МІНІСТЕРСТВО НАУКИ І ОСВІТИ УКРАЇНИ

ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

Н.Л. Сосницька, В.І Кравець, Г.О. Онищенко

КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

(електронний дидактичний демонстраційний матеріал)

Мелітополь – 2020

УДК 378.147.88

Дозвіл до впровадження та видання надано Вченою радою факультету енергетики і комп'ютерних технологій Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного (протокол №11 від «19» червня 2020 р.)

Рецензенти:

Ачкан В.В. – доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики навчання математики, Бердянський державний педагогічний університет;

Бігун Я.Й. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича.

Сосницька Н.Л. Курс вищої математики в прецентаціях: електронний дидактичний демонстраційний матеріал / Н.Л. Сосницька, В.І. Кравець, Г.О. Онищенко. – Мелітополь: ТДАТУ, 2020. – 19 методичних комплектів.

Курс вищої математики в прецентаціях розроблено відповідно до навчальної програми з дисципліни "Вища математика" для студентів технічних спеціальностей закладів вищої освіти. Електронний освітній ресурс містить курс лекцій за розділами: «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення», «Інтегральне числення», «Ряди», «Функції багатьох змінних», «Диференціальні рівняння», «Комплексні числа», «Операційне числення». В матеріалах наведено теоретичний матеріал, приклади розв'язання всіх основних задач з кожної теми. Наведено необхідний довідковий матеріал.

Видання розраховано на студентів і викладачів інженерних, загальнотехнічних факультетів закладів вищої освіти усіх форм навчання.

© Сосницька Н.Л., Кравець В.І., Онищенко Г.О. 2020
© Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного

ЗМІСТ

№ п/п	Назва розділу	№№ презентації
1	Елементи лінійної алгебри: Матриці і визначники	**1.1-1.3**
2	Елементи лінійної алгебри: Системи лінійних рівнянь	**2.1-2.3**
3	Елементи векторної алгебри: Вектори і дії над ними	**3.1-3.5**
4	Аналітична геометрія: Елементи аналітичної геометрії	**4.1-4.8**
5	Вступ до математичного аналізу: Загальні поняття	**5.1-5.4**
6	Вступ до математичного аналізу: Границя і неперервність функції	**6.1-6.9**
7	Вступ до математичного аналізу: Неперервність функції	**7.1-7.4**
8	Диференціальне числення: Похідна	**8.1-8.3**
9	Диференціальне числення: Застосування похідної	**9.1-9.7**
10	Диференціальне числення: Диференціал функції	**10.1-10.5**
11	Інтегральне числення: Невизначений інтеграл	**11.1-11.8**
12	Інтегральне числення: Визначений інтеграл	**12.1-12.9**
13	Ряди: Числові ряди	**13.1-13.4**
14	Ряди: Степеневі ряди	**14.1-14.5**
15	Ряди: Елементи гармонійного аналізу. Ряди Фур’є	**15.1-15.5**
16	Функції багатьох змінних: Функції декількох змінних	**16.1-16.8**
17	Диференціальні рівняння	**17.1-17.9**
18	Комплексні числа	**18.1-18.2**
19	Операційне числення	**19**

ВСТУП

Електронний дидактичний демонстраційний матеріал з курсу вищої математики подано у вигляді презентацій, що створені за допомогою програми Microsoft Power Point. Електронний освітній ресурс містить курс лекцій за розділами: 1,2 – «Елементи лінійної алгебри», 3 – «Елементи векторної алгебри», 4 – «Аналітична геометрія», 5,6,7 – «Вступ до математичного аналізу», 8,9,10 – «Диференціальне числення», 11,12 – «Інтегральне числення», 13,14,15 – «Ряди», 16 – «Функції багатьох змінних», 17 – «Диференціальні рівняння», 18 – «Комплексні числа», 19 – «Операційне числення». До ресурсу додається CD-диск з записами електронних презентацій. Електронний освітній ресурс призначений для студентів технічних спеціальностей всіх напрямків підготовки у ЗВО, а також для викладачів, які використовують мультимедійні технології в процесі викладання курсу «Вища математика».

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. – Київ, 2001. 648 с.

2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: навч. посібник: У 2-х ч. Ч.1. – Київ, 2001. 564 с.

3. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – Київ, 1986. 512 с

4. Кравець В.І., Кравець О.В., Сосницька Н.Л., Елементи теорії функцій комплексної змінної та операційне числення: навч. посібник. – Мелітополь, ТДАТУ, 2018. 102с.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Навчально-інформаційний портал ТДАТУ http://nip.tsatu.edu.ua
2. Наукова бібліотека ТДАТУ http://www.tsatu.edu.ua/biblioteka/
3. Сайт кафедри http://www.tsatu.edu.ua/vmf/
4. Джерела Інтернет

Розділ 1. «Елементи лінійної алгебри: Матриці і визначники»

презентація 1.1-1.3

1.Матриці
І. Визначники

1.1. Матриці і дії над ними

Матрицею розміру m x n називається прямокутня таблиця чисел, що містить m рядків і n стовбців.

Числа, що входят до матриці, називаються <u>елементами</u> матриці.

<u>Позначення:</u>

$A_{m\times n}$ **- матриця розмірності *m* x *n***

a_{ij} **- елемент матриці *i* –го рядка і *j* -го стовбця**

де

$$i=1,2\ldots m$$
$$j=1,2\ldots n$$

$$\underset{m\times n}{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриця размірності m x n

Дві матриці називаються <u>рівними,</u> якщо у них однакова розмірність і співпадають рядки і стовбці.

Якщо число рядків матриці рівне числу її стовбців, то така матриця називається <u>квадратною.</u>

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- квадратна матриця розмірності 3x3

Елементи матриці a_{ij}, у яких номер стовбця співпадає з номером рядка, називаються <u>діагональними.</u>

Якщо в квадратній матриці всі діагональні елементи рівні 1, а всі інші елементи рівні 0, то вона називається <u>одиничною</u>.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Одинична матриця

Матриця будь-якого розміру називається <u>нульовою</u>, якщо всі її елементи рівні 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Нульова матриця

Матриця, що складається із одного рядка, називається <u>матрицею-рядком</u> або <u>вектор-рядком</u>.

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$$

матриця-рядок

Матриця, що складається із одного стовбця, називається <u>матрицею – стовбцем</u> або <u>вектором- стовбцем</u>.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

За допомогою матриць зручно описувати різного роду залежності.

<u>Наприклад:</u>

Розподіл ресурсів по галузям економіки:

Ресурси	*Промисловість*	*с/господ.*
ел. енергія	*8*	*7.2*
труд. ресурси	*5*	*3*
водні ресурси	*4.5*	*5.5*

Цю залежність можна представити в вигляді матриці:

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7.2 \\ 5 & 3 \\ 4.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

де елемент a_{ij} показує скільки i – го ресурсу споживає j – галузь.

Наприкад, a_{32} показує, скільки води споживає сільське господарство.

ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

1. Множення матриці на число

Щоб помножити матрицю на число, потрібно кожен елемент матриці помножити на це число.

Отримані добутки утворюють шукану матрицю.

Нехай дана матриця $$\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$$

Помножимо її на число *λ*: $$\lambda \cdot A = B$$

де кожен елемент матриці *B*:

$$\boxed{b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}}$$

де: $$i = 1,2...m$$

$$j = 1,2...n$$

<u>Наприклад:</u>

<u>Перемножуючи</u> матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, отримаємо:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

2. Додавання матриць

Додаються матриці одинакової розмірності . Отримується матриця тієї ж розмірності, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів вихідних матриць.

Нехай дані матриці

$$A = (a_{ij})$$

$$B = (b_{ij})$$

Додаємо їх:

$$A + B = C$$

де кожен елемент матриці *C*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Аналогічно проводиться віднімання матриць.

Приклад

Знайти суму і різницю матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Розвя’зування:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3.Множення матриць

Множення матриць можливе, якщо число стовбців першої матриці дорівнює числу рядків другої.

Тоді кожен елемент отриманої матриці дорівнює сумі добутків елементів i – го рядка першої матриці на відповідні елементи j-го стовбця другої.

Дано матриці

$$\underset{m\times k}{A} = (a_{ij})$$

$$\underset{k\times n}{B} = (b_{ij})$$

перемножимо їх:

$$\underset{m\times k}{A}\cdot \underset{k\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$$

де кожен елемент матриці *C*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}}$$

$$i = 1,2\ldots m$$

$$j = 1,2\ldots n$$

Приклад

Знайти добуток матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв’язування:

Число стовбців першої матриці рівне числу рядків другої, значить їх добуток існує:

$$\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times2}{B}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+3\cdot4+0\cdot2\\ 1\cdot1+0\cdot1+4\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 1 & 8\end{pmatrix}$$

Тепер перемножимо матриці в оберненому порядку

$$\underset{3\times 2}{B}\cdot\underset{2\times 3}{A}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4\\ 1\cdot 2+4\cdot 1 & 1\cdot 3+4\cdot 0 & 1\cdot 0+4\cdot 4\\ 0\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 3+4\cdot 0 & 0\cdot 0+2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 3 & 16\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

множення матриць в загальному випадку некомутативне:

$$\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$$

Перелічені операції над матрицями мають слідуючі <u>властивості:</u>

1

$$A+B=B+A$$

2

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3

$$\lambda(A+B)= \lambda A+\lambda B$$

4

$$A(B+C)=AB+AC$$

5

$$A(BC)=(AB)C$$

4. Транспонування матриць

Матриця A^T називається <u>транспонованою</u> до матриці A, якщо в ній поміняли місцями рядки и стовбці.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

властивості операції траспонування:

1

$$(A^{T)T}=A$$

2

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

3

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

4

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Приклад

Транспонувати матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Розв’язування:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2. ВИЗНАЧНИК МАТРИЦІ

<u>Визначник</u> – це число, яке характеризує квадратну матрицю.

Позначається:

$$|A| \qquad \Delta \qquad \det A$$

Визначником першого порядку матриці

$$A = (a_{11})$$

називається число a_{11}

Тобто: $$\boxed{|A| = |a_{11}| = a_{11}}$$

<u>Визначником другого порядку</u> називається число, яке визначається за правилом:

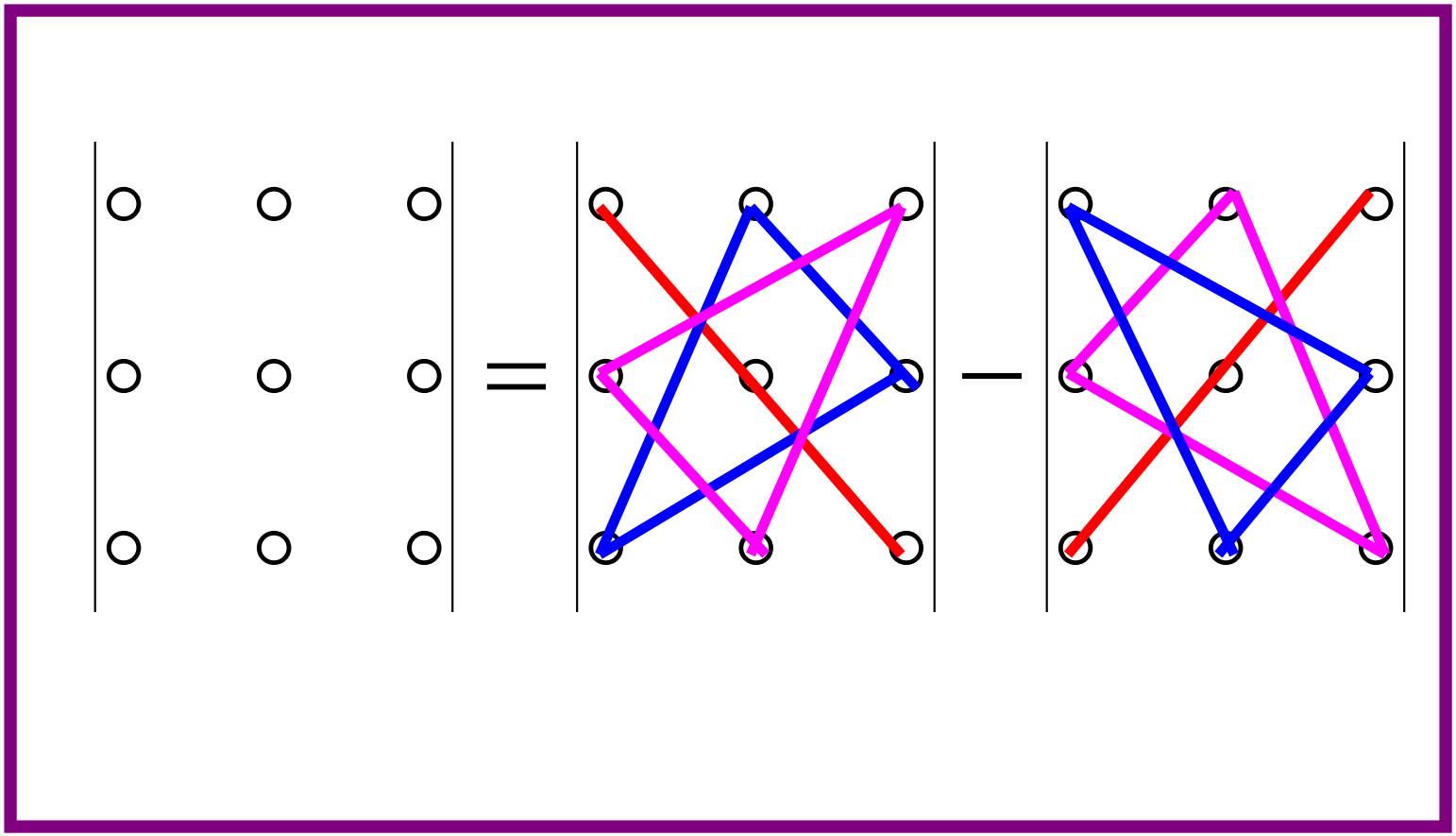
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Визначником третього порядку</u> називається число, яке визначається за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Для обчислення визначників третього порядку зручно користуватися <u>правилом трикутників:</u>



Приклад

Обчислити визначники матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв’язування:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

<u>Мінором</u> деякого елемента визначника називається визначник, отриманий із вихідного викреслюванням рядка і стовбця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Мінор елемента a_{ij} **визначника позначається як** M_{ij}

<u>Алгебраїчним доповненням</u> деякого елемента визначника називається мінор цього елемента, помножений на (-1)^S , де S – сума номерів рядка і стовбця, на перетені яких знаходиться даний елемент.

$$A_{ij} = (-1)^S M_{ij}$$

$$S = i + j$$

наприклад, мінор елемента a_{11}

визначника третього порядку знайдеться за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Його алгебраїчне доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1

Визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику вихідної матриці.

$$\boxed{|A| = |A^T|}$$

Наприклад:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5$$

2

Перестановка двох рядків або стовбців визначника еквівалентна множенню його на (-1).

<u>Наприклад</u>:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Міняємо місцями перший і другий рядки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 + 1 - 2 - 2 = -5$$

3

Якщо визначник має два однакових рядки або стовбці , то він рівний нулю.

<u>Наприклад</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 12 - 12 - 4 + 4 = 0$$

4

Спільний множник рядка або стовбця можна виносити за знак визначника.

<u>Наприклад</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 2 - 2 + 4 - 2 = 4$$

Виносимо із другого рядка множник 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 - 1 + 1 - 1 + 2 - 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

5

Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка або стовбця додати відповідні елементи другого рядка або стовця, помножені на одне і те ж число.

<u>Наприклад</u>:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Перший рядок множимо на 2 і додаєм до вдругого:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 + 1 + 8 - 3 = 5$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовбця на їх алгебраїчні доповнення:

$$\boxed{|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}}$$

Приклад

Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Розв’язування:

Розкладаємо визначник по третьому рядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = A_{32} + A_{33} \quad \boxed{=}$$

знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+6+16-24-3-4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+4+12-16-2-3 = -3$$

Підставляємо отриманий результат:

$$\Diamond = \; 6 + (-3) = 3$$

1.3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

де E – одинична матриця

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1

Визначаємо чи квадратна матриця. Якщо ні, то оберненої матриці для неї не існує.

2

Знаходимо визначник матриці. Якщо він рівний нулю, то оберненої матриці не існує.

3

Заміняємо кожен елемент матриці його алгебраїчним доповненням.

4

Отриману матрицю транспонуємо.

5

Кожен елемент отриманої матриці ділимо на визначник даної матриці. Отримаємо матрицю, обернену до даної.

6

Робимо перевірку. Для цього Перемножуємо отриману і дану матриці. Повинна отриматися одинична матриця.

Приклад

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв’язування:

Застосуємо алгоритм знаходження оберненої матриці.

1. **Матриця квадратна, значить обернена до неї матриця може існувати.**

2. **Знаходимо визначник:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

3

Знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента матриці:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 2$$

Складаємо із отриманих значень матрицю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

④ **Транспонуємо її:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

⑤ **Кожен елемент матриці ділимо на визначник Δ=1 в отримуємо обернену матрицю:**

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

6 **Перевіряємо:**

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$