparrow +\infty$ $(1 \leq k \uparrow +\infty)$, $1 \leq j \leq p$. Через H^p позначимо клас цілих в $\mathbb{C}^p$, обмежених у довільній полінійній області $G(r, A)$ функцій, а через $H^p(\Lambda^p)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних скрізь в $\mathbb{C}^p$) рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{\langle z, \lambda_n \rangle}$, $z \in \mathbb{C}^p$, таких, що $(\forall j)$: $\#\{n_j : a_{(n_1,\dots,n_j,\dots,n_p)} \neq 0\} = +\infty$, $H^p(\Lambda^p) \subset H^p$. Для функції $F \in H^p(\Lambda^p)$ і $r > 0$ позначимо $S_F(r, A) = \sup\{|F(z)| : z \in G(r, A)\}$ і

$$\mu_F(r, A) := \max\Big\{|a_n| \sup\big\{\exp\big(\mathrm{Re}\langle z, \lambda_n\rangle\big) : z \in G(r, A)\big\} : n \in \mathbb{Z}^p_+\Big\}.$$

Теорема 1 ([1]) *Якщо* ρ *і для послідовності показників* Λ^p *виконується умова* $\overline{\lim}_{\|n\|\to+\infty} \frac{\ln \|n\|}{\langle A, \lambda_n \rangle} := \tau < +\infty$, *то для кожного ряду Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln S_F(r, A) dr < +\infty \iff \int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu_F(r, A) dr < +\infty.$$

Теорема 2 ([1]) *Для будь-якої послідовності показників* Λ^p *такої, що* $\tau = +\infty$, *для довільного* $A \in \mathbb{R}^p_+$ *і для кожного* $\rho > 0$ *існує ряд Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$, *для якого* $\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu_F(r, A) dr < +\infty$ *і* $\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln S_F(r, A) dr = +\infty$ *для* $S_F(r, A)$ *і* $\mu_F(r, A)$, *означених за вичерпанням* $G(r, A) = \{z \in \mathbb{C}^p : \mathrm{Re}\ z < rA\}$.

[1] Сало Т., Скасків О., Тарновецька О. *Про класи збіжності для кратних рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун-ту.Сер.мех.-мат. –2017. – Вип.83. – С.72–81.

Ольга Трофименко

Теореми про середнє для розв'язків однорідних еліптичних рівнянь на комплексній площині

Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна
E-mail: odtrofimenko@gmail.com

В роботі розглядається опис класу поліноміальних розв'язків для однорідних лінійних еліптичних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на комплексній площині. Відповідна теорема про середнє обирається по вершинах правильного многокутника.

Нехай $B_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 3$, $s < m < n + 1$, $d_n := 2(5 + 4\cos\frac{\pi}{n})^{-1/2}$ для непарного n, $d_n := 2(4 + 5\cos^2\frac{\pi}{n})^{-1/2}$ для парного n. Позначимо через $E(n, m, s)$ множину всіх пар цілих невід'ємних чисел (k, l), для яких виконуються умови: $k < m - s$ або $l < m$; $k < n + s$; $l < n - s$.

Теорема 1 *Нехай $R > 0$, $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$, $r \in (0,\ d_n R)$. Тоді наступні твердження є еквівалентиними:*
1) для всіх $z \in B_R$ та $\alpha \in [0,\ 2\pi)$ таких, що $\{z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \subset B_R$, виконується рівність

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{nr^{2p}}{(p-s)!p!} \partial^{p-s}\bar{\partial}^{p} f(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}})^{s} f(z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}); \tag{1}$$

2) функція f має вигляд

$$f(z) = \sum_{(k,l) \in E(n,m,s)} c_{k,l} z^{k} \bar{z}^{l}, \quad c_{k,l} \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

[1] Привалов И. И. *Субгармонические функции.* – М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – 199 с.

[2] Volchkov V. V. *Integral Geometry and Convolution Equations.* – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 c.

[3] Trofymenko O. D. *Convolution equations and mean-value theorems for solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane* // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – **229**, 1. – C. 96-107.

Трохимчук Ю. Ю. [1], *Сафонов В. М.* [2]

Про зліченнократні функції першого класу Бера

[1] *Інститут математики НАН України, Київ, Україна*
E-mail: trokhim@imath.kiev.ua
[2] *Національний університет харчових технологій, Київ, Україна*
E-mail: safonov_v_m@ukr.net

За відомою теоремою [1] для кожного зліченнократного неперервного відображення двох многовидів однакової вимірності існує відкрита щільна множина точок локального гомеоморфізму. Виявляється, що для існування точок локального гомеоморфізму досить вимагати зліченну кратність відображення лише для точок деякої підмножини не першої категорії в образі. В одновимірному випадку твердження теореми залишається справедливим для функцій першого класу Бера з властивістю Дарбу.

Теорема 1 *[2]. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}^n_1$ – неперервне і нульвимірне відображення. Якщо множина $H \subset \mathbb{R}^n_1$ не першої категорії в множині $f(D)$ і прообрази $f^{-1}(y)$ точок $y \in H$ не більше ніж зліченні, то в області D існує відкрита множина точок локального гомеоморфізму.*

Теорема 2 *[3]. Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – ніде не стала функція першого класу Бера з властивістю Дарбу, яка має множину зліченних рівнів $E \subset \mathbb{R}$ всюди другої категорії. Тоді існує відкрита щільна множина $G = \bigcup_i G_i \subset [a, b]$, в кожній компоненті G_i якої функція f строго монотонна і неперервна.*

[1] Трохимчук Ю.Ю. *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности: монографія / Ю.Ю. Трохимчук // Праці Інституту математики НАН України: Математика та її застосування.* – К.: Інститут математики НАН України, 2008. –Т.70. – 539 с.

[2] Трохимчук Ю.Ю. *Счетная кратность и категория / Ю.Ю. Трохимчук //* Доповіді НАН України. – 2014. – №1. – С. 33-36.

[3] Сафонов В.М. *Про функції першого класу Бера з властивістю Дарбу / В.М. Сафонов //* Збірник праць Інституту математики НАН України: Аналіз та застосування. – К.: Інститут математики НАН України, 2017. – **Т.14**, №1. – С. 222-229.

Марія Фрей

Про віківське числення в аналізі білого шуму Леві

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: mashadyriv@ukr.net

У зв'язку із розвитком фізики та математики існує потреба розвивати теорію основних і узагальнених функцій нескінченої кількості змінних. Один з найбільш успішних підходів до побудови такої теорії полягає у конструюванні просторів щойно згаданих функцій таким чином, що природне спарювання між основними та узагальненими функціями породжене інтегруванням відносно деякої ймовірнісної міри на дуально-ядерному просторі. Спочатку це була стандартна гауссівська міра, відповідна теорія називається *гауссівський аналіз білого шуму* (напр., [1]); потім були реалізовані численні узагальнення. Зокрема, важливі для застосувань результати можна отримати, якщо у якості вищезгаданої міри використати так звану міру білого шуму Леві, відповідна теорія називається *аналіз білого шуму Леві*.

Головною проблемою при побудові аналізу білого шуму Леві є відсутність у процесів Леві (крім вінерівського та пуассонівського) так званої *властивості хаотичного розкладу* (ВХР) (тобто можливості представити довільну квадратично інтегровну випадкову величину у вигляді ряду з повторних стохастичних інтегралів за процесом Леві від невипадкових функцій), яка грає ключову роль при побудові гауссівського аналізу білого шуму.

Тим не менш, існують різні узагальнення цієї властивості. Ми маємо справу з узагальненням Литвинова ВХР [2]. Воно ґрунтується на розкладі квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій (випадкових величин) у ряди зі спеціальним чином побудованих ортогональних функцій, подібно до розкладу за поліномами Ерміта у гауссівському аналізі. Цей підхід на сьогодні є одним з найбільш цікавих та перспективних з точки зору застосувань. Отже, розбудова аналізу білого шуму Леві з використанням щойно згаданого підходу і, зокрема, розбудова так званого *віківського числення* (теорії, що вивчає природні аналоги поточкового добутку — так звані *віківські добутки* на просторах основних і узагальнених функцій нескінченої кількості змінних) у його термінах, є важливою та актуальною задачею.

Основні результати дослідження полягають у вивченні властивостей віківського добутку та пов'язаних з ним так званих віківських версій голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві. Зокрема, ми встановили, що оператор стохастичного диференціювання [3] є диференціюванням відносно віківського множення.

За аналогією з гауссівським та більш загальним майкснерівським аналізом [4], отримані результати можна застосувати для розв'язання та вивчення властивостей розв'язків стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу, такі рівняння використовуються при моделюванні багатьох фізичних процесів, зокрема, у структурно неоднорідних середовищах.

[1] Hida T., Kuo H. H., Potthoff J., Streit L. *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus.* – Kluwer: Dordrecht, 1993.

[2] Lytvynov E.W. *Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2003. – **6** , 1. – C. 73–102.

[3] Dyriv M.M., Kachanovsky N.A. *On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized functions of Lévy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2014. – **6**, 2. – C. 212–229.

[4] Kachanovsky N. A., *An extended stochastic integral and a Wick calculus on parametrized Kondratiev-type spaces of Meixner white noise* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2008. – **11**, 4. – C. 541–564.

ЗМІСТ

Секція диференціальних рівнянь

Секція алгебри

Секція математичного моделювання та інформаційних технологій

Секція теорії функцій та функціонального аналізу

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Міжнародна наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ І ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

17-19 вересня 2018 року

Матеріали конференції

Для нотаток