

УДК 514.18:681.32+74

**П.М. Яблонський**, кандидат технічних наук,  
доцент, доцент кафедри нарисної геометрії,  
інженерної та комп'ютерної графіки,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря  
Сікорського»,  
м. Київ, Україна

**О.М. Леженкін**, доктор технічних наук,  
професор, професор кафедри «Технічна  
механіка та комп'ютерні технології імені  
професора В.М. Найдиша»

Таврійський державний агротехнологічний  
університет імені Дмитра Моторного,  
м. Мелітополь, Україна

**А.П. Чаплінський**, старший викладач  
кафедри «Технічна механіка та комп'ютерні  
технології імені професора В.М. Найдиша»,  
Таврійський державний агротехнологічний  
університет імені Дмитра Моторного,  
м. Мелітополь, Україна

**О.Ю. Михайленко**, старший викладач  
кафедри «Технічна механіка та комп'ютерні  
технології імені професора В.М. Найдиша»,  
Таврійський державний агротехнологічний  
університет імені Дмитра Моторного,  
м. Мелітополь, Україна

## **РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗНАХОДЖЕННЯ ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ДОВІЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАСОБІВ ПЕОМ**

**Анотація.** Розглядається аналітичний підхід до знаходження лінії перетину довільних поверхонь при виконанні лабораторних робіт із дисципліни «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка». Описані можливості застосування ПЕОМ до розв'язання даних задач. Дається детальний алгоритм знаходження точок лінії перетину довільних поверхонь засобами систем комп'ютерної математики.

**Ключові слова:** перетин поверхонь, лінія перетину, система комп'ютерної математики, точений каркас.

**Abstract.** The analytical approach to finding the intersection line of arbitrary surfaces when performing laboratory work in the discipline "Descriptive geometry, engineering and computer graphics" is considered. The described possibilities of using a PC to solve these problems. A detailed algorithm for finding the points of the intersection line of arbitrary surfaces by means of computer mathematics is given.

**Keywords.** intersection of surfaces, intersection line, computer mathematics system, turned frame.

При розв'язанні лабораторних та практичних задач нарисної геометрії, які пов'язані із моделюванням кривих поверхонь часто доводиться знаходити спільні для двох поверхонь лінії, тобто лінії їхнього перетину.

Перетин об'єктів містить кінцеве число точок, лінії і навіть шматки поверхонь. Практичний інтерес представляють перші два випадки із зазначених.

Розрахунок точок перетинану двох геометричних об'єктів полягає в рішенні системи рівнянь цих геометричних об'єктів. За допомогою цього способу можна одержувати лінію перетину будь-яких поверхонь без їхньої безпосередньої графічної побудови, а лише склавши їхні рівняння.

Розглянемо спосіб визначення точок лінії перетину двох поверхонь з використання можливостей систем комп'ютерної математики (в даному випадку можна використовувати будь-яку математичну систему, що має процесор символічних перетворень). Алгоритм рішення даної задачі представимо на прикладі перетинання двох поверхонь другого порядку – сфери і прямого кругового конуса (рис. 1).

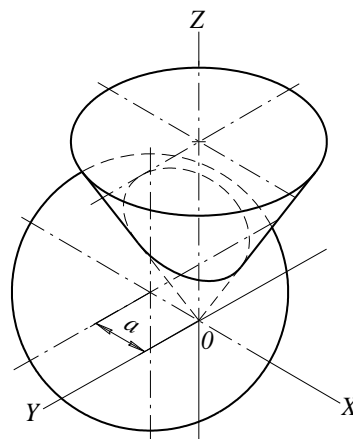


Рис. 1. Схема перетину поверхонь

По-перше, необхідно скласти рівняння поверхонь, що перетинаються. Для цього обираємо початок координат у тій точці, щодо якої рівняння поверхонь будуть найбільш простими. Знаючи загальні рівняння сфери і прямого кругового конуса, можна скласти систему

$$\begin{cases} p(x^2 + y^2) = z^2; \\ (x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases} \quad (1)$$

Знаходимо проекцію лінії перетинання поверхонь на площину XOY. Для цього розв'язуємо кожне рівняння відносно змінної  $z$  і прирівнюємо їх праві частини.

$$\begin{aligned} p(x^2 + y^2) = z^2 &\Rightarrow z = \pm\sqrt{p(x^2 + y^2)}; \\ (x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2 &\Rightarrow z = \pm\sqrt{R^2 - y^2 - (x - a)^2}. \end{aligned}$$

Так як при перетинанні сфери конусом утворюються дві взаємно симетричні замкнуті криві, розглянемо лише той випадок коли  $z > 0$

$$\sqrt{p(x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - y^2 - (x - a)^2}, \quad (2)$$

Неважко помітити, що отримане рівняння (2) є рівнянням кривої другого порядку. Виконавши деякі перетворення з нього можна дістати рівняння еліпса, яке легко записати параметрично, у вигляді двох функцій  $x(t)$  і  $y(t)$ . Підставивши  $x(t)$  і  $y(t)$  в одне з рівнянь  $z(x, y)$ , отримаємо параметричне рівняння лінії перетину заданих поверхонь. Але часто проекцією лінії перетину є невідома крива, для якої досить важко скласти параметричне рівняння. Тоді знаходження аналітичного виразу лінії перетину поверхонь ускладнюється.

Припустимо, що отримане рівняння проекції лінії перетину (2) не можна записати параметрично і розглянемо даний випадок як загальний. Тоді рівняння (2) розв'язуємо відносно однієї змінної (наприклад, відносно  $x$ ). Отримаємо

$$x(y) = \frac{2a \pm \sqrt{R^2(p+1) - y^2(p+1) - pa^2}}{2(p+1)}, \quad (3)$$

Таким чином, маємо аналітичний вираз  $x(y)$ . Підставивши праву частину рівняння (3) в одне з рівнянь  $z(x, y)$  одержимо вираз

$$z(y) = \pm \sqrt{p \left[ \left( \frac{2a \pm \sqrt{R^2(p+1) - y^2(p+1) - pa^2}}{2(p+1)} \right)^2 + y^2 \right]}, \quad (4)$$

Рівняння (3) і (4) є функціями від змінної  $y$ , яка задається згідно області допустимих значень (ОДЗ).

Можна помітити, що в символічному виді вираження  $x(y)$  і  $z(y)$  мають громіздкий вигляд. Але при підстановці в них числових значень вихідних даних вони значно скорочуються, приймаючи компактний вид.

Для побудови лінії перетину поверхонь необхідно задати значення  $a$ ,  $p$  і  $R$ .

При  $a = 10$ ,  $p = 4$ ,  $R = 40$

$$x(y) = 2 \pm \sqrt{304 - y^2}, \quad z(y) = \sqrt{4 \left( 2 \pm \sqrt{304 - y^2} \right)^2 + y^2}.$$

Задавши діапазон зміни  $y$  відповідно до ОДЗ, обчислюємо координати точок, що належать лінії перетину і виводимо їх. Ці операції моделюють у числовій формі графічний алгоритм побудови лінії перетину за допомогою площин-посередників. У даному випадку будується перетин поверхонь площиною рівня, рівнобіжною  $XOZ$ .

У результаті одержуємо просторову замкнуту криву у вигляді дискретної

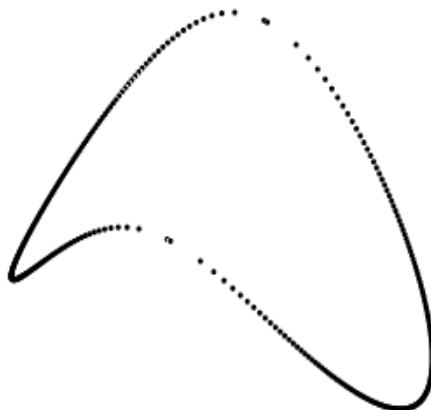


Рис. 2. Точковий каркас лінії перетину поверхонь

множини точок, розташованої на ній (рис. 2). Це множина точок, що складає точечний каркас просторової кривої лінії, який у залежності від кроку зміни аргументу може бути більш-менш щільним.

**Висновки.** Графічні можливості систем комп'ютерної математики дозволяють представляти лінію перетину поверхонь як у двомірному так і в тривимірному вигляді. При цьому графічні функції "розуміють" математичні вираження, що звільняє від необхідності генерувати таблиці даних. Таким чином, з'являється можливість отримання загальних аналітичних рівнянь лінії перетину для кожного типу поверхонь та будувати цю лінію без побудови самих поверхонь.

### Список використаних джерел

1. Котов И. И., Полозов В. С., Широкова Л. В. Алгоритмы машинной графики. – М.: Машиностроение, 1977. 231 с.
2. Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР: учебник / В. Е. Михайленко, В. Н. Кислокий, А. А. Лященко и др. К.: Вища шк., 1991. 374 с.
3. Інженерна графіка: Довідник / В.М. Богданов, А.П. Верхола, Б.Д. Коваленко та ін.; За ред. А. П. Верхоли. К.: Техніка, 2001. 268 с.