МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.

ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Навчально – методичний посібник

Рекомендовано Вченою радою механіко – технологічного факультету Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного для підготовки фахівців зі спеціальності 208 «Агроінженерія» у вищих навчальних закладах ІІ-IV рівнів акредитації

Мелітополь

2021

УДК 531(075.8)
Л72

Автори: проф. О. М. Леженкін, ст. викладач Г. В. Антонова, доц. О.О. Вершков, доц. Л.Ю. Бондаренко, доц. О.Є. Мацулевич, доц. А.О. Смєлов, ст. викладач О.Ю. Михайленко

Рекомендовано Вченою радою механіко – технологічного факультету Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного
(Протокол № 9 від « 8 » червня 2021 р)

Рецензенти:
С.М. Коломієць – к.т.н., доцент кафедри «Геоекологія і землеустрій»;
В.Ф. Мовчан – к.т.н., доцент кафедри «Машиновикористання в землеробстві»

Леженкін О.М.
Л72 Теоретична механіка. Динаміка матеріальної точки: навчально – методичний посібник / О.М. Леженкін, Г.В. Антонова, О.О. Вершков, Л.Ю. Бондаренко, О.Є. Мацулевич, А.О. Смєлов, О.Ю. Михайленко. – Мелітополь: ВПЦ «Люкс», 2021. – 121с.

У даному навчально-методичному посібнику представлені матеріали з теоретичної механіки з розділу «Динаміка матеріальної точки». Розглянуто загальні положення динаміки, наведені короткі теоретичні відомості, розібрані приклади, що дозволяє в найкоротші терміни самостійно засвоїти і повторити програму курсу.

Зміст видання відповідає освітньо-професійній програмі підготовки бакалаврів зі спеціальностей: 208 «Агроінженерія» (галузевий стандарт вищої освіти України ГСВО ОПП) та програмі навчальної дисципліни «Інженерна механіка. Теоретична механіка».

УДК 531(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА...7
РОЗДІЛ І. ДИНАМІКА матеріальної точки...............................8
1.1 Основні поняття та визначення динаміки………………8
1.2 Закони динаміки (Закони Галілея – Ньютона)………….8
1.3 Системи одиниць вимірювання механічних величин…………………………………………………………10
1.4 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки…………………………………………11
1.5 Початкові умови……………………………………………12
1.6 Дві основні задачі динаміки матеріальної точки………13
1.7 Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки…………………………………………15
РОЗДІЛ II. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ………………………………………36
2.1 Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки……………………………………………………………36
2.2 Теорема про зміну момента кількості руху матеріальної точки…………………………………………41
2.3 Робота. Потенціальна енергія. Потужність……………..45
2.4 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки……………………………………………………………52
РОЗДІЛ III. ДИНАМІКА НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ…………………………………………………………55
3.1 Формулювання першої і другої задачі динаміки

для невільної матеріальної точки……………………………..55
3.2 Невільний рух точки по гладенькій поверхні…………..56
3.3 Невільний рух точки по жорсткій поверхні…………….59
3.4 Рух невільної точки по гладенькій кривій лінії…………64
3.5 Принцип Даламбера для матеріальної точки……………70
РОЗДІЛ IV. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ………………………………………73
4.1 Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки………………………………………………73
4.2 Відносний спокій матеріальної точки…………………..80
РОЗДІЛ V. КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ………………………………………………………………84
5.1 Гармонічні коливання……………………………………84
5.2 Згасаючі коливання матеріальної точки………………..93
5.3 Змушені коливання без врахування сил опору середовища……………………………………………………104
5.4 Змушені коливання з врахуванням сили опору типу в’язкого тертя……………………………………113
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ……………...120

ПЕРЕДМОВА

Розвиток сучасної техніки ставить перед її розробниками різноманітні завдання, пов'язані з проектуванням об'єктів: будівельних конструкцій та споруд, машин різного функціонального призначення і т. п. Не дивлячись на різноманітність, вирішення поставлених завдань ґрунтуються на загальних принципах і мають загальну наукову базу. Пояснюється це тим, що в більшості завдань значне місце займають питання, які потребують вивчення законів руху або рівноваги тіл. Теоретична механіка являє собою одну з наукових основ сучасних технічних дисциплін, таких як теорія механізмів і машин, механіка матеріалів і конструкцій, деталі машин і т. д. Теоретична механіка є одним з розділів механіки.

Механіка - наука про механічний рух і механічному взаємодії матеріальних тіл.

Теоретична механіка - розділ механіки, в якому вивчаються закони руху механічних систем і загальні властивості цих рухів. Курс теоретичної механіки складається з трьох розділів: статика, кінематика, динаміка. Даний навчально-методичний посібник з розділу «Динаміка матеріальної точки» теоретичної механіки призначений для студентів заочної та дистанційної форм навчання.

Відмінність даного навчально-методичного посібника від багатьох відомих підручників з теоретичної механіки це краткість викладу теоретичного матеріалу. Громіздкі висновки та докази в ньому не наведено, але разом з тим приділено велику увагу чіткості формулювань визначень основних понять, теорем і принципів. Це дозволяє глибше усвідомити фізичний зміст формул і математичних виразів, що описують досліджувані механічні процеси. У посібнику наведено достатню кількість малюнків, що унаочнюють теоретичний матеріал.

РОЗДІЛ І
ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1 Основні поняття та визначення динаміки

Динамікою називається розділ механіки, у якому вивчаються закони руху матеріальних тіл під дією сил, прикладених до них. Розглянемо основні визначення динаміки.

Сила – це векторна величина, яка характеризує міру механічної взаємодії матеріальних тіл.

Система сил – це сукупність декількох тіл, які діють на тіло або на матеріальну систему одночасно.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які на одне і теж тіло діють однаково. Система сил може бути, в деяких випадках, еквівалентна нулю.

Інертність – це властивість матеріальних тіл швидше або повільніше змінювати швидкість свого руху під дією прикладених сил.

Масою матеріальної точки називається скалярна величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей.

Матеріальною точкою називається матеріальне тіло, яке має масу, розмірами, якого при вивченні його руху можна знехтувати.

1.2 Закони динаміки (закони Галілея – Ньютона)

Основою динаміки є закони, які для матеріальної точки сформульовані І. Ньютоном у “Математичних началах натуральної філософії” (1687р.). **Перший закон (закон інерції) відкритий Галілеєм.**

Ізольована від зовнішніх впливів матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір доти прикладені сили не змусять її змінити свій рух, який здійснює точка при відсутності сил називається ***інерційним рухом***.

Із даного закону витікає твердження, що при F = 0 точка знаходиться у стані спокою, або рухається із постійною за модулем та напрямом швидкістю ($\bar{V} = const$), прискорення при цьому дорівнює нулю ($\bar{a} = 0$), якщо рух точки не є рівномірним та прямолінійним, то на точку діє сила.

Система відліку, по відношенню до якої виконується закон інерції, називається ***інерціальною системою відліку***.

Другий закон (основний закон динаміки).

Модуль сили діючої на матеріальну точку, дорівнює добутку маси точки на модулі її прискорення, а вектор сили співпадає з вектором прискорення.

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{1.1}$$

Третій закон Ньютона, принцип рівності дії і протидії.

Дві матеріальні точки діють друг на друга з силами рівними за модулем, а їх вектори спрямовані вздовж прямої, з'єднуючої ці точки в протилежні боки.

Нехай на точку, маса якої дорівнює m, діють сили $\overline{F_1}, \overline{F_2} \ldots, \overline{F_n}$. Позначмо прискорення точки буквою $\bar{a}$, а прискорення, які мала би ця точка, якби кожна із діючих сил діяла на неї окремо – $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n$;

Крім того на підставі другого закону Ньютона маємо:

$$\overline{F_1} = m\bar{a}_1, \overline{F_2} = m\bar{a}_2 \ldots, \overline{F_n} = m\bar{a}_n \;;$$

Рівнодіюча $\bar{R}$ дорівнює сумі сил :

$$\bar{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} \ldots + \overline{F_n} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 \ldots + m\bar{a}_n = m(\bar{a}_1 + \\ + \bar{a}_2 \ldots + \bar{a}_n) = \mathrm{m}\bar{a}$$

Тоді

$$\mathrm{m}\bar{a} = \bar{R} \text{ або } \mathrm{m}\bar{a} = \sum F_{\text{к}} \tag{1.2}$$

1.3 Системи одиниць вимірювання механічних величин

Для вимірювання усіх механічних величин достатньою ввести три основні одиниці вимірювання. Двома з них прийнято вважати одиниці довжини та часу. Третьою одиницею можна вибрати одиницю вимірювання маси або сили. В залежності від цього вибору виникають дві принципово відмінних системи вимірювання.

Перший тип систем одиниць вимірювання.

В цих системах основними є одиниця довжини, одиниця часу та одиниця маси, а сила є похідною одиницею.

До таких систем відноситься міжнародна система одиниць вимірювань фізичних величин (СІ), у якої основними одиницями вимірювання механічних величин є метр [м], кілограм маси [кг] та секунда [сек]. Одиницею вимірювання сили є похідна одиниця – 1 Ньютон [Н].

1 Ньютон – це така сила, яка надає масі 1 кг прискорення 1 м/с^2.

$$[1\ \text{Н}] = [1\ \text{кг}] \times [1\ \text{м/с}^2]$$

Другий тип систем одиниць вимірювання.

В цих системах основними одиницями вимірювання приймаються одиниці вимірювання довжини, часу та сили, а маса є похідною одиницею.

До таких одиниць відноситься система МКГСС, у якій основними одиницями є метр [м], кілограм сили [кГ] та секунда [с]. Одиницею вимірювання маси в цій системі буде $[\frac{\text{кГ}\times\text{сек}^2}{\text{м}}]$, тобто це маса якій сила в 1 кГ надає прискорення [1 м/сек^2]. Співвідношення між одиницями вимірювання сили в системі СІ так МКГСС:

$$1\ \text{кГ} \approx 9{,}81\text{Н або } 1\ \text{Н} \approx 0{,}102\ \text{кГ}.$$

1.4 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Матеріальна точка вважається вільною, якщо її рух не обмежується будь якими в'язами.

Основний закон динаміки для вільної матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \Sigma \bar{F}_k, \qquad (1.3)$$

Дане векторне рівняння можна пождати у вигляді проекцій на три осі декартових координат, а саме:

$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};$

$ma_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky};$

$ma_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\ ;$

Як відомо з кінематики проекції прискорення по координатній осі дорівнюють другим похідним за часом від відповідних координат, тобто:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}\ ; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Підставимо ці вирази у попередні рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_y, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_z \end{cases} \qquad (1.4)$$

Таким чином ми отримали систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку яку виражає у координатній формі другий закон динаміки.

У проекціях на натуральні осі тобто на дотичну, головну нормаль і бінормаль траєкторії, диференціальні рівняння руху матеріальної точки матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} m\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_i \\ m\frac{V^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_n, \\ \ \ O = \sum_{k=1}^{n} F_b \end{cases} \tag{1.5}$$

де V – величина швидкості точки;

ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

$\sum_{k=1}^{n} F_i$, $\sum_{k=1}^{n} F_n$, $\sum_{k=1}^{n} F_b$ – алгебраїчні суми проекцій усіх сил на натуральні осі.

Рівняння (1.5) називаються диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в натуральній формі (рівняння Ейлера).

1.5 Початкові умови

Рух точки починається з початкового моменту часу. Положення, яке точка займає у початковий момент часу, називається ***початковим положенням***, а її швидкість в цей момент – ***початковою швидкістю***.

Якщо рух точки визначений координатним способом, то положення точки в початковий момент визначається її координатами, а швидкість – її проекціями на осі координат. Тому, у випадку прямолінійного руху точки, початкових умов дві:

при t=0 $\begin{cases} x = x_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0. \end{cases}$

Якщо точка рухається у площині то маємо чотири початкові умови:

при t=0 $\begin{cases} x = x_0; y = y_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0; \dot{y} = \dot{y}_0. \end{cases}$

При русі точки у просторі, початкових умов шість:

при t=0 $\begin{cases} x = x_0; y = y_0; z = z_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0; \dot{y} = \dot{y}_0; \dot{z} = \dot{z}_0. \end{cases}$

У разі натуральної форми задання руху початкові умови мають вид:

при t=0 $\begin{cases} S = S_0; \\ V = V_0. \end{cases}$

Оскільки початок координат може бути вибраний довільно, координати початкового положення точки взагалі можуть не дорівнювати нулеві. Тільки в тому випадку, коли початок координат береться в початковому положенні точки, координати точки в початковий момент часу дорівнюють нулеві.

1.6 Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

Перша основна задача динаміки матеріальної точки полягає у наступному:

При заданому закону руху матеріальної точки, та її масі необхідно визначити сили діючи на цю точку.

Двічі диференціюючи рівняння руху по часу, одержуємо проекції прискорення точки, тому задача називається диференціальною. Помножаючи ці проекції на масу, знаходимо проекції F_x, F_y, F_z рівнодіючої сили:

$$F_x = m\ddot{x};\ F_y = m\ddot{y}; F_z = m\ddot{z}.$$

Величину сили знаходимо за формулою:

$$\mathrm{F} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок сили визначаємо за формулами:

$$\cos(x_1F) = \frac{F_x}{F}; \cos(y_1F) = \frac{F_y}{F}; \cos(z_1F) = \frac{F_z}{F}.$$

Розглянемо приклад:

Рух матеріальної точки масою 1 кг, визначається рівняннями x = 3, y = 4t, z = $5t^2$.Визначити величину та напрям сили $\bar{F}$, яка діє на точку.

Розв’язання:

Диференціюємо двічі рівняння руху часом, знаходимо проекції прискорення точки:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Знаходимо проекції сили, яка діє на точку;

$$F_x = m\ddot{x} = 0;$$
$$F_y = m\ddot{y} = 0;$$
$$F_z = m\ddot{z} = 10\text{ Н}.$$

Величина сили визначається за формулою:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 10\text{ Н}.$$

Напрям сили визначається за формулами:

$$\cos\alpha = \cos(x, \bar{F}) = \frac{F_x}{F} = 0;$$
$$\cos\beta = \cos(y, \bar{F}) = \frac{F_x}{F} = 0;$$
$$\cos\gamma = \cos(z, F) = \frac{F_z}{F} = 1.$$

Відповідно куби між силою F і осями координат будуть такими: α = 90°, β = 90°, γ = 0. Отже сила $\bar{F}$ спрямована по вертикалі вверх.

Друга основна задача динаміки полягає у наступному.

Згідно заданим силам, діючим на матеріальну точку, і початковим умовам визначити закон руху точки.

Друга задача динаміки зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

1.7 Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки

Рух точки під дією постійної сили

Розглянемо матеріальну точку D масою m, яка рухається прямолінійно під дією постійної сили p = const. В початковий момент часу координата цієї точки була x = x_0, а початкова швидкість v = v_0; Необхідно визначити закон руху точки.

Складаємо розрахункову схему (рисунок 1.1)

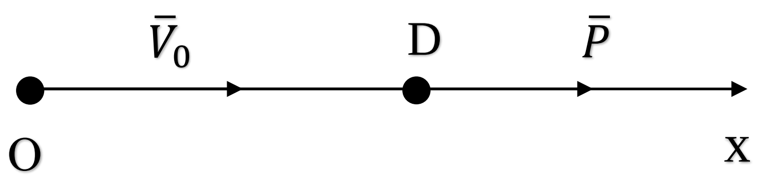


Рисунок 1.1 – Розрахункова схема

Для розв'язання цієї задачі запишемо основний закон динаміки:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k, \tag{1.6}$$

Спроектуємо рівняння (1.6) на вісь x:

$$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \tag{1.7}$$

Враховуючи, що $a_x = \frac{dV_x}{dt}$ рівняння (1.7) приймає вид:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \tag{1.8}$$

Сума проекцій сил діючих на точку дорівнює $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = P_x$. Підставимо у праву частину рівняння (1.8) суму проекцій сил:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x = P, \tag{1.9}$$

Отримаємо диференціальне рівняння (1.9) прямолінійного руху точки під дією постійної сили Р.

Для розв'язання цього рівняння необхідно відокремити змінні:

$$dV_x = \frac{P}{m}dt, \tag{1.10}$$

Інтегруємо ліву і праву частини (1.10)

$$\int dV_x = \frac{P}{m}\int dt => V_x = \frac{P}{m}t + c_1, \tag{1.11}$$

Підставимо $V_x = \frac{dx}{dt}$ в ліву частину виразу (1.11) отримаємо диференційне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P}{m}t + c_1, \tag{1.12}$$

Відокремимо змінні:

$$dx = \frac{P}{m}tdt + c_1 dt\ , \tag{1.13}$$

Інтегруємо ліву і праву частини виразу (1.13).

$$\int dx = \frac{P}{m}\int tdt + c_1\int dt\ , \tag{1.14}$$

$$x = \frac{p}{2m}t^2 + c_1 t + c_2\ , \tag{1.15}$$

Сталі інтегрування визначаємо за допомогою початкових умов при

$$t = 0\begin{cases} x = x_0 \\ V_x = V_{0x} = V_0 \end{cases};$$

$$V_0 = \frac{P}{m}\times 0 + c_1 => c_1 = V_0;$$

$$x_0 = \frac{P}{2m} \times 0 + V_0 \times 0 + c_2 => c_2 = x_0;$$

Підставляємо сталі інтегрування у рівняння (1.15):

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{P}{2m} t^2, \qquad (1.16)$$

Враховуючи той факт, що $a = \frac{P}{m}$ отримуємо рівняння руху точки під дією постійної сили у остатній формі:

$$x = x_0 + \ V_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (1.17)$$

Як видно з виразу (1.17) точка під дією постійної сили рухається рівнозмінно. Якщо рух є уповільненим прискорення має від'ємний знак і вираз (1.17) приймає вид:

$$x = x_0 + V_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad (1.18)$$

Розглянемо приклад.

При очистці зерен їх пропускають крізь решето, яке коливається, має отвори і розташоване горизонтально.

Горизонтальна швидкість, з якою зерно находить до краю отвору дорівнює V_0, форма зерна – куля радіуса R. Нехтуючи опором повітря, треба визначити мінімальну ширину отвору b, щоб зерно змогло проскочити крізь нього.

Розв'язання.

Мінімальна ширина отвору b визначається з тієї умови, що в момент проскакування зерна крізь отвір його центр повинен бути розташований на рівні поверхні решета (рисунок 1.2)

Таким чином, центр зерна повинен перейти з точки А в точку Е. Візьмемо початок координат в точці А і спрямуємо вісь х по горизонталі в бік руху зерна, а вісь у – по вертикалі вгору.

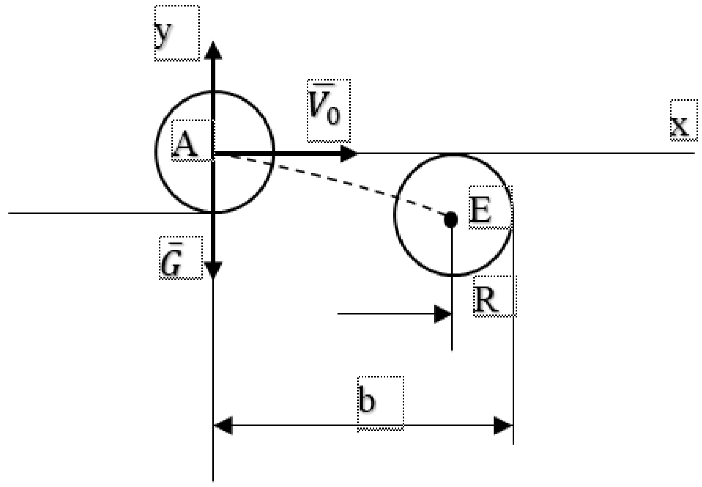


Рисунок 1.2 – До визначення мінімальної ширину отвору b

Координати точки Е такі:

$$x_E = b - R; y_E = -R.$$

Будемо вважати зерно матеріальною точкою, маючи на увазі рух його центра ваги. На зерно при його вільному польоті діє тільки одна постійна за величиною і напрямом сила ваги $\bar{G}$. Проекції цієї сили на осі х і у будуть $F_x = 0, F_y = -G.$ Тому диференціальні рівняння руху зерна мають тонкий вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -G.$$

Враховуючи, що G = mg, і скорочуючи праві і ліві частини на m одержимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Зменшимо порядок похідних:

$$\frac{dV_x}{dt} = 0; \quad \frac{dV_y}{dt} = -g.$$

Відокремимо змінні, помножуючи на dt ліві і праві частини рівнянь:

$$dV_x = 0;\ dV_y = -gdt.$$

Інтегруємо:

$$\int dV_x = 0;\ \int dV_y = -gt.$$

Отримаємо:

$$V_x = \text{c}_1;\ V_y\ =\ -gt + c_2, \tag{1.19}$$

З кінематики відомо, що:

$$V_x = \frac{dx}{dt}\ i\ V_y =\ -gt + c_2\,, \tag{1.20}$$

Підставляємо вирази (1.20) в рівняння (1.19) в результаті чого отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \text{c}_1; \frac{dy}{dt} = -gt + c_2\,, \tag{1.21}$$

Знову відокремимо змінні, помножаючи на dt ліві і праві частини рівнянь:

$$dx = c_1 dt;\quad dy = -gtdt + c_2 dt\,, \tag{1.22}$$

Інтегруємо рівняння (1.22):

$$\int dx = c_1 \int dt\,;\quad \int dy = -g \int tdt + c_2 \int dt, \tag{1.23}$$

В результаті отримаємо:

$$x = c_1 t + c_3;$$
$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_2 t + c_4\ , \qquad (1.24)$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 – сталі інтегрування, які визначаються за початковими умовами руху, які мають вид:

При $t_0 = 0 \begin{cases} x_0 = 0 \quad V_{0x} = V_0; \\ y_0 = 0 \; V_{0y} = 0. \end{cases}$

Підставляючи в рівняння (1.21) початкові умови знаходимо, що $c_1 = V_0$, а $c_2 = 0$. Аналогічно знаходимо сталі інтегрування c_3 і c_4, підставляючи в рівняння (1.23) початкові умови. Таким чином, остаточно рівняння руху центра зерна будуть точки:

$$x = V_0 t;$$
$$y = -\frac{gt^2}{2}, \qquad (1.24)$$

Виключаємо з рівнянь час падіння зерна $t = \frac{x}{V_0}$, одержуємо рівняння траєкторії:

$$y = -\frac{g}{2} \times \frac{x^2}{{V_0}^2}, \qquad (1.25)$$

Центр зерна повинен попасти в точку Е, координати якої:

$$x_E = b - R; \quad y_E = -R.$$

Підставляючи, замість x і y, ці координати, дістаємо рівняння:

$$-R = -\frac{g}{2} \times \frac{(b-R)^2}{{V_0}^2}.$$

З якого знаходимо ширину b отвору в решеті:

$$b = V_0 \sqrt{\frac{2R}{g}} + R.$$

Прямолінійний рух матеріальної точки

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки масою m під дією змінної сили, яка залежить від часу, тобто $F = f(t)$, початкові умови руху: при t = 0 $\begin{cases} V_x = V_{0x} \\ x = x_0 \end{cases}$.

Диференціальне рівняння руху точки має вид:

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_k, \tag{1.26}$$

Спроектуємо рівняння (1.26) на вісь x:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,, \quad \text{або} \quad \frac{dV_x}{dt} = f(t), \tag{1.27}$$

Відокремимо змінні в рівнянні (1.27), помножаючи ліву і праву його частини на dt:

$$m\,dV_x = f(t)dt\,, \tag{1.28}$$

Інтегруємо рівняння (1.28):

$$m\int_{V_{0x}}^{V_x} dV_x = \int_0^t f(t)dt;$$

$$m\,V_x\,\Big|_{V_{0x}}^{V_x} = \int_0^t f(t)dt\,, \tag{1.29}$$

Вважаючи, що функція $f(t)$ відома, то останній інтеграл можна визначити, в результаті чого отримаємо деяку функцію часу, яку позначаємо через $\varphi(t)$, тобто $\int_0^t f(t)dt = \varphi(t)$, тоді

$$mV_x - mV_{0x} = \varphi(t), \tag{1.30}$$

З рівняння (1.29) визначаємо V_x:

$$V_x = V_{0x} + \frac{1}{m}\varphi(t), \tag{1.30}$$

Рівняння (1.30) визначає швидкість точки, як функцію часу t. Вважаючи, що $V_x = \frac{dx}{dt}$, підставимо в рівняння (1.30), яке приймає вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + \frac{1}{m}\varphi(t), \tag{1.31}$$

Відокремимо змінні:

$$dx = V_0 dt + \frac{1}{m}\phi(t)dt, \tag{1.32}$$

Інтегруємо ліву і праву частину рівняння (1.32), враховуючи початкові умови:

$$\int_{x_0}^{x} dx = V_0 \int_{0}^{t} dt + \frac{1}{m}\int_{0}^{t} \varphi(t)dt.$$

Остаточно закон прямолінійного руху матеріальної точки під дією сили, яка залежить від часу має вид:

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t \varphi(t)dt, \tag{1.33}$$

Розглянемо приклад.

Трактор вагою Р рухається по прямій лінії і під час розгону його сила тяги збільшується по закону

$$F = k \cdot t,$$

де t – час у секундах;

k – сталий коефіцієнт, який має розмірність $\left[\text{кг} \times \frac{\text{м}}{\text{с}^3}\right]$.

Визначити закон руху трактора під час розгону.

Розв'язання

Трактор рухається поступально, тому його можна вважати матеріальною точкою. Початкові умови при t = 0 $\begin{cases} V_x = V_{0x} = 0 \\ x = x_0 = 0 \end{cases}$

В основу розв'язування покладемо II закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \tag{1.34}$$

З врахуванням, що $\sum F_{kx} = F_x = kt$, рівняння (1.34) приймає вид:

$$m\ddot{x} = kt \text{ або } m\frac{dV_x}{dt} = kt, \tag{1.35}$$

Відокремимо змінні:

$$m\, dV_x = ktdt, \tag{1.36}$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (1.36) на m:

$$dV_x = \frac{1}{m}ktdt, \tag{1.37}$$

Інтегруємо ліву і праву частину рівняння (1.37).

$$\int dV_x = \frac{k}{m}\int tdt\,;$$

$$V_x = \frac{k}{2m}t^2 + c_1, \tag{1.37a}$$

Рівняння (1.36а) є рівнянням швидкості руху трактора.

Підставимо в ліву частину рівняння (1.37а) $\frac{dx}{dt}$ замість V_x, отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2m}t^2 + c_1$$

Відокремимо змінні:

$$dx = \frac{k}{2m} t^2 dt + c_1 dt\ , \tag{1.38}$$

Інтегруємо рівняння (1.38):

$$\int dx = \frac{k}{2m} \int t^2 dt + c_1 \int dt, \tag{1.39}$$

$$x = \frac{k}{6m} t^3 + c_1 t + c_2\ , \tag{1.40}$$

Визначаємо сталі інтегрування, для чого використовуємо початкові умови:

$$c_1 = 0; \quad c_2 = 0.$$

Тоді закон руху має вигляд:

$$x = \frac{k}{6m} t^3, \tag{1.41}$$

Враховуючи що $m = \frac{p}{g}$, закон руху трактора в остатньому вигляді буде:

$$x = \frac{kg}{6p} t^3 \ \ [\text{м}].$$

Рух точки під дією сили, що залежить від положення точки

Точка рухається прямолінійно під дією змінної сили $F = f(x)$, де $f(x)$ деяка функція від абсциси х рухомої точки. Початкові умови при $t_0 = 0 \begin{cases} x = x_0; \\ V_x = V_{0x}. \end{cases}$

Необхідно знайти закон руху точки.

Складаємо диференціальне рівняння, для чого використовуємо II закон Ньютона

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \text{ або } ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}:$$

Враховуючи, що $a_x = \frac{dV_x}{dt}$, отримаємо

$$m\frac{dV_x}{dt} = f(x)\,, \tag{1.42}$$

Помножимо та одночасно поділимо ліву частину рівняння (1.42) на dx:

$$m\frac{dV_x}{dt} \times \frac{dx}{dx} = f(x), \tag{1.43}$$

Враховуючи, що $V_x = \frac{dV_x}{dt}$ отримаємо:

$$mV_x\frac{dV_x}{dt} = f(x), \tag{1.44}$$

Відокремимо змінні, для чого ліву і праву частину рівняння (1.44) помножимо на dx:

$$mV_x dV_x = f(x)dx, \tag{1.45}$$

Поділимо ліву і праву частини рівняння (1.45) на m, отримаємо:

$$V_x dV_x = \frac{1}{m} f(x)dx, \tag{1.46}$$

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння (1.46):

$$\int_{V_{0x}}^{V_x} V_x\, dV_x = \frac{1}{m}\int_{x0}^{x} f(x)dx, \tag{1.47}$$

Межи інтегрування визначаємо за допомогою початкових умов:

$$\frac{{V_x}^2}{2}\Big|_{V_{0x}}^{V_x} = \frac{1}{m}\int_{x0}^{x} f(x)dx, \tag{1.48}$$

$$\frac{V_x^2}{2} - \frac{V_{0x}^2}{2} = \frac{1}{m}\int_{x0}^{x} f(x)dx, \tag{1.49}$$

Виконуємо інтегрування правої частини рівняння (1.49) (а це можливо зробити, оскільки функція $f(x)$ відома, отримаємо деяку нову функцію змінної х, яку позначимо через $\phi(x)$.

$$\frac{V_x^2}{2} - \frac{V_{0x}}{2} = \frac{1}{m}\phi(x), \tag{1.50}$$

$$V_x = \pm\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m}\phi(x)}\ , \tag{1.51}$$

Ця формула визначає швидкість руху точки, як функцію її абсциси х.

Знак залежить від того, у якому напрямку рухається точка вздовж осі х.

З врахуванням того, що $V_x = \frac{dx}{dt}$, рівняння (1.51) приймає вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m}\phi(x)}\ , \tag{1.52}$$

Помножимо на dt ліву та праву частину рівняння (1.52):

$$dx = \pm\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m}\phi(x)dt}\ , \tag{1.53}$$

Відокремимо змінні:

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m}\phi(x)}}, \tag{1.54}$$

Інтегруємо рівняння (1.54):

$$\int_0^t dt = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m}\phi(x)}}, \tag{1.55}$$

$$t == \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m}\phi(x)}}, \tag{1.56}$$

Це рівняння встановлює залежність між x і t. Після інтегрування правої частини і розв'язання отриманого після цього рівняння відносно x, знаходимо рівняння руху точки у остаточному вигляді $x = \varphi(t)$.

Розглянемо наступний приклад.

Матеріальна точка М масою m рухається вздовж осі x під дією сили, яка залежить від положення, тобто F = kmx, де k = 4.

Початкові умови при $t_0 = 0 \begin{cases} x_0 = 5[\text{м}] \\ V_0 = 2\ \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] \end{cases}$

Визначити закон руху матеріальної точки М.

Складаємо розрахункову схему (рисунок 1.3)

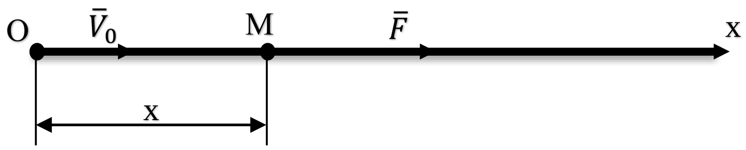


Рисунок 1.3 – Розрахункова схема

Для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки використовуємо II закон Ньютона.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$$

Спростуємо це рівняння на вісь x:

$$m\ddot{x} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} F_{kx} \, , \tag{1.57}$$

Підставляємо у праву частину рівняння (1.57) $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = kmx$ і отримуємо рівняння:

$$m\ddot{x} = kmx \, , \tag{1.58}$$

Розділимо ліву і праву частину рівняння (1.58) на m:

$$\ddot{x} = kx \text{ або } \ddot{x} - kx = 0 \, , \tag{1.59}$$

Підставляємо у рівняння (1.59) значення k = 4 і отримуємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки.

$$\ddot{x} - 4x = 0, \tag{1.60}$$

Для розв’язування диференціального рівняння (1.60) складаємо характеристичне рівняння:

$$n^2 - 4 = 0.$$

Корні цього рівняння дорівнюють:

$$n_1 = 2; \quad n_2 = -2.$$

Оскільки корні характеристичного рівняння є дійсними і різними, то загальний розв’язок однорідного лінійного диференціального рівняння буде:

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \, , \tag{1.61}$$

Визначаємо сталі інтегрування c_1 і c_2 для чого використовуємо початкові умови: при $t_0 = 0 \begin{cases} x_0 = 5[\text{м}] \\ V_0 = 2\ \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] \end{cases}$

Для визначення сталих інтегрування необхідно знати рівняння швидкості руху матеріальної точки, яке ми отримаємо шляхом диференцювання рівняння (1.61)

$$V = \frac{dx}{dt} = 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t}, \qquad (1.62)$$

Таким чином ми маємо два рівняння, рівняння руху точки (1.61) та рівняння швидкості (1.62).

Для знаходження сталих інтегрування підставимо у ці рівняння початкові умови:

$$5 = c_1 + c_2;$$
$$2 = 2\text{c}_1 - \text{c}_2.$$

Звідки $\text{c}_1 = 3$, $\text{c}_2 = 2$.

Підставляємо сталі інтегрування у рівняння (1.62) і отримаємо закон руху матеріальної точки М у остаточному вигляді:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}\ , \qquad (1.63)$$

Рух точки під дією сили, яка залежить від швидкості

Матеріальна точка масою m рухається під дією сили, яка залежить від швидкості, тобто $F = f(V)$. Початкові умови: при $t_0 = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ V = V_0 \end{cases}$.

Необхідно визначити закон руху точки.

Складаємо диференціальне рівняння руху точки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \quad \text{або} \quad ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$$

На точку діє одна сила, яка залежить від швидкості, тому $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_x = f(V)$.

Враховуючи, що $a_x = \frac{dV}{dt}$, можемо записати диференціальне рівняння у наступному вигляді:

$$m\frac{dV}{dt} = f(v), \tag{1.64}$$

Відокремимо змінні, для чого спочатку ліву і праву частину диференціального рівняння (1.64) помножимо на dt, а потім поділимо на $f(V)$, в результаті чого отримаємо вираз:

$$\frac{mdV}{f(V)} = dt, \tag{1.65}$$

Інтегруємо рівняння (1.65), межи інтегрування визначаємо з початкових умов.

$$\int_{V_0}^{V} \frac{mdV_x}{f(V)} = \int_0^t dt\,,\ \int_{V_0}^{V} \frac{mdV}{f(V)} = t\,, \tag{1.66}$$

Після інтегрування лівої частини виразу (1.66) отримаємо рівняння, яке розв'яжемо відносно V і знайдемо швидкість, як функцію часу:

$$V = \frac{dx}{dt} = \Phi(t), \tag{1.67}$$

Відокремимо змінні, для чого ліву і праву частину виразу (1.1.64) помножимо на dt:

$$dx = \Phi(t)dt\,, \tag{1.68}$$

Інтегруємо рівняння (1.68):

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} \Phi(t)dt,$$

В результаті отримаємо закон руху матеріальної точки, як функцію часу:

$$x - x_0 = \int_0^t \Phi(t)dt \quad \text{або} \quad x = x_0 + \int_0^t \Phi(t)dt, \qquad (1.69)$$

Розглянемо приклад.

Тіло D вагою $\bar{P}$ падає донизу із точки O, початкова швидкість $V_0 = 0$. Опір повітря пропорційний швидкості $\bar{R} = \mu\bar{V}$. Визначити закон руху тіла.

Складаємо розрахункову схему.

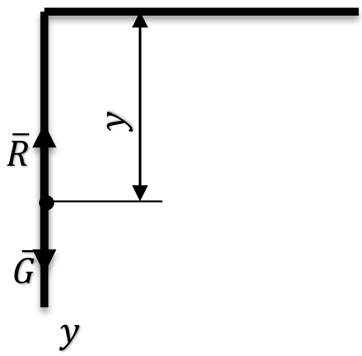


Рисунок 1.4 – Розрахункова схема

Складаємо диференціальне рівняння руху точки D, в проекції на вісь y.

$$m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}.$$

Визначаємо суму проекцій діючих на точку сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = G_y - R_y = mg - \mu V\ , \qquad (1.70)$$

Підставляємо вираз (1.70) у диференціальне рівняння:

$$m\ddot{y} = mg - \mu V, \tag{1.71}$$

Поділимо ліву і праву частину (1.1.68) на масу m:

$$\ddot{y} = g - \frac{\mu}{m}V, \tag{1.72}$$

Позначимо $\frac{\mu}{m} = k$ та підставимо позначення у рівняння (1.72):

$$\ddot{y} = g - kV, \tag{1.73}$$

Знизимо порядок рівняння (1.73) за рахунок виразу $\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$.

$$\frac{dv}{dt} = g - kV, \tag{1.74}$$

Відокремимо змінні, для чого ліву і праву частину рівняння (1.74) помножимо на dt, а потім поділимо на $(g - kV)$.

$$dV = (g - kV)dt\,; \quad \frac{dV}{g-kV} = dt, \tag{1.75}$$

Введемо нову змінну $u = g - kV$; тоді $du = -kdV$; $dV = -\frac{du}{k}$ отримаємо рівняння $\frac{du}{u} = -kdt$.

Після інтегрування маємо:

$$\ln u = -kt + c_1, \text{або} \ln(g - kV) = -kt + c_1, \tag{1.76}$$

Із рівняння (1.76) визначимо значення c_1, підставивши початкові умови при $t_0 = 0$; $V = V_0 = 0$;

$$\ln(g - k \times 0) = -k \times 0 + c_1 => c_1 = \ln g$$

Підставимо значення c_1 в рівняння і визначимо швидкість V:

$$\ln(g - kV) = -kt \times \ln g\,;\ \ln\left(\frac{g-kV}{g}\right) = -kt, \qquad (1.77)$$

Потенцюємо вираз (1.77):

$$\frac{g-kV}{g} = e^{-kt};\ \ V = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}), \qquad (1.78)$$

Аналіз виразу (1.78) показує, що при t → ∞ маємо $e^{-kt} \to 0$, $V \to \frac{g}{k}$, тобто максимальна швидкість буде $V_{max} = \frac{g}{k}$, а рух стає рівномірним.

Уявимо рівняння (1.78) у вигляді:

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

Відокремимо змінні:

$$dy = \frac{q}{k}(1 - e^{-kt})dt, \qquad (1.79)$$

Інтегруємо рівняння (1.79):

$$y = \frac{q}{k}t + \frac{q}{k^2}e^{-kt} + c_2, \qquad (1.80)$$

Для визначення c_2 підставимо у рівняння (1.80) початкові умови: $t = t_0 = 0, y = y_0 = 0$;

$$0 = \frac{q}{k^2} + c_2 => c_2 = -\frac{q}{k^2}$$

Підставимо значення c_2у рівняння (1.80) і отримаємо рівняння тіла, що падає, долаючи опір повітря:

$$y = \frac{q}{k}t - \frac{q}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

Криволінійний рух точки

Інтегрування диференційних рівнянь криволінійного руху розглянемо на прикладі руху тіла, яку кинули під кутом α до горизонту, приймаючи його, як матеріальну точку масою m.

Складаємо розрахункову схему (рисунок 1.5)

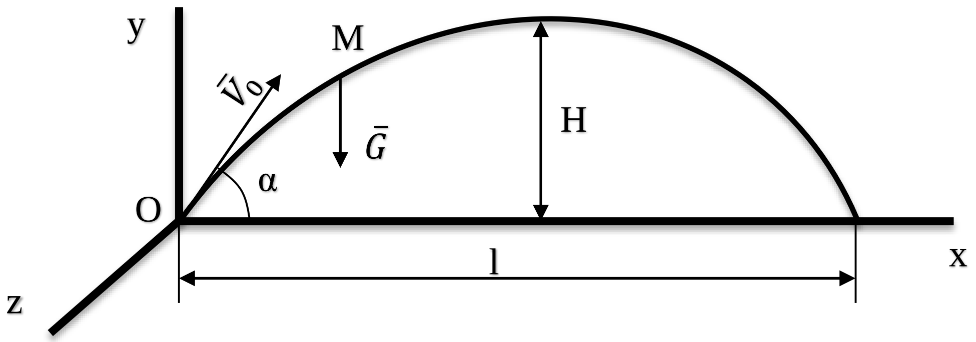


Рисунок 1.5 – Розрахункова схема

На матеріальну точку діє сила ваги $\bar{G}$, проекції якої на координатні вісі дорівнюють:

$$G_x = 0; \;\; G_y = -G = mg; \;\; G_z = 0$$

Складаємо диференціальні рівняння руху матеріальної точки М:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}\,;$$
$$m\frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}\,;$$
$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}.$$

З врахуванням діючої сили, рівняння приймають вид:

$$m\frac{dV_x}{dt} = 0; \;\; m\frac{dV_y}{dt} = 0; \;\; m\frac{dV_z}{dt} = 0, \tag{1.81}$$

Розділимо ліву і праву частини рівнянь 1.81 на m:

$$\frac{dV_x}{dt} = 0; \;\; \frac{dV_y}{dt} = -g; \;\; \frac{dV_z}{dt} = 0, \tag{1.82}$$

Початкові умови мають вид:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0 = 0 \quad V_x = V_0 \times cos\alpha; \\ y = y_0 = 0 \quad V_y = V_0 \times sin\alpha; \\ z = z_0 = 0 \quad V_z = 0. \end{cases}$$

Відокремимо змінні, для чого помножимо ліву і праву частину рівняння (1.82) на dt:

$$dV_x = 0; \; dV_y = -gdt; \; dV_z = 0, \tag{1.83}$$

Інтегруємо рівняння (1.83), в результаті чого отримаємо:

$$V_x = c_1; \; V_y = -gt + c_2; \; V_z = c_3, \tag{1.84}$$

Знаходимо сталі інтегрування, для чого підставляємо початкові умови в вирази (1.84):

$$c_1 = V_0 cos\alpha; \; c_2 = V_0 sin\alpha; \; c_3 = 0.$$

Підставляємо сталі інтегрування в рівняння (1.84):

$$V_x = V_0 cos\alpha; \; V_y = V_0 sin\alpha - gt; \; V_z = 0.$$

або

$$\frac{dx}{dt} = V_0 cos\alpha; \frac{dy}{dt} = V_0 sin\alpha - gt; \frac{dz}{dt} = 0.$$

Відокремимо змінні:

$$dx = V_0 cos\alpha dt; \; dy = V_0 sin\alpha dt - gtdt; \; dz = 0 \,, \tag{1.85}$$

Інтегруємо рівняння (1.85):

$$\int dx = V_0 cos\alpha \int dt \,; \int dy = V_0 sin\alpha \int dt - g \int t \,; \int dz = \int 0$$

В результаті чого отримаємо вирази:

$$x = V_0 t cos\alpha + c_4, \; y = V_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + c_5, \; z = c_6, \tag{1.86}$$

Визначаємо сталі інтегрування c_4, c_5, c_6:

$$c_4 = 0, \qquad c_5 = 0, \qquad c_6 = 0.$$

Підставляємо сталі інтегрування в вирази (1.86), і остаточно знаходимо рівняння руху точки М у вигляді:

$$x = V_0 t cos\alpha, \ y = V_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \ z = 0, \qquad (1.87)$$

Враховуючи, що $z = 0$, робимо висновок, що точка рухається у площині Oxy.

Визначимо за допомогою методів кінематики характеристики даного руху.

1. Траєкторія руху точки:

Виключаємо час t з перших двох рівнянь (1.87), отримаємо рівняння траєкторії:

$$t = \frac{x}{V_0 cos\alpha};$$

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{2V_0^2 cos^2\alpha} x^2, \qquad (1.88)$$

Рівняння (1.88) – це є рівняння параболи з віссю паралельної осі Oy.

2. Дальність польоту:

$$l = \frac{V_0 sin2\alpha}{g}, \qquad (1.89)$$

3. Висота польоту:

$$H = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g}, \qquad (1.90)$$

4. Час польоту:

$$t = \frac{2V_0 sin\alpha}{g}, \qquad (1.91)$$

РОЗДІЛ ІІ
ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1 Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Кількістю руху матеріальної точки називається вектор, що дорівнює добуткові маси точки на вектор її швидкості.

$$\bar{q} = m\bar{V} \,, \qquad (2.1)$$

Спрямований вектор кількості руху вбік вектора швидкості, тобто по дотичній до траєкторії руху точки. Одиницею вимірювання кількості руху є 1 [кг×м/с].

Для характеристики дії сили на тіло за певний проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили та імпульсу сили за кінцевий проміжок часу.

Елементарним імпульсом сили називається векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії.

$$d\bar{S} = \bar{F} \times \mathrm{d}t \,, \qquad (2.2)$$

Напрямок елементарного імпульсу співпадає з напрямком вектора сили. За одиницю вимірювання імпульса сили приймається $1\,[\text{Н} \times \text{с}] = 1\left[\frac{\text{кг}\times\text{м}}{\text{с}^2} \times \text{с}\right] = \left[1\,\text{кг} \times \frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$.

Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульса сили за проміжок часу від 0 до t_1.

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} d\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt \,, \qquad (2.3)$$

Якщо величина і напрям сили постійні, то імпульс сили за певний час $t = t_1 - t_0$ дорівнює добуткові вектора сили на час її дії.

$$\bar{S} = \bar{F} \times t\ , \tag{2.4}$$

В проекціях на координатні осі, рівняння імпульсу сили можна записати наступним чином:

$$\begin{gathered} S_x = F_x \times t; \\ S_y = F_y \times t; \\ S_z = F_z \times t. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Повний імпульс сили дорівнюватиме:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\ , \tag{2.6}$$

Враховуючи, що маса точки стала, а її прискорення $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}$, то основний закон динаміки може бути записаний наступним чином:

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k\ , \tag{2.7}$$

Вираз (2.7) є теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі.

Похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі діючих на точку сил.

Частіше використовується теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в скінченій формі.

Для її отримання помножимо ліву і праву частини виразу (2.7) на dt, а потім проінтегруємо.

$$d(m\bar{V}) = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k\, dt;\ \int_{V_0}^{V_1} d(m\bar{V}) = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k\, dt$$

Остаточно отримаємо теорему про зміну кількості руху у скінченій формі.

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k, \tag{2.8}$$

Зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу дорівнює сумі імпульсів всіх діючих на точку сил за той же проміжок часу.

Проектуючи векторне рівняння (2.8) на координатні осі x,y,z, одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} mV_{1x} - mV_{0x} &= \sum_{k=1}^{n} S_{kx}\,; \\ mV_{1y} - mV_{0y} &= \sum_{k=1}^{n} S_{ky}\,; \\ mV_{1z} - mV_{0z} &= \sum_{k=1}^{n} S_{kz}\,. \end{aligned}\right\}, \tag{2.9}$$

Розглянемо окремі випадки теореми про зміну кількості руху матеріальної точки.

З рівняння (2.8) випливає: якщо

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{S} = 0, mV_1 - mV_0 \text{ або } m\bar{V} = m\bar{V}_0 = const, \tag{2.10}$$

Останнє рівняння виражає закон збереження кількості руху матеріальної точки: якщо сума імпульсів сил, що прикладені до матеріальної точки, за деякий час дорівнює нулю, то кількість руху точки за цей час лишається сталою.

З рівнянь (1.2.9) випливає якщо: наприклад $g \sum_{k=1}^{n} S_x = 0$, то

$$mV_{1x} - mV_{0x} = 0 \text{ або } mV_x = mV_{0x} = const, \tag{2.11}$$

Останнє рівняння виражає закон збереження проекції кількості руху матеріальної на якусь вісь: якщо сума проекцій імпульсів сил, що діють на матеріальну точку, на якусь вісь за деякий час дорівнює нулю, то проекція кількості руху точки на ту ж вісь за той же час лишається сталою.

Розглянемо приклад.

Трактор вагою Р виїжджає на підйом зі швидкістю V_0. Сила опору рухові трактору R. Через час t після входу трактору на підйом його швидкість падає до V_1. Знайти тягову силу трактору, якщо кут підйому дорівнює α.

Розв'язання:

Складемо розрахункову схему. Паралельно похилій площині вибираємо вісь x, щоб її дотичний напрям збігався з напрямом руху трактора; вісь y спрямовуємо по нормалі до площини.

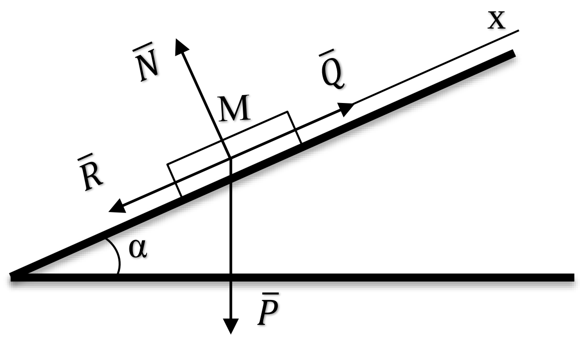


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема

Оскільки трактор має поступальний рух, то цей рух можна розглядати, як рух матеріальної точки М, в якій зосереджена вся маса трактора.

Розглянемо сили, діючи на трактор під час його руху.

На трактор будуть діяти чотири сили: сила власної ваги $\bar{P}$, рушійна сила $\bar{Q}$, нормальна реакція $\bar{N}$ і сила опору $\bar{R}$, напрямлена протилежно рухові трактора. Вважаємо, що всі ці сили прикладені до точки М.

Застосовуємо теорему про зміну кількості руху в проекції на вісь x:

$$mV_x - mV_{0x} = S_x, \tag{2.12}$$

Оскільки сили, що діють на трактор, постійні за величиною, і напрямом, то проекція імпульсу всіх сил на вісь x дорівнюватиме:

$$S_x = (Q - R - Psin\alpha) \times t, \quad (2.13)$$

В задачі одна невідома величина – рушійна сила Q трактора, яка входить в рівняння (2.13). На підставі рівнянь (2.12) і (2.13) маємо:

$$m(V_x - V_{0x}) = (Q - R - Psin\alpha) \times t$$

$$\text{або } \frac{p}{g}(V_x - V_{0x}) = (Q - R - Psin\alpha) \times t\,, \quad (2.14)$$

З рівняння (2.14) знаходимо рушійну силу трактора.

$$Q = \frac{\frac{p}{g}(V_x - V_{0x}) + (Q - R - Psin\alpha) \times t}{t}, \quad (2.15)$$

2.2 Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

Моментом кількості руху матеріальної точки відносно якогось центра O є вектор, що дорівнює векторному добуткові радіуса – вектора точки, початок якого в центрі O, на кількість руху цієї точки:

$$\bar{k}_0 = \bar{M}(m\bar{V}) = \bar{r}xm\bar{V}\,, \quad (2.16)$$

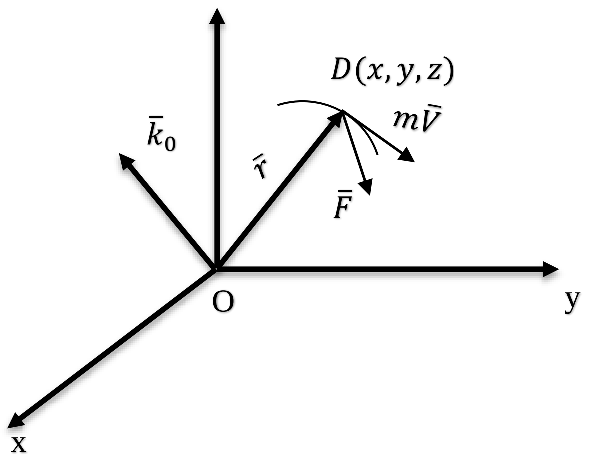


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема

Модуль моменту кількості руху точки дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече h – найкоротшу відстань від центра моменту до прямої лінії, на який розташований вектор $(m\bar{V})$

Проекції вектора k_0, на координатні осі дорівнюють моментом кількості руху відносно цих осей.

З статики відомі формули для визначення моментів сили відносно координатних осей.

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y;$$
$$m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z, \tag{2.17}$$
$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x.$$

де $m_x(\bar{F}), m_y(\bar{F}), m_z(\bar{F})$ – моменти сили $\bar{F}$,відносно координатних осей;

F_x, F_y, F_z – проекції сили $\bar{F}$ на координатні осі;

x, y, z – координати точки прикладення сили $\bar{F}$.

Аналогічно моменти кількості руху відносно координатних осей можна визначити по формулам (2.17), при умові що проекції F_x, F_y, F_z ми замінюємо проекціями вектора кількості руху на ті ж осі.

$$k_x = M_x(m\bar{V}) = ymV_z - zmV_y;$$
$$k_y = M_y(m\bar{V}) = zmV_x - xmV_z;$$
$$k_z = M_z(m\bar{V}) = xmV_y - ymV_x;$$

або

$$k_x = m\left(yV_z - zV_y\right) = m(y\dot{z} - z\dot{y});$$
$$k_y = m(zV_x - xV_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \tag{2.18}$$
$$k_z = m\left(xV_y - yV_x\right) = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Знайдемо для матеріальної точки замкненість між моментами векторів кількості руху $m\bar{V}$ та сили $\bar{F}$ відносно якогось нерухомого центра О, для чого продиференцюємо за часом вираз (2.16).

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{V}}{dt}\right), \quad (2.19)$$

Проаналізуємо вираз (2.19)

$$(\bar{r} \times m\bar{V}) = k_0$$

$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} = 0,$ як векторний добуток двох паралельних векторів

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{a}, \text{а в свою чергу } m\bar{a} = \bar{F}.$$

З статики відомо, що $\bar{r} \times \bar{F} = m_0(\bar{F})$.

Остаточно вираз (2.19) приймає вид:

$$\frac{dk_0}{dt} = m_0(\bar{F}), \quad (2.20)$$

Вираз (2.20) представляє собою теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра О, яка формулюється наступним чином.

Похідна за часом від момента кількості руху точки, відносно якогось нерухомого центра, дорівнює моменту діючої на точку сили відносно того же центра.

Розглянемо матеріальну точку М масою m, яка рухається під дією сили F.

Знайдемо для неї залежність між моментами векторів $m\bar{V}$ та $\bar{F}$ відносно якоїсь нерухомої осі z, для чого продиференцюємо за часом вираз:

$$k_z = M_z(m\bar{V}) = m\left(xV_y - yV_x\right);$$

$$\frac{d}{dt}[M_z(m\bar{V}) = m\frac{dx}{dt} \times V_y + mx\frac{dV_y}{dt} - m\frac{dy}{dt}V_x - my\frac{dV_x}{dt}, \quad (2.21)$$

Проаналізуємо ліву та праву частину виразу (2.21):

$$M_z(m\bar{V}) = k_z, \frac{dV_y}{dt} = a_y, \frac{dV_x}{dt} = a_x;$$
$$\frac{dx}{dt} = V_x, \frac{dy}{dt} = a_y, \tag{2.22}$$

Підставимо вирази (2.22) в рівняння (2.23):

$$\frac{dk_z}{dt} = mV_x \times V_y + mxa_y - mV_xV_y - mya_x$$

або

$$\frac{dk_z}{dt} = m \times a_y \times a_x - ma_xy, \tag{2.23}$$

В свою чергу $ma_y = F_y$ та $ma_x = F_x$, тоді

$$\frac{dk_z}{dt} = xF_y - yF_x \,, \tag{2.24}$$

Враховуючи формули (2.17) праву частину виразу (2.24) можна записати наступним чином:

$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x$$

Тоді вираз (2.24) приймає вид:

$$\frac{dk_z}{dt} = m_z(\bar{F}), \tag{2.25}$$

В результаті ми довели теорему моментів відносно осі: похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь якої нерухомої осі дорівнює моменту сили відносно цієї осі.

Розглянемо закон збереження моменту кількості руху точки відносно центра і осі його сутність полягає у двох окремих випадках:

1. Якщо $m_0(\bar{F}) = 0$, то $\frac{\mathrm{d}\bar{k}_0}{dt} = 0 => k_0 = m_0(m\bar{V}) = const.$

Якщо момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно того ж центра залишається сталим (як величина, похідна від якої дорівнює нулю).

2. Якщо $m_z(\bar{F}) = 0$, то $\frac{\mathrm{d}\bar{k}_z}{dt} = 0 => k_z = const$

Якщо момент рівнодійної сили, яка діє на матеріальну точку, відносно будь-якої осі z дорівнює нулю, то момент кількості руху даної точки відносно цієї ж осі залишається сталим.

2.3 Робота. Потенціальна енергія. Потужність.

Для характеристики дії сили на тіло, при деякому його переміщенні введемо поняття роботи сили.

Сили, які діють на тіло можуть бути постійними та змінними, від цього залежить визначення роботи.

Розглянемо спочатку визначення роботи постійної сили.

Роботою А постійної за величиною і напрямом сили на прямолінійній ділянці шляху S називається добуток сили на переміщення та косінус кута між напрямом сили та переміщенням.

Робота постійної сили визначається за формулою:

$$A = F \times S \times cos\varphi, \qquad (2.26)$$

де F – величина сили;

S – переміщення;

φ – кут між напрямом сили $\bar{F}$ і напрямом переміщення $\bar{S}$.

Робота буде додатною (рисунок 2.3), якщо кут φ гострий, і від’ємною якщо цей кут тупий. Якщо сила напрямлена перпендикулярно до переміщення, то робота дорівнює нулеві.

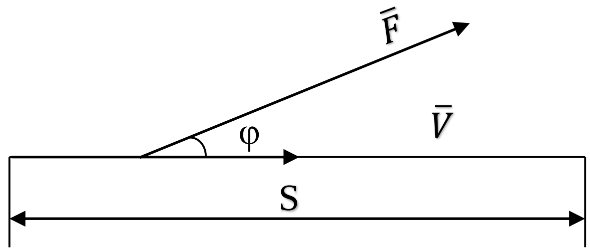


Рисунок 2.3 – Робота сили

Якщо модуль сили F, є величина змінна і точка прикладення сили рухається по криволінійній траєкторії. У цьому випадку для визначення роботи на шляху S розіб'ємо цей шлях на велике число нескінченно малих переміщень dS.

Введемо поняття про елементарну роботу сили на нескінченно малому переміщенні dS.

Елементарною роботою dA сили $\bar{F}$ називається скалярна величина, яка дорівнює добутку проекції сили на дотичну до траєкторії, спрямовану вбік переміщення точки на нескінченно малому переміщенні точки, спрямоване вздовж цієї дотичної.

$$dA = F^{\tau} dS, \tag{2.27}$$

де F^{τ} – проекція сили $\bar{F}$ на дотичну до траєкторії, спрямована вбік переміщення точки.

dS – нескінчено мале переміщення.

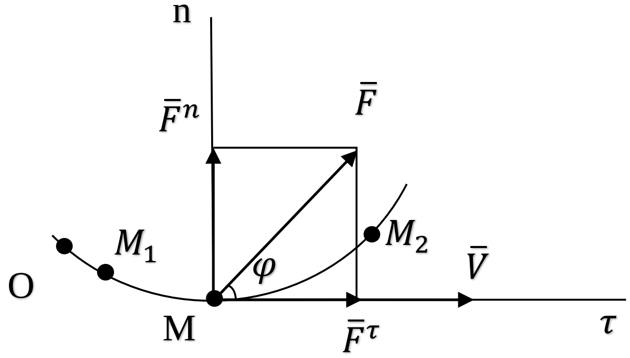


Рисунок 2.4 – Розрахункова схема

Якщо вважати, що $F_{\tau} = Fcos\varphi$ то вираз (2.27) можна записати у вигляді:

$$dA = F \times dS \times cos\varphi, \qquad (2.28)$$

Таким чином елементарна робота сили дорівнює добутку модуля сили F на елементарне переміщення dS та на косинус кута між напрямом сили і напрямом переміщення.

У аналітичній формі елементарна робота сили визначається за формулою:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \qquad (2.29)$$

Елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на елементарний приріст відповідних координат точки прикладення сили.

Перейдемо від поняття елементарної роботи сили до поняття роботи сили на кінцевому переміщенні.

Припустимо, що точка М перемістилась з положення М, до положення M_2 (рисунок 2.4). Треба визначити роботу сили $\bar{F}$ на цьому переміщенні: робота дорівнює інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж цього переміщення:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA \ , \qquad (2.30)$$

З врахуванням виразу (2.28) формулу роботи сили на кінцевому переміщенні можна записати

$$A = \int_{M_1}^{M_2} FdS \times cos\varphi \ , \qquad (2.31)$$

Або у аналітичній формі:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) \ , \qquad (2.32)$$

Розмірність роботи в системі СІ $A = 1[\text{н}] \times 1[\text{м}] = 1[\text{Дж}]$.

Потенціальна енергія

Частина простору, в кожній точці якого на матеріальну точку, вміщену в ньому діє певна за величиною і напрямом сила, яка залежить лише від координат x,y,z точки, називається **силовим полем**.

Стаціонарне силове поле, називається потенціальним якщо робота сили поля, що діє на матеріальну точку, вміщену в поле, не залежить від форми траєкторії точки, а залежить лише від координат початкового і кінцевого положення точки.

В потенціальному силовому полі існує така функція координат поля u (x,y,z), частинні похідні якої по координатам дорівнюють проекціям сили поля на відповідні координатні осі, тобто:

$$F_x = \frac{du}{dx};\ F_y = \frac{du}{dy};\ F_z = \frac{du}{dz}, \qquad (2.33)$$

Функція u називається **силовою функцією** (або **потенціальною функцією**, або потенціалом) даною потенціального силового поля.

Вираз елементарної роботи сили поля в цьому випадку буде:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = du, \quad (2.34)$$

Тобто елементарна робота сил поля є певним диференціалом силової функції u. Звідки одержуємо вираз роботи сили поля на кінцевому шляху точки її прикладення від M_0 до M_1:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} du = u_1 - u_0 \,, \tag{2.35}$$

Отже, робота сили поля на деякому шляху дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій і початковій точках шляху і не залежить від форми або довжини траєкторії, по якій переміщується точка прикладення сили.

При вивченні руху матеріальної точки в силовому потенціальному полі дуже важливе значення має поняття потенціальної енергії.

Перебуваючи в потенціальному полі, матеріальна точка має потенціальну енергію П, що дорівнює роботі, яку зробили б сили поля при переміщенні точки з даного положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положення $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яке прийнято за нульову.

$$\Pi = \int_{M_1}^{M_0} dA = \int_{M_1}^{M_0} du = u_0 - u_1 \,, \tag{2.36}$$

Порівнюючи з визначенням силової функції u, одержуємо залежність між нею і потенціальною енергією П точки:

$$\Pi(x, y, z) = -u(x, y, z), \tag{2.37}$$

Отже, робота сили потенціального поля на кінцевому шляху від M_0 до M_1, подана через потенціальну енергію, буде дорівнювати:

$$A = \Pi_0 - \Pi_1, \tag{2.38}$$

де Π_0 – потенціальна енергія в початковій точці;

Π_1 – потенціальна енергія в кінцевій точці шляху.

До потенціальних силових полів відносяться: поле сил ваги, поле сил пружності, електростатичне поле.

Робота сили ваги $\bar{G}$ матеріальної точки дорівнює:

$$A = G \times (h_0 - h_1), \quad (2.39)$$

де $(h_0 - h_1)$ – різниця висот початкового та кінцевого положень точки.

Робота сили пружності пружини визначається за формулою:

$$A = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_0^2), \quad (2.40)$$

де с – коефіцієнт жорсткості пружини;

x_0 – початкова деформація пружини;

x_1 – кінцева деформація пружини.

Відношення роботи корисних опорів $A_{\text{кор}}$ до всієї затраченої роботи $\text{А}_{\text{затр}}$ називається коефіцієнтом корисної дії:

$$r = \frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{затр}}}, \quad (2.41)$$

Потужність.

Потужність в даний момент вимірюється відношенням елементарної роботи до елементарного часу, протягом якого ця робота виконана:

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad (2.42)$$

Якщо потужність стала, то вона може бути виміряна роботою за будь-який проміжок часу, поділеною на цей проміжок часу:

$$N = \frac{A}{t}, \quad (2.43)$$

Якщо вважати, що елементарна робота сили визначається за формулою $dA = F_\tau \times dS$ то вираз (2.42) приймає вид:

$$N = \frac{F_\tau \times dS}{dt} = F_\tau \times V, \qquad (2.44)$$

Визначимо розмірність потужності:

Система СІ: $N = \frac{1[\text{Дж}]}{1[c]} = 1[\text{Вт}], 1[\text{кВт}] = 1000[\text{Вт}]$.

Система МкГС:

$$N = \frac{1[\text{кГм}]}{1[\text{с}]} = 1\frac{[\text{кГм}]}{[\text{с}]}, 1[\text{к. с.}] = 75\frac{[\text{кГм}]}{c}, 1[\text{кВт}] = 1{,}36\ [\text{к. с.}]$$

Розглянемо приклад.

Автомобіль вагою Q рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці шляху з прискоренням а. Опір, що його перемагає під час руху автомобіля, приймається сталим і дорівнює R. Визначити потужність, яку розвинув автомобіль в момент t, якщо в початковий момент t_0, швидкість автомобіля дорівнювала V_0.

Розв’язання.

Для визначення потужності автомобіля в заданий момент скористуємося формулою:

$$N = F_v \times V,$$

де F_v – величина тягової сили автомобіля

V – швидкість автомобіля в момент t.

Цю швидкість знайдемо, враховуючи, що автомобіль рухається з сталим прискоренням, тобто рівноприскорено, за формулою:

$$V = V_0 + at$$

Визначимо тепер тягову силу автомобіля.

Для цього, приймаючи автомобіль за матеріальну точку, напишемо рівняння його руху, враховуючи, що на автомобіль діє тягова сила $\bar{F_v}$ напрямлена по руху, і сила опору $\bar{R}$, напрямлена проти руху.

Рівняння в проекції на лінію руху матиме такий вигляд:

$$ma = F - R$$

Звідси:

$$F_v = ma + R$$

З отриманого рівняння видно, що тягова сила складається з двох частин: одна частина йде на надання автомобілю прискорення, а друга на подолання опору його рухові.

Знаходимо потужність автомобіля в момент часу t.

$$N = (ma + R)V = \left(\frac{Q}{g}a + R\right) \times (V_0 + at) = \frac{Q \times aV_0}{g} + \frac{Q \times a^2 t}{g} + V_0 R + aRt.$$

2.4 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Кінетичною енергією рухомої матеріальної точки називається скалярна величина, що дорівнює добутку маси рухомої точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{mV^2}{2}, \qquad (2.45)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії може бути сформульована в диференціальній або в кінцевій формі.

В диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі всіх сил, прикладених до точки.

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA, \qquad (2.46)$$

Припустимо, що в момент часу t_0 швидкість точки дорівнювала V_0, а в момент часу $t_1 - V_1$, і візьмемо інтеграл у відповідних границях:

$$\int_{V_0}^{V_1} mV \times dV = \int_{M_0}^{M_1} dA, \qquad (2.47)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A, \qquad (2.48)$$

Рівняння (2.48) є математичним виразом теореми про зміну кінетичної енергії точки в кінцевій формі, яка формулюється наступним чином: зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому переміщенні.

Розмірність кінематичної енергії в системі одиниць СІ:

$$\left[\frac{mV^2}{2}\right] = 1[\text{кг}] \times 1\left[\frac{\text{м}^2}{c^2}\right] = 1\,\frac{[\text{кг} \times \text{м}^2]}{[\text{с}^2]} = 1\,\frac{[\text{кг} \times \text{м}]}{[c^2]}[\text{м}] = 1[\text{Дж}]$$

Тобто розмірність кінематичної енергії співпадає з розмірністю роботи.

При русі матеріальної точки під дією сил потенціального силового поля сума кінематичної і потенціальної енергії, тобто певна механічна енергія Е точки залишається сталою:

$$E = T + \Pi(x, y, z) = const, \qquad (2.49)$$

Це є **закон збереження механічної енергії**.

Розглянемо приклад.

Колісний трактор вагою 30,12 кН йде по оранці з швидкістю 1,33 м/с. Після виключення муфти зчеплення він зупинився, пройшовши шлях 1,13 м. Визначити силу опору рухові трактора.

Розв’язання.

Оскільки рух трактора поступальний, розглядаємо трактор, як матеріальну точку М, зосередивши всю його масу в центри ваги.

На точку М, що рухається по площині, діє сила ваги $\bar{P}$, нормальна реакція $\bar{N}$ і сила опору рухові трактора $\bar{R}$ (рисунок 2.5).

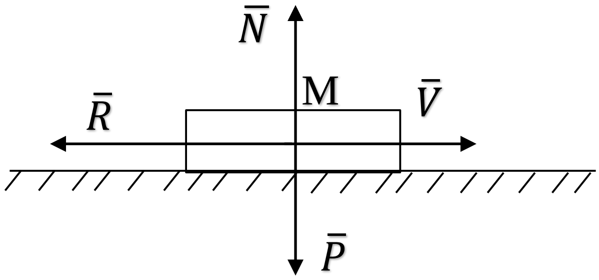


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема

Скористуємося для розв’язання теоремою про зміну кінематичної енергії точки:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A, \qquad (2.50)$$

Оскільки сила опору $\bar{R}$ напрямлена проти руху трактора, то робота її на вказаному шляху від’ємна.

Сили $\bar{P}$ i $\bar{N}$ перпендикулярні напряму руху, тому роботи не виконують. Таким чином, робота сил, діючих на трактор на шляху S, визначається виразом:

$$A = -R \times S\,, \qquad (2.51)$$

Швидкість трактора в кінці руху дорівнює нулю $V = 0$. Тому рівняння (2.51) приймає вигляд:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -RS, \qquad (2.52)$$

Враховуючи, що $m = \frac{P}{g}$ і підставляючи це значення в рівняння (2.52) розв’яжемо його відносно R:

$$R = \frac{\frac{P}{g} \times \frac{V_0^2}{2}}{S} = \frac{P \times V_0^2}{2gS} = \frac{30{,}12 \times 1{,}33^2}{9{,}81 \times 2 \times 1{,}13} = 2{,}4 \text{ кН}.$$

РОЗДІЛ ІІІ
ДИНАМІКА НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1 Формулювання першої і другої задачі динаміки для невільної матеріальної точки

Основний закон динаміки для невільної матеріальної точки, а також і її диференціальні рівняння мають такий же вигляд, як і для вільної точки, тільки до діючих на точку сил додаються сили реакції в'язей. У цьому випадку руху точки можливе виникнення проблем при розв'язанні першої і другої задач динаміки, тому що сили реакції в'язей наперед невідомі і їх необхідно додатково визначити по заданим в'язям, накладеним на рухому матеріальну точку.

При розв'язанні першої задачі динаміки діюча на точку рівнодіюча сила визначається із диференціальних рівнянь її руху. Потім з цієї рівнодіючої сили згідно заданих в'язей відокремлюють силу реакції в'язей. Таким чином, отримаємо задачу про розкладання відомої сили на її складові.

Повну силу реакції точки при її русі звичайно розкладають на дві складові – статичну та динамічну.

Складова сили реакції в'язей, яка урівноважує діючі на точку сили, називається статичною реакцією.

Друга складова повної сили реакції, яка залежить тільки від руху точки під дією заданих сил, називається динамічною реакцією. Вона врівноважує силу інерції точки, що рухається.

При розв'язанні другої задачі динаміки, коли сили та початкові умови відомі, а необхідно визначити закон руху невільної матеріальної точки, частина сил, діючих на точку, а саме сили реакції в'язей, наперед не відомі і їх необхідно визначити по заданим в'язям в процесі розв'язання задачі.

Таким чином, другу задачу динаміки невільної матеріальної точки можна сформулювати наступним чином: по наперед відомим силам, початковим умовам та в'язям, накладеним на точку, визначити закон руху цієї точки та сили реакції в'язей.

3.2. Невільний рух точки по гладенькій поверхні

Нехай гладенька нерухома поверхня, по якій рухається точка масою m під дією заданої сили $\bar{F}$, задається рівнянням

$$f(x, y, z) = 0,$$

де x, y, z – координати точки, що рухається.

Рівняння $f(x, y, z) = 0$ називається рівнянням в'язі. Весь час руху координати точки повинні задовольняти цьому рівнянню. При розгляді руху невільної точки необхідно прийняти до уваги дію реакції поверхні.

Враховуючи той факт, що поверхня, по якій рухається точка, є гладенькою – сила тертя відсутня. Позначимо через $\bar{N}$ невідому нормальну силу реакції поверхні. Таким чином, на точку M діє відома сила $\bar{F}$ та невідома реакція в'язі $\bar{N}$ (рисунок 3.1).

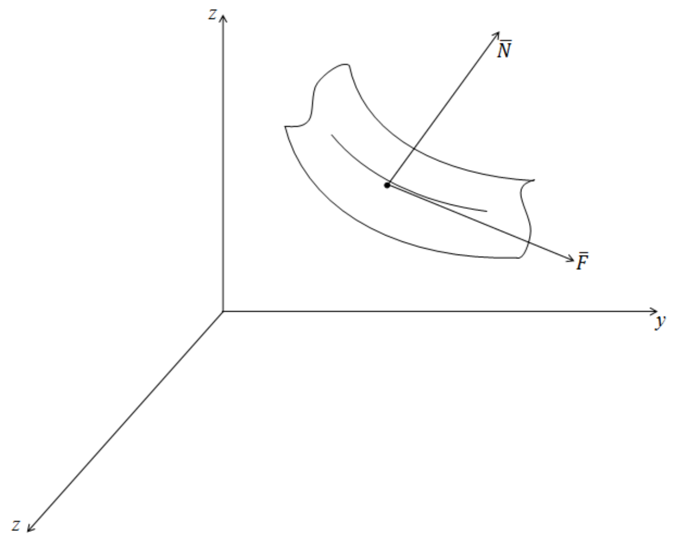


Рисунок 3.1 – Невільний рух точки по гладенький поверхні

На підставі другого закону Ньютона будемо мати рівняння

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}. \tag{3.1}$$

Спроєкціюємо ліву та праву частини векторного рівняння 3.1 на нерухомі осі декартових координат, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x + N_x, \\ ma_y &= F_y + N_y, \\ ma_z &= F_z + N_z, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де F_x, F_y, F_z – проєкції сили $\bar{F}$ на координатні осі;

N_x, N_y, N_z – проєкції нормальної реакції $\bar{N}$ на координатні осі;

a_x, a_y, a_z – проєкції прискорення точки M на координатні осі.

Враховуючи, що $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ та $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ рівняння (3.2) приймають вид:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + N_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + N_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + N_z. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Проєкції нормальної реакції можна визначити за формулами:

$$\begin{aligned} N_x &= N \cdot cos\left(\widehat{\bar{N}, \bar{\imath}}\right), \\ N_y &= N \cdot cos\left(\widehat{\bar{N}, \bar{\jmath}}\right), \\ N_{zx} &= N \cdot cos(\widehat{\bar{N}, \bar{k}}), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

де $cos\left(\widehat{\bar{N}, \bar{\imath}}\right)$, $cos\left(\widehat{\bar{N}, \bar{\jmath}}\right)$, $cos(\widehat{\bar{N}, \bar{k}})$ – напрямні косинуси.

Для визначення напрямних косинусів нормалі даної поверхні $f(x, y, z) = 0$ використовуємо Δf – диференціальний параметр функції f:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \qquad (.3.5)$$

Тоді напрямні косинуси визначаться з виразів:

$$cos(\widehat{\bar{N},\bar{\imath}}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f},\ cos(\widehat{\bar{N},\bar{\jmath}}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f},\ cos(\widehat{\bar{N},k}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}$$

або

$$\begin{aligned} cos(\widehat{\bar{\bar{N}},\bar{\imath}}) &= \frac{1}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ cos(\widehat{\bar{\bar{N}},\bar{\jmath}}) &= \frac{1}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (3.6) \\ cos\left(\widehat{\bar{\bar{N}},\bar{k}}\right) &= \frac{1}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

Тоді проєкції нормальної реакції на координатні осі будуть визначатися:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ N_y &= \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (3.7) \\ N_z &= \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

Підставимо ці значення проєкцій нормальної реакції у диференціальні рівняння (3.3), отримаємо наступні диференціальні рівняння:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Позначаючи відношення $\frac{N}{\Delta f}$ через λ (множник Лагранжа), одержимо рівняння, які називаються рівняннями Лагранжа I роду:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Приєднуючи до цих рівнянь рівняння поверхні *f*(x, y, z), одержуємо чотири рівня, з яких можна визначити координати x, y, z точки як функції часу, а також нормальну реакцію *N*. Сталі інтегрування визначаться за допомогою початкових умов, які задаються.

3.3 Невільний рух точки по шорсткій поверхні

Якщо поверхня шорстка, то в цьому випадку невільна матеріальна точка буде знаходитись під дією трьох сил: заданої сили $\bar{F}$, нормальної сили реакції $\bar{N}$ та сили тертя $F_{тр}$.

Диференціальні рівняння руху будуть мати наступний вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + N_x + F_x^{тр},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + N_y + F_y^{тр}, \tag{3.10}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + N_z + F_z^{\text{тр}}.$$

Проєкції сили тертя на координатні осі можна уявити у наступному вигляді:

$$\begin{gathered} F_x^{\text{тр}} = F^{\text{тр}} \cdot cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{\imath}}\right), \\ F_y^{\text{тр}} = F^{\text{тр}} \cdot cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{\jmath}}\right), \\ F_z^{\text{тр}} = F^{\text{тр}} \cdot cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{k}}\right). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Враховуючи, що сила тертя спрямована в бік, протилежний швидкості точки, то напрямні косинуси $\bar{F}^{\text{тр}}$ та $\bar{v}$ відрізняються тільки знаком:

$$\begin{gathered} cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{\imath}}\right) = -cos(\widehat{\bar{v}, \bar{\imath}}), \\ cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{\jmath}}\right) = -cos(\widehat{\bar{v}, \bar{\jmath}}), \\ cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, k}\right) = -cos\left(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}\right). \end{gathered} \tag{3.12}$$

В свою чергу косинуси швидкості дорівнюють:

$$\begin{gathered} cos(\widehat{\bar{v}, \bar{\imath}}) = \frac{v_x}{v}, \\ cos(\widehat{\bar{v}, \bar{\jmath}}) = \frac{v_y}{v}, \\ cos\left(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}\right) = \frac{v_z}{v}. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Як відомо:

$$\begin{gathered} v_x = \frac{d_x}{dt}, \\ v_y = \frac{d_x}{dt}, \end{gathered} \tag{3.14}$$

$$v_z = \frac{d_x}{dt}.$$

Підставимо вирази (3.14) в формули (3.15) і отримаємо:

$$\begin{aligned} cos(\widehat{\bar{v},\bar{\imath}}) &= \frac{1}{v} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ cos(\widehat{\bar{v},\bar{\jmath}}) &= \frac{1}{v} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ cos\left(\widehat{\bar{v},\bar{k}}\right) &= \frac{1}{v} \cdot \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Тоді з урахуванням виразів (3.15) напрямні косинуси сили тертя $\bar{F}^{\text{тр}}$ приймають вид:

$$\begin{aligned} cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}},\bar{\imath}}\right) &= -\frac{1}{v} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}},\bar{\jmath}}\right) &= -\frac{1}{v} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ cos\left(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}},\bar{k}}\right) &= -\frac{1}{v} \cdot \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Підставимо значення напрямних косинусів сили тертя у вирази (3.11) і отримаємо формули для визначення проекцій сили тертя на координаційні осі:

$$\begin{aligned} F_x^{\text{тр}} &= -\frac{F^{\text{тр}}}{v} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ F_y^{\text{тр}} &= -\frac{F^{\text{тр}}}{v} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ F_z^{\text{тр}} &= -\frac{F^{\text{тр}}}{v} \cdot \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

На підставі рівнянь (3.11) та виразів для визначення проєкцій сил тертя (3.17), а також залежностей для визначення проєкції нормальної реакції на координатні осі (3.8) отримаємо систему диференціальних рівнянь руху невільної точки по шорсткій поверхні у вигляді

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F_{\text{тр}}}{v}\cdot\frac{dx}{dt},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F_{\text{тр}}}{v}\cdot\frac{dy}{dt},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{F_{\text{тр}}}{v}\cdot\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Приєднуючи до цих трьох рівнянь рівняння поверхні $f(x, y, z) = 0$, а також рівняння закону Кулона $F^{mp} = f \cdot N$, де f – коефіцієнт тертя, отримаємо п’ять рівнянь, з яких можна визначити всі п’ять невідомих величин x, y, z, N і $F^{\text{тр}}$.

Розглянемо наступний приклад.

По шорсткий похилій площині, яка складає з горизонтом кут α = 30°, спускається важке тіло без початкової швидкості (рисунок 2.3).

Треба визначити, протягом якого часу t тіло пройде шлях довжиною S = 39,2 м, якщо коефіцієнт тертя f = 0,2.

Розв’язання. Вважаємо тіло матеріальною точкою. Вибираємо початок координат в початковому положенні точки і спрямовуємо вісь вздовж похилої площини в напрямі руху тіла, а вісь y – по нормалі до цієї площини. Рух тіла буде невільний, оскільки похила площина є його в’язю.

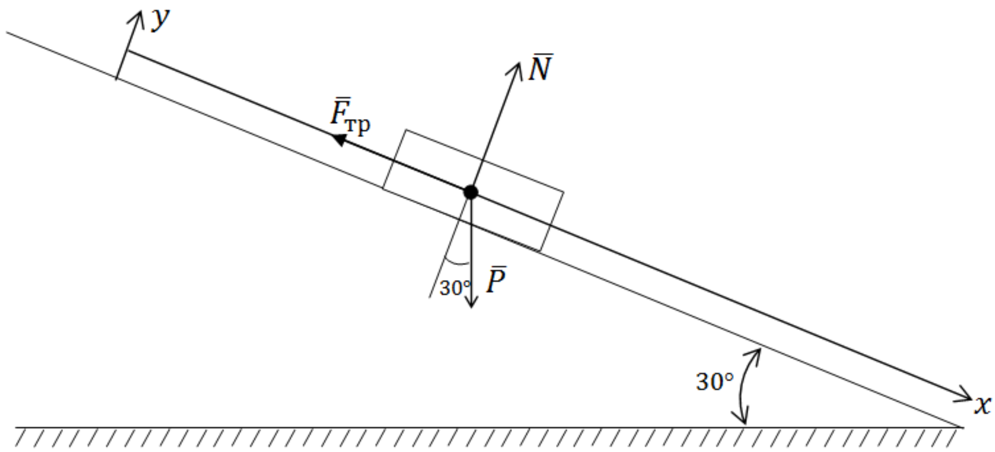


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема

На тіло діють постійні за величиною і напрямом сили: сила ваги $\bar{P}$ і сила реакції площини, яка складається з двох складових: нормальної до площини реакції $\bar{N}$ і сили тертя $\bar{F}_{тр}$, яка напрямлена по дотичній в бік, протилежний рухові (3.2).

Таким чином, диференціальні рівняння руху тіла будуть:

$$m\ddot{x} = P \cdot cos60° - F_{тр}; \quad (3.19)$$

$$m\ddot{y} = N - P \cdot cos30°. \quad (3.20)$$

Оскільки при русі тіла *y = const*, то $\ddot{y} = 0$, а тому з рівняння (3.20) знаходимо, що $N = P \cdot cos30°$. Сила тертя дорівнює $F_{тр} = f \cdot N = f \cdot P \cdot cos30°$. підставляючи вираз сили тертя в рівняння (3.19) і скорочуючи всі його члени на m (враховуючи, що $P = mg$), матимемо:

$$\ddot{x} = g \cdot cos60° - f \cdot g \cdot cos30°. \quad (3.21)$$

Відокремимо зміни, для чого ліву і праву частину рівняння (3.21) помножимо на *dt*.

$$dV_x = g \cdot cos60° \cdot dt - f \cdot g \cdot cos30° \cdot dt. \quad (3.22)$$

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння (3.22)

$$\int dV_x = g \cdot cos60° \cdot \int dt - f \cdot g \cdot cos30° \cdot \int dt. \quad (3.23)$$

В результаті дістанемо:

$$V_x = g \cdot cos60° \cdot t - f \cdot g \cdot cos30° \cdot t,$$

або

$$V_x = g \cdot (cos60° - f \cdot cos30°) \cdot t + C_1. \quad (3.24)$$

Відокремимо змінні і інтегруємо ще один раз:

$$dx = g \cdot (cos60° - f \cdot cos30°) \cdot t \cdot dt + C_1 \cdot dt;$$

$$\int dx = g \cdot (cos60° - f \cdot cos30°) \cdot \int t \cdot dt + C_1 \cdot \int dt\,;$$

$$x = g \cdot (cos60° - f \cdot cos30°) \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2. \qquad (3.25)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 використовуємо початкові умови. Початкові умови такі:

при $t_0 = 0 \begin{cases} V_{0x} = 0; \\ x_0 = 0. \end{cases}$

Підставляючи значення $t_0 = 0$ і $V_{0x} = 0$ в рівняння (3.24), знаходимо, що $C_1 = 0$. Підставляючи значення $t_0 = 0$ і $x_0 = 0$ в рівняння (3.25), маємо $C_2 = 0$.

Таким чином, остаточне рівняння руху тіла буде таким:

$$x = g \cdot (cos60° - f \cdot cos30°) \cdot \frac{t^2}{2}. \qquad (3.26)$$

Щоб знайти час руху тіла, розв'язуємо це рівняння відносно t:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g \cdot (cos60° - f \cdot cos30°)}}. \qquad (3.27)$$

Знаючи, що x = 39,2 м; f = 0,2; g = 9,81 м/с2, знаходимо: t = 5 с.

3.4 Рух невільної точки по гладенькій кривій лінії

Розглянемо рух матеріальної точки M вздовж заданої плоскої нерухомої лінії. Нехай рівняння цієї плоскої лінії буде $f(x, y, z) = 0$. На точку M діють відома сила $\bar{F}$, яка розташована в одній площині з лінією, а також реакція в'язі $\bar{N}$, яка напрямлена по нормалі до даної лінії (рисунок 3.3).

Диференціальні рівняння руху точки будуть мати наступний вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + N \cdot cos\left(\widehat{\bar{N},\bar{\imath}}\right),$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + N \cdot cos\left(\widehat{\bar{N},\bar{\jmath}}\right), \qquad (3.28)$$

або

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (3.29)$$

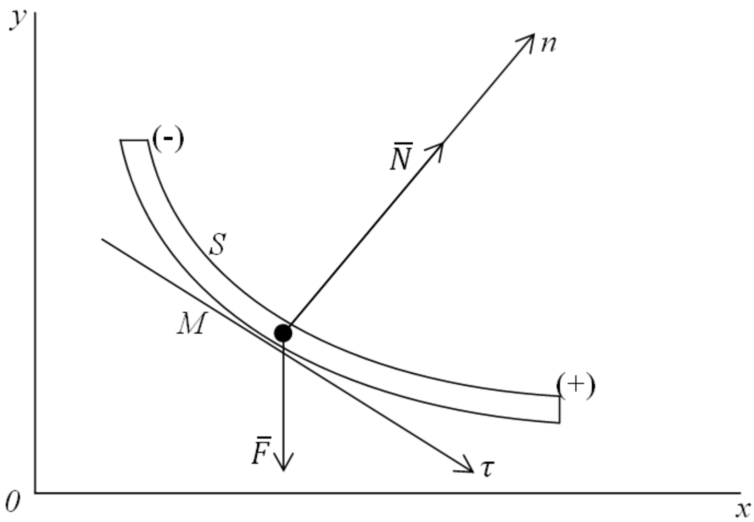


Рисунок 3.3 – Розрахункова схема

З цих двох рівнянь, до яких треба ще додати рівняння в'язі f(x, y, z) = 0, можна визначити x, y та λ, як функції часу t, а значить визначити закон руху точки M і реакцію в'язі N.

Під час дослідження руху точки по заданій плоскій лінії зручніше проектування векторне рівняння $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}$ на натуральні осі координат. В цьому випадку ми отримаємо два рівняння

$$m\bar{a}^i = \bar{F}^i,$$
$$m\bar{a}^n = \bar{F}^n + \bar{N}. \qquad (3.30)$$

де F^i – проєкція сили $\bar{F}$ на дотичну ось,

F^n – проєкція сили $\bar{F}$ на головну нормаль.

Як відомо з кінематики, проекції прискорення на дотичну вісь та головну нормаль визначаються з формул

$$a^i = \frac{d^2 s}{dt}; \qquad a^n = \frac{V^2}{\rho}. \tag{3.31}$$

Підставляючи ці формули у попередні рівняння, отримаємо диференціальні рівняння руху невільної точки у натуральній формі:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2 s}{dt^2} &= F^\tau, \\ \frac{mV^2}{\rho} &= F^n + N. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Інтегруємо перше рівняння і знаходимо закон руху точки *M* вздовж заданої лінії та її швидкість. З другого рівняння визначаємо реакцію *N*.

Розглянемо приклад.

Точка *M*, маса якої *m*, рухається під дією сили тяжіння по гладенькій внутрішній поверхні жолоба. Поверхня жолоба являє собою частину бокової поверхні циліндра радіусом r. У початковий момент часу точка знаходиться в положенні M_o, а її швидкість дорівнює нулю.

Визначити швидкість *V* точки *M* і реакцію *N* поверхні жолоба в положенні, коли центральний кут $\angle M_o OM = 60°$.

Розв'язання.

Зобразимо точку *M* у довільному положенні на траєкторії, якою є внутрішня поверхня жолоба. Положення точки *M* визначається кутом $\varphi = \angle M_o OM$ (рисунок 3.4).

Покажемо сили, які діють на точку *M*: $\bar{P}$ – сила тяжіння точки, $\bar{N}$ – реакція внутрішньої поверхні жолоба, яка спрямована по радіусу до центра кривини *O*.

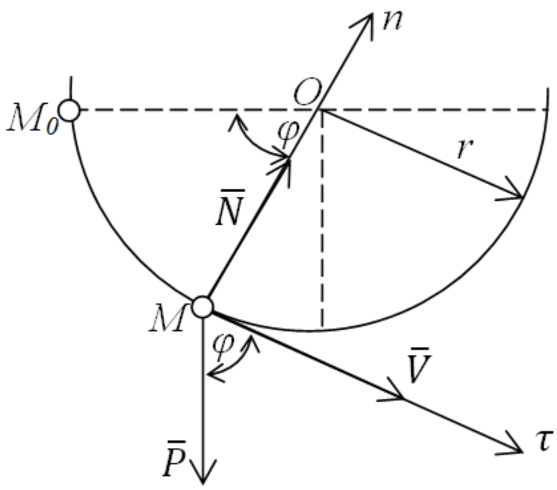


Рисунок 3.4 – Розрахункова схема

Оскільки траєкторія точки відома (дуга з радіусом r), то зв'яжемо з точкою M натуральну систему координат М і n.

Рівняння руху точки M у вертикальній формі має вигляд:

$$ma = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{N}. \quad (3.33)$$

Спроектуємо векторне рівняння (1) на натуральні осі координат М і n.

$$ma^i = P \cdot cos\varphi,$$
$$ma^n = N - P \cdot sin\varphi. \quad (3.34)$$

Сила тяжіння $\bar{P}$ визначається з формули $P = mg$. Підставимо цю формулу в праву частину рівняння (3.34), в результаті чого отримаємо

$$ma^i = mg \cdot cos\varphi,$$
$$ma^n = N - mg \cdot sin\varphi., \quad (3.35)$$

Розділимо ліву і праву частину першого з рівнянь (3.35) на m

$$a^i = g \cdot cos\varphi,$$
$$ma^n = N - mg \cdot sin\varphi, \quad (3.36)$$

Дотичне прискорення визначається з формули $a^i = \frac{dV}{dt}$. Після підстановки цієї формули в ліву частину першого з рівнянь (3.36), рівняння приймають вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = g \cdot cos\varphi,$$
$$ma^n = N - mg \cdot sin\varphi, \qquad (3.37)$$

В свою чергу нормальне прискорення визначається з формули $a^n = \frac{mV^2}{\rho}$, і після підстановки його значення у ліву частину другого рівняння (3.37), ми отримаємо:

$$\frac{dV}{dt} = g \cdot cos\varphi,$$
$$m\frac{V^2}{\rho} = N - mg \cdot sin\varphi, \qquad (3.38)$$

У рівняннях (3.38) три змінні величини *V*, *t*, *φ*. При розв'язуванні цих рівнянь необхідно одну зі змінних виразити через інші. Оскільки в умові задачі не вказаний час руху точки, а задається кут зміни положення точки, то виразимо в першому рівнянні залежностей (3.38) змінну *t* через змінну *φ*:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \omega = g \cdot cos\varphi.$$

Враховуючи, що $\omega = \frac{V}{r}$, отримаємо:

$$\frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{V}{r} = g \cdot cos\varphi. \qquad (3.39)$$

Помножимо ліву і праву частину рівняння (3.39) на $r \cdot d\varphi$

$$V \cdot dV = g \cdot r \cdot cos\varphi \cdot d\varphi. \qquad (3.40)$$

Проінтегруємо ліву і праву частину рівняння (3.40)

$$\int V \cdot dV = g \cdot r \cdot \int cos\varphi \cdot d\varphi.$$

$$\frac{V^2}{r} = g \cdot r \cdot sin\varphi + C, \qquad (3.41)$$

де C – стала інтегрування.

Для визначення сталої інтегрування використовуємо початкові умови, а саме:

при $t = 0$ $\begin{cases} V_0 = 0; \\ \varphi_0 = 0. \end{cases}$

Після підстановки початкових умов у рівняння (3.41) отримаємо, що $C = 0$.

З рівняння 3.41 знаходимо закон зміни швидкості матеріальної точки:

$$V = \sqrt{2g \cdot r \cdot sin\varphi}, \qquad (3.42)$$

В положенні, коли $\varphi = 60°$, швидкість точки M дорівнює:

$$V = \sqrt{2g \cdot r \cdot sin\frac{\pi}{3}} = 4{,}1\sqrt{r}, \qquad (3.43)$$

Після визначення швидкості точки М з другого рівняння залежностей (3.38) знаходимо нормальну реакцію внутрішньої поверхні циліндра:

$$N = \frac{mV^2}{r} + mg \cdot \sin\varphi = m\left(\frac{V^2}{r} + g \cdot \sin\varphi\right).$$

При $\varphi = \frac{\pi}{3}$ та $\frac{V^2}{r} = g\sqrt{3}$, одержимо:

$$N = m\left(g\sqrt{3} + g\frac{\sqrt{3}}{r}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{r}mg = 25{,}5m, \qquad (3.44)$$

3.5 Принцип Даламбера для матеріальної точки

Розглянемо рух невільної матеріальної точки на яку діють відома сила $\bar{F}$ та реакція в’язі $\bar{N}$.

Додамо геометрично сили $\bar{F}$ та $\bar{N}$, в результаті отримаємо рівнодійну $\bar{R}$. (рисунок 3.5).

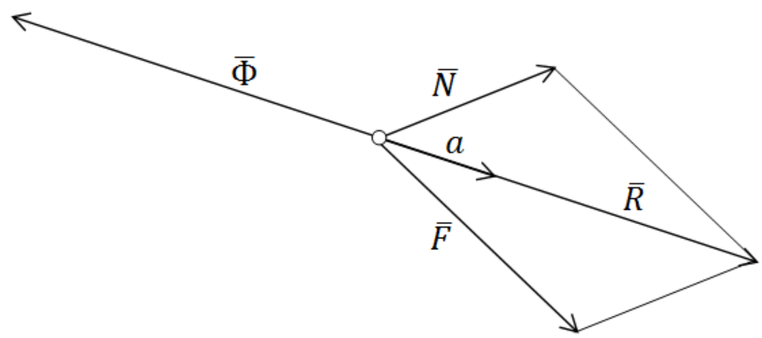


Рисунок 3.5 – Принцип Даламбера

Уявимо собі тепер, що ми приклали у даний момент до точки M, ще силу, яка має той же модуль, що сила R, тобто ma і напрямлена в протилежний бік. Це і є сила інерції.

Сила інерції матеріальної точки за величиною дорівнює добуткові маси точки на величину її прискорення і напрямлена протилежно векторові прискорення точки, тобто:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}, \tag{3.45}$$

де $\bar{\Phi}$ – сила інерції.

Сили $\bar{R}$ і $\bar{\Phi}$, які рівні за модулем і напрямлені протилежно зрівноважуються, тобто:

$$\bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \tag{3.46}$$

У той же час

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}. \tag{3.47}$$

Якщо підставити векторне рівняння (3.47) в векторне рівняння (3.46), то отримаємо наступне:

$$\bar{N} + \bar{F} + \bar{\Phi} = 0. \qquad (3.48)$$

Це векторне рівняння виражає принцип Даламбера для матеріальної точки, який можна сформувати наступним чином: при русі матеріальної точки активні сили і реакції в’язей, діючи на точку, а також сила інерції матеріальної точки, якщо умовно прикласти до самої точки, являють формально зрівноважену систему сил.

Слід мати на увазі, що в дійсності рівновага сил при русі точки (крім прямолінійного і рівномірного рухів) не існує. Сили, що входять в рівняння принципу Даламбера, прикладені до різних тіл: сили $\bar{F}$ та $\bar{N}$ до рухомої точки, а сила інерції $\bar{\Phi}$ є геометричною сумою (головним вектором) сил, що прикладені частково до тіл, які своєю активною дією викликають прискорення точки, а частково прикладені до в’язей точки.

Тому рівняння принципу Даламбера є формальним рівнянням, яке подає задачу руху як задачу рівноваги (статики), що буває зручно при розв’язуванні задач.

Розглянемо наступний приклад.

Кривошип ОА соломотряса зернівказбирального комбайна обертається з кутовою швидкістю 16 рад/с. Визначити, при якому найменшому значенні кута φ частки хлібної маси будуть відриватися від соломотряса АВ, якщо ОА = ВС = 0,05 м та АВ = ОС (рисунок 3.6).

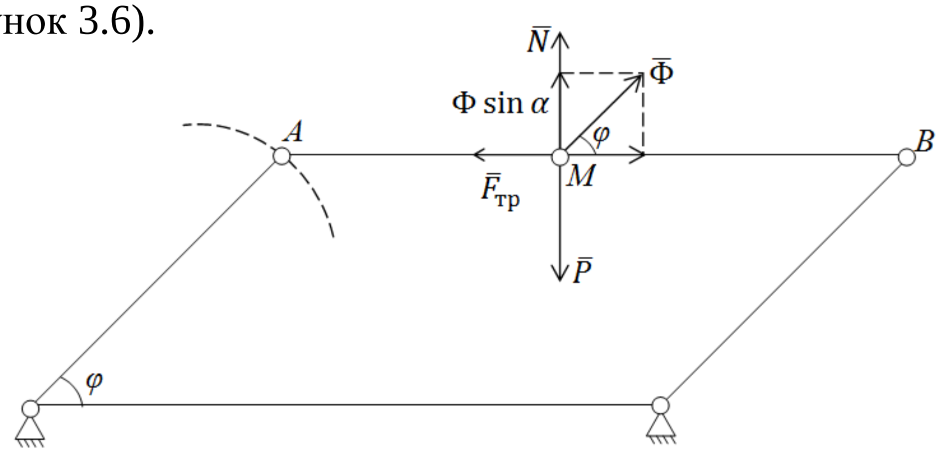


Рисунок 3.6 – Розрахункова схема

Розв'язання.

Розглянемо рух однієї частки хлібної маси, як матеріальну точку М. На дану точку в будь-який момент діють наступні сили: $\bar{P}$ – сила ваги, $\bar{N}$ – нормальна реакція, $\bar{F}_{тр}$ – сила тертя. Приєднуємо до даних сил, згідно принципу Даламбера силу інерції. Оскільки рух ланки АВ поступальний, то прискорення всіх її точок будуть однакові і дорівнюватимуть прискоренню точки А кривошипа. Точка А рухається по колу з сталою швидкістю, тому її прискорення – це нормальне прискорення, величина якого $a^n = r \cdot \omega^2$. Тому сила інерції матеріальної точки хлібної маси дорівнює нормальній складовій сили інерції $\Phi = m \cdot r \cdot \omega^2$.

Підкидання матеріальної точки можливе при умові, якщо нормальна складова сили інерції, буде більше сили ваги, або дорівнювати їй. Для цього повинна бути справедливою умова:

$$\Phi \sin\varphi \geq P$$

або

$$mr\omega^2 \sin\varphi \geq mg.$$

Звідси

$$\sin\varphi \geq \frac{g}{r\omega^2} \approx 0{,}707.$$

Отже, $\varphi \geq 45°$. Найменший кут $\varphi = 45°$.

РОЗДІЛ IV
ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Основний закон динаміки $m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ справедливий тільки в інерціальних системах відліку.

Інерціальною (нерухомою) системою називається така система відліку, для якої справедливий перший закон динаміки – принципи інерції.

Але є багато систем, у яких не справджується перший закон динаміки, проте закон руху матеріальної точки необхідно шукати в цих неінерціальних системах. До неінерціальних систем відліку відносяться і поверхня землі.

Розв’язання численних задач техніки потребує дослідження об’єктів відносно рухомої системи координат, наприклад, це стосується теорії складного руху точки.

4.1 Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

Нехай рухома система O, x, y, z здійснює відомий нам рух відносно нерухомої системи відліку O_1, x_1, y_1, z_1 (рисунок 4.1).

В свою чергу точка M масою m рухається відносно рухомої системи відліку O, x, y під дією системи сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$, рівнодіюча якої $\bar{F} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$. Визначити рівняння руху матеріальної точки відносно рухомої системи відліку, якщо відомі діють на точку сили.

Для розв’язання цієї задачи необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху точки M.

Згідно основного закону динаміки вільної матеріальної точки для абсолютного руху:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k, \tag{4.1}$$

де m – маса точки;

$\bar{a}$ – абсолютне прискорення точки;

$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ – геометрична сума прикладених сил.

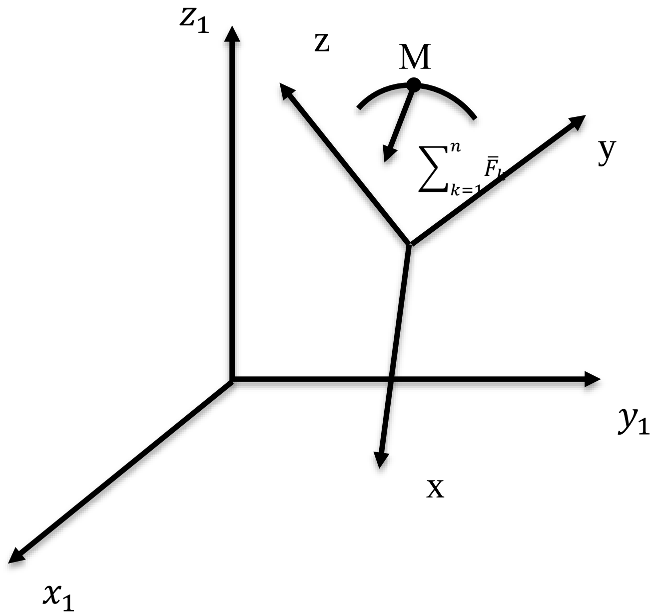


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема

З теореми про додавання прискорень (теореми Коріоліса) відомо що:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k, \tag{4.2}$$

де $\bar{a}_r$ – відносне прискорення;

$\bar{a}_e$ – переносне прискорення;

$\bar{a}_k$ – коріолісове прискорення.

Підставимо значення $\bar{a}$ у рівняння основного закону динаміки, в результаті отримаємо:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$$

або

$$m\bar{a}_r + m\bar{a}_e + m\bar{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k, \tag{4.3}$$

Перенесемо в ліву частину $m\bar{a}_e$ та $m\bar{a}_k$.

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k - m\bar{a}_e - m\bar{a}_k\ , \tag{4.4}$$

Позначимо:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e \text{ та } \Phi_k = -m\bar{a}_k\ , \tag{4.5}$$

Підставимо позначення (4.5) в рівняння (4.4)

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{\Phi}_\text{е} + \bar{\Phi}_\text{к}, \tag{4.6}$$

де $\bar{\Phi}_\text{е}$ – переносна сила інерції матеріальної точки;

$\bar{\Phi}_\text{к}$ – коріолісова сила інерції матеріальної точки.

З виразів (4.5) видно, що переносна сила інерції та коріолісова сили інерції спрямовані в протилежний бік переносного та коріолісового прискорення.

Вектори переносної $\bar{\Phi}_\text{е}$ і коріолісової $\bar{\Phi}_\text{к}$ сил інерції – це поправки на неінерціальність рухомої системи координат.

Ці сили фіктивні, оскільки вони не є силами взаємодії між тілами.

Вираз (4.6) є основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки.

Спроектуємо вектори рівняння (4.6) на рухомі осі координат

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}, \\ m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \\ m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Рівняння (4.7) є диференціальними рівняннями відносного руху матеріальної точки. Як видно з цих рівнянь вони записуються аналогічно диференціальним рівнянням абсолютного руху матеріальної точки, але в правій частині рівнянь до активних сил треба додати силу інерції переносного руху і силу інерції Коріоліса.

Якщо переносний рух є обертальним рухом, то переносне прискорення дорівнює:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n},$$

де $\bar{a}_e^{\tau}$ – дотичне прискорення точки М у переносному русі;

$\bar{a}_e^{n}$ – нормальне прискорення точки М у переносному русі.

Тоді:

$$\bar{\Phi}_{\text{е}} = \bar{\Phi}_{\text{е}}^{\tau} + \bar{\Phi}_{e}^{n}\,, \tag{4.8}$$

З врахуванням рівності (4.8) рівняння (4.6) набуває вид

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{\Phi}_{\text{е}}^{\tau} + \bar{\Phi}_{\text{е}}^{n} + \bar{\Phi}_k, \tag{4.9}$$

Для невільної матеріальної точки основне рівняння відносного руху має вид:

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{R} + \bar{\Phi}_{\text{е}} + \bar{\Phi}_k, \tag{4.10}$$

де $\bar{R}$ – рівнодіюча реакцій в'язей.

Модулі переносної та коріолісової сили інерції визначаються за формулами:

$$|\Phi_{\text{е}}| = ma_e\,, \tag{4.11}$$

$$|\Phi_{\text{к}}| = ma_k\,, \tag{4.12}$$

В свою чергу прискорення коріоліса визначається виразом:

$$a_k = 2\omega_e \bar{V}_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r), \tag{4.13}$$

Тоді з врахуванням виразу (4.13) сила інерції Коріоліса дорівнює:

$$|\Phi_{к}| = 2m\omega_e V_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r), \qquad (4.14)$$

Модуль сили інерції Коріоліса буде дорівнювати нулю у випадках коли:

– переносний рух є поступальним;

– відносний рух напрямлений паралельно осі переносного обертання, або у даний момент часу вектор $\bar{V}_r$ паралельний цієї осі;

– відносна швидкість у даний момент часу дорівнює нулю.

Розглянемо наступний приклад.

Прямий стержень обертається з сталою кутовою швидкістю $\omega_e = 2\ c^{-1}$ навколо вертикальної осі і нахилений до неї під кутом $\alpha = 45^o$ (рисунок 4.2). Одна з крайніх точок стержня, точка О, знаходиться на осі обертання; вздовж стержня може ковзати без тертя кільце А з масою m. В початковий момент кільце А знаходиться на віддалі 2a $=0{,}2$м від точки О і не має швидкості. Нехтуючи вагою точки визначити закон руху кільця А вздовж стержня при його обертанні.

Розв’язання.

Виберемо нерухому систему відліку у вигляді декартових осей координат x, y, z з початком в точці. Вісь z спрямуємо по осі обертання вгору. Початок рухомих координат візьмемо в точці О і спрямуємо рухому вісь γ вздовж стержня.

Переносним рухом осі γ є обертання її разом зі стержнем навколо осі z. Відмітимо, що переносний рух – обертовий. Будемо вважати кільце А матеріальною точкою. Переносним рухом точки А буде рух тієї точки разом з віссю γ. Відносним рух точки А буде рух її вздовж осі γ. Припустимо, що вісь γ, обертаючись навколо осі z, в даний момент знаходиться в площині x, y і що точка А, рухаючись вздовж стержня, знаходиться на віддалі γ від точки О.

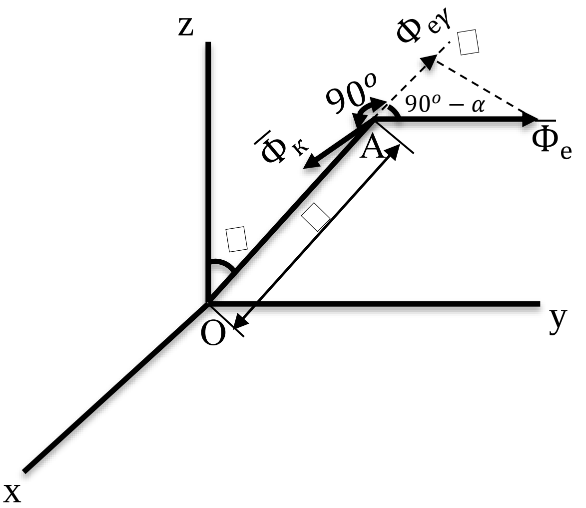


Рисунок 4.2 – Розрахункова схема

Диференціальне рівняння руху точки A в проекції на вісь γ буде

$$m\ddot{\gamma} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\gamma} + R_{\gamma} + \Phi_{e\gamma} + \Phi_{к\gamma}, \qquad (4.15)$$

де 1) $F_{\gamma} -$ проекція рівнодіючої активних сил за умовою дорівнює нулю.

2) R_{γ} – проекція реакції в'язі. Оскільки сила тертя дорівнює нулю, а проекція нормальної реакції стержня на вісь γ також дорівнює нулю, то $R_{\gamma} = 0$.

3) $\Phi_{e\gamma}$ – проекція переносної сили інерції. При рівномірному обертанні стержня точка A буде мати тільки нормальне прискорення, що за величиною дорівнюватиме $a^{n} = \omega^{2}\gamma sin\alpha$ і напрямлене перпендикулярно до осі обертання в бік від'ємної осі y в даний момент. Переносна сила інерції точки A $\overline{\Phi}_{e}$ буде напрямлена протилежно, тобто в бік додатної осі y, її модуль визначається з формули:

$$\Phi_{e} = ma_{e} = m\omega^{2}\gamma sin\alpha.$$

Проекція її на вісь γ буде:

$$\Phi_{e\gamma} = \Phi_{e}\cos(90 - \alpha) = \Phi_{e} sin\alpha = m\omega^{2}\gamma\sin^{2}\alpha.$$

4) $\Phi_{\text{к}\gamma}$ – проекція сили інерції Коріоліса точки А. Сила інерції напрямлена перпендикулярно до осі γ. Тому проекція її на вісь γ дорівнює нулю ($\Phi_{\text{к}\gamma} = 0$).

З врахуванням проведеного аналізу, рівняння (4.15) прийме такий вид:

$$m\ddot{\gamma} = \Phi_{\text{е}\gamma},$$

або

$$m\ddot{\gamma} = m\omega^2\gamma\sin^2\alpha\,, \tag{4.16}$$

Розділимо ліву і праву частину рівняння (4.16) на m, в результаті чого отримаємо:

$$\ddot{\gamma} = \omega^2\gamma\sin^2\alpha,$$

або

$$\ddot{\gamma} - \omega^2\gamma\sin^2\alpha = 0, \tag{4.17}$$

Рівняння (4.17) є диференціальним рівнянням відносного руху кільця А. Для його розв’язання складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 - \omega^2\gamma\sin^2\alpha = 0$$

Розв’язуючи його, знаходимо:

$$r_{1,2} = \pm\omega sin\alpha$$

Таким чином, розв’язання рівняння (4.17) буде:

$$\gamma = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} = c_1e^{(\omega sin\alpha)t} + c_2e^{(-\omega sin\alpha)t}\ , \tag{4.18}$$

Визначаємо сталі інтегрування c_1 та c_2, для чого використовуємо початкові умови при $t_0 = 0$ $\begin{cases}\gamma_0 = 2a\\ \dot{\gamma}_0 = 0\end{cases}$.

Продиференцюємо за часом вираз (4.18)

$$\dot{\gamma} = c_1\omega sin\alpha e^{(\omega sin\alpha)t} - c_2\omega sin\alpha e^{(-\omega sin\alpha)t}\,, \tag{4.19}$$

Підставляючи $t = 0, \gamma_0 = 2a$ в рівняння (4.18) і $t = 0, \dot{\gamma}_0 = 0$ в рівняння (4.19), одержуємо:

$$2a = c_1 + c_2;$$
$$0 = c_1 - c_2.$$

Звідси знаходимо $c_1 = c_2 = a$.

Отже остаточно закон руху точки А вздовж стержня буде таким:

$$\gamma = a\left[e^{(\omega sin\alpha)t} + e^{(-\omega sin\alpha)t}\right]$$

Підставляючи числові значення, одержуємо:

$$\gamma = 0{,}1(e^{1{,}4t} + e^{-1{,}4t}), \qquad (4.20)$$

4.2 Відносний спокій матеріальної точки

У випадку рівноваги точки відносно рухомої системи координат при наявності переносно руху точки відносна швидкість $\bar{V}_r = 0$ та відносне прискорення $\bar{a}_r = 0$. Внаслідок цього прискорення Коріоліса $\bar{a}_k$ також буде дорівнювати нулю, тому що $a_k = 2V_r \omega sin\alpha$. Враховуючи той факт, що сила інерції Коріоліса дорівнює добутку маси точки на коріолісове прискорення у випадку рівності нулю коріолісова прискорення, сила інерції Коріоліса також дорівнює нулю.

Тоді рівняння (4.10) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0\,, \qquad (4.22)$$

Рівняння (4.22) є рівнянням відносно спокою матеріальної точки, суть якого полягає у наступному:

Ізометрична сума активних сил прикладених до точки, реакцій в’язей та переносної сили інерції дорівнює нулю.

У випадку, коли матеріальна точка є вільною рівняння (4.22) мають вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0, \qquad (4.23)$$

Розглянемо приклад.

В початковий момент зерно знаходиться в самій нижній точці M_0 поверхні трієрного циліндра і рухається разом з ним без ковзання (рисунок 4.3). При яких умовах буде знаходитись зерно у відносному спокої при подальшому обертанні циліндра? Кутова швидкість циліндра ω, радіус циліндра r, коефіцієнт тертя зерна по поверхні циліндра.

Розв’язання.

Нехай циліндр повернеться на деякий кут α і зерно, рухаючись разом з циліндром без ковзання, перемістилось з положення M_o в положення М.

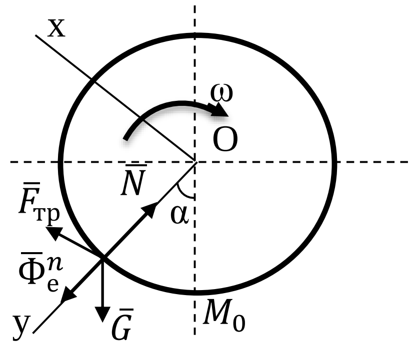


Рисунок 4.3 – Розрахункова схема

При спокої зерна відносно циліндра мусить справджуватися рівняння відносної рівноваги зерна, тобто:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{R} + \bar{\Phi}_{\text{e}} = 0, \tag{4.24}$$

де $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ – рівнодіюча активних сил, якою є сила ваги G;

$\bar{R}$ – рівнодіюча реакції в’язі, якою буде стінка циліндра;

$\bar{\Phi}_{\text{e}}$ – сила інерції переносного руху точки.

Слід відмітити, що реакцій в’язі дві:

– нормальна реакція $\bar{N}$ поверхні циліндра,

– сила тертя $\bar{F}_{\text{тр}}$, яка напрямлена по дотичній до поверхні циліндра в бік його обертання.

Що стосується переносної сили інерції, то вона буде мати тільки нормальну складову, оскільки переносний рух є рівномірним обертанням. Ця складова по модулю буде дорівнювати: $\Phi_{е}^{n} = mr\omega^2$ і спрямована по радіусу обертання OM зовні.

Отже, якщо зерно знаходиться в спокої відносно циліндра, що обертається, то геометрична сума сил: ваги $\bar{G}$, нормальної реакції $\overline{N}$, сили тертя $\bar{F}_{тр}$ і переносної сили інерції зерна $\overline{\Phi}_{е}^{n}$ дорівнює нулю:

$$\bar{G} + \overline{N} + \bar{F}_{тр} + \overline{\Phi}_{е} = 0, \tag{4.25}$$

Виберемо рухомі осі координат 0х і 0у з початком в точці О, які обертаються разом з циліндром. Вісь 0у спрямуємо через точку М, а вісь 0х перпендикулярно до осі 0у (рисунок 4.3).

Спроектуємо векторне рівняння (4.25) на координатні осі. Сума проекцій всіх діючих сил на вісь х дорівнюватиме:

$$F_{тр} - Gsin\alpha = 0, \tag{4.26}$$

Сума проекцій на вісь y:

$$Gcos\alpha - N + \Phi_{е}^{n} = 0, \tag{4.27}$$

Підставимо в рівняння (4.26) і (4.27) значення сил $\bar{G}$ та $\Phi_{е}^{n}$, в результаті отримаємо:

$$F_{тр} - mgsin\alpha = 0, \tag{4.28}$$

$$mgcos\alpha - N + mr\omega^2 = 0\ , \tag{4.29}$$

З рівняння (4.29) знаходимо N:

$$N = mgcos\alpha + mr\omega^2 = m(gcos\alpha + r\omega^2), \tag{4.30}$$

В рівняння (4.26) входить сила тертя $F_{тр}$, величина якої може приймати будь-яке значення від нуля до граничної величини;

$$F_{тр} \leq fN$$

Тому рівняння (4.25) можна перенести так:

$$F_{тр} = Gsin\alpha \text{ або } Nf \geq mgsin\alpha$$

Враховуючи (4.30), а також те, що $f = tg\varphi$ (де φ – кут тертя), одержимо:

$$m(gcos\alpha + r\omega^2)tg\varphi \geq mgsin\alpha, \tag{4.31}$$

Після відповідних перетворень це рівняння можна звести до такого вигляду:

$$\frac{r\omega^2}{g}sin\varphi \geq \sin(\alpha - \varphi), \tag{4.32}$$

Рівняння (4.30) і (4.32) визначають умови, при наявності яких має місце відносний спокій зерна на поверхні циліндра, що обертається:

1) При умові додатної нормальної реакції:

$$N = mg\left(\frac{r\omega^2}{g} + cos\alpha\right) > 0, \tag{4.33}$$

Зерно може знаходитись на поверхні циліндра (інакше, якщо N<0, то зерно буде відриватися від циліндра).

2) Рівняння (4.32) визначає умову, при якій зерно, знаходячись на поверхні, не ковзає по ній.

Граничне положення зерна при відносному спокої визначається виразом (4.32) при знакові рівності. Тоді:

$$\sin(\alpha_1 - \varphi) = \frac{r\omega^2}{g}sin\varphi, \tag{4.34}$$

де α_1 – кут, на який зерно затягується циліндром без ковзання по його поверхні.

Рівняння (4.34) може служити для визначення кута α_1.

РОЗДІЛ V
КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

5.1 Гармонійні коливання

Розглянемо точку М, яка рухається прямолінійно під дією поновлюючої сили, пропорціональної відхиленню точки від положення статичної рівноваги (рисунок 5.1).

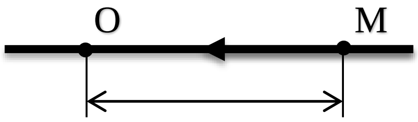


Рисунок 5.1 – Закон руху точки М

Знайдемо закон руху точки М, для чого складемо диференціальне рівняння в проекції на вісь x.

$$m\ddot{x} = F_x, \tag{5.1}$$

де F_x – проекція поновлюючої сили на вісь x, яка визначається з виразу $F_x = -cx$.

Підставимо значення проекції на вісь x поновлюючої сили в рівняння (5.1), в результаті чого отримаємо вираз:

$$m\ddot{x} = -cx, \qquad (5.2))$$

Поділимо ліву і праву частину рівняння (5.2) на m:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0\,, \tag{5.3}$$

Введемо позначення $k^2 = \frac{c}{m}$, які підставимо в рівняння (5.3)

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \tag{5.4}$$

де k – колова частота гармонічних коливань.

Колова частота визначається за формулою:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{5.5}$$

де c – жорсткість пружини;

m – маса точки.

Рівняння (5.4) – диференціальне рівняння гармонічних коливань. Його розв’язок шукають у вигляді:

$$x = e^{nt}, \tag{5.6}$$

Двічі продиференцюємо за часом цей вираз, в результаті чого отримаємо:

$$\ddot{x} = n^2 e^{nt}, \tag{5.7}$$

Підставимо вирази (5.6) та (5.7) у рівняння (5.4) і отримаємо характеристичне рівняння

$$n^2 e^{nt} + k^2 e^{nt} = 0;$$

$$n^2 + k^2 = 0\,, \tag{5.8}$$

Обчислимо корні характеристичного рівняння:

$$n_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} \text{ або } n_{1,2} = \pm ik$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Оскільки корні характеристичного рівняння (5.8) уявні, то загальне розв’язання однорідного диференціального рівняння (5.4) набуває вигляду.

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \qquad ()5.9$$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування, які знаходимо за допомогою початкових умов.

Початкові умови у нашому випадку мають вигляд:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = V \end{cases}$$

Вираз (5.9) характеризує зміну переміщення точки, для знаходження закону характеризуючого зміну швидкості точки необхідно продиференцювати вираз (5.9) за часом.

$$\dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt, \tag{5.10}$$

Підставляємо початкову швидкість при $t = 0$ у рівняння (5.10), в результаті чого отримаємо c_2:

$$V_0 = c_2 k => c_2 = \frac{V_0}{k}, \tag{5.11}$$

Аналогічно підставимо початкове переміщення при $t = 0$ у рівняння (5.9) і знайдемо c_1

$$x_0 = c_1.$$

Отримані сталі інтегрування підставимо у рівняння (5.9)

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt, \tag{5.12}$$

Рівняння (5.11) є загальним розв'язком диференціального рівняння (5.4).

Розв'язання рівняння (5.4) можна подати у іншому вигляді, якщо замість сталих інтегрування c_1 і c_2 ввести сталі А та α, такі що $c_1 = A \sin \alpha$ і $c_2 = A \cos \alpha$, тоді після їх підстановки у рівняння (5.9) ми отримаємо:

$$x = A \sin \alpha \cos kt + A \cos \alpha \sin kt\,;$$

$$x = A(\sin \alpha \cos kt + \cos \alpha \sin kt) = A \sin(kt + \alpha), \tag{5.13}$$

Коливання точки за законом $x = A \sin(kt + \alpha)$ називаються **гармонічними коливаннями**.

Для визначення параметрів гармонічних коливань розглянемо рух точки D по колу радіуса А зі сталою кутовою швидкістю $k = const$, з положення D_0, яке визначається кутом $kOD_0 = \alpha$ (рисунок 5.2)

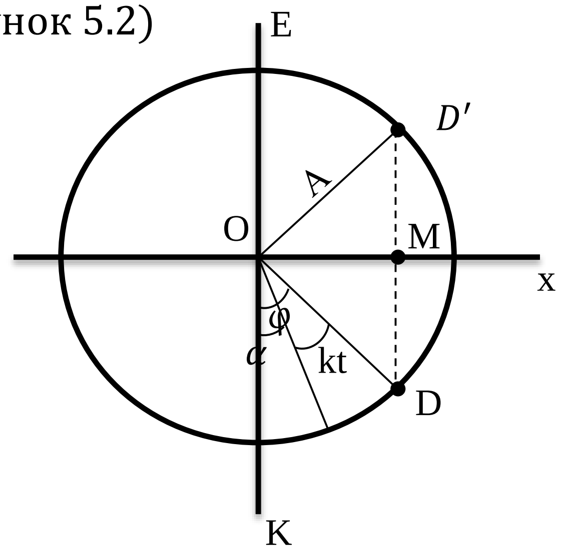


Рисунок 5.2 – Гармонічні коливання

В довільний момент часу проекція M точки D на вісь x рухається за законом $x = A\sin(kt + \alpha)$, тобто здійснює гармонічні коливання. Величина A, яка дорівнює максимальному відхиленню точки M від центра коливань O називається амплітудою коливань.

Аргумент $\varphi = kt + \alpha$ називається фазою коливання.

де α – початкова фаза коливань.

Графіком руху точки M є синусоїда (рисунок 5.3)

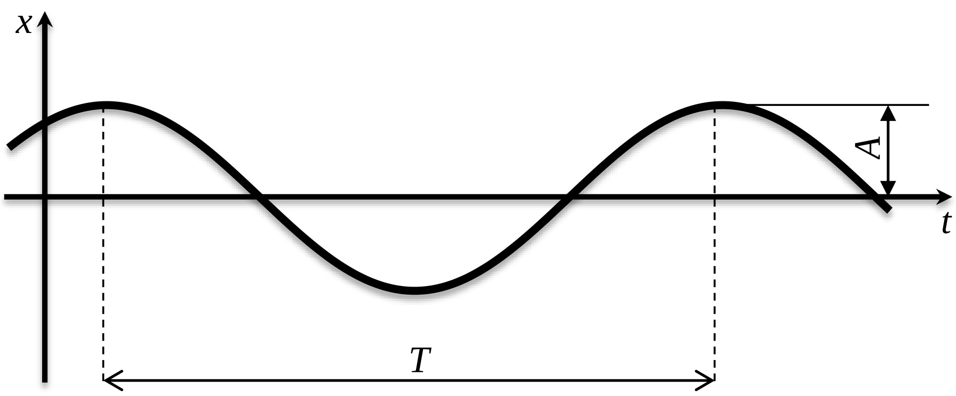


Рисунок 5.3 – Графік точки М

Час за який відбувається одне повне коливання, називається періодом коливань.

Величина зворотна періоду називається частотою коливань, вона дорівнює кількості коливань за одиницю часу $[1c]$.

В системі одиниць СІ частота вимірюється в Герцах.

$$f = \frac{1}{T},\;\; f = \frac{k}{2\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \tag{5.14}$$

де k – колова або циклічна частота гармонічних коливань.

Колова частота – це кількість повних коливань за 2π секунд. Колова частота визначається за формулою:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Колова частота вимірюється в $\left[\frac{\text{рад}}{c}\right], \left[\frac{1}{c}\right]$ або $[\text{с}^{-1}]$.

Знайдемо формули для визначення амплітуди та початкові фази, для чого використаємо залежності $c_1 = A\sin\alpha$ та $c_2 = A\cos\alpha$. Враховуючи, що $c_1 = x_0$ і $\text{c}_2 = \frac{V_0}{k}$ можемо записати

$$x_0 = A\sin\alpha\,;$$
$$\frac{V_0}{k} = A\cos\alpha, \tag{5.15}$$

Ліві та праві частини рівнянь (5.15) піднесемо до квадрату

$$x_0^2 = A^2\sin^2\alpha\,;$$
$$\frac{V_0^2}{k^2} = A^2\cos^2\alpha, \tag{5.16}$$

Якщо вирази (5.16) почленно додати, то отримаємо

$$x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2} = A^2\sin^2\alpha + A^2\cos^2\alpha$$

або

$$x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2} = A^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha), \qquad (5.17)$$

Враховуючи, що $\sin\alpha + \cos^2\alpha = 1$ рівняння (5.17) приймає вид:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2},$$

або

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \qquad (5.18)$$

Поділимо перше рівняння залежностей (5.15) на друге, в результаті отримаємо що:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x_0 k}{V_0},$$

або

$$\alpha = arctg\frac{x_0 k}{V_0}, \qquad (5.19)$$

Як видно з рівнянь (5.18) та (5.19) амплітуда та початкова фаза гармонічних коливань залежать від початкових умов, в той же час, період та частота від початкових умов не залежать.

Розглянемо приклад.

Пружина AB закріплена одним кінцем в точці A. Для її подовження на 0,01 м треба прикласти в точці B при статичному навантаженні силу, яка дорівнює 0,2 Н.

В деякий момент до нижнього кінця недеформованої пружини підвішують гирю вагою $P = 1$ н і відпускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, написати рівняння дальшого руху гирі і визначити амплітуду та період її коливань; віднести рух гирі до осі, проведеної вертикально вниз з положення статичної рівноваги гирі.

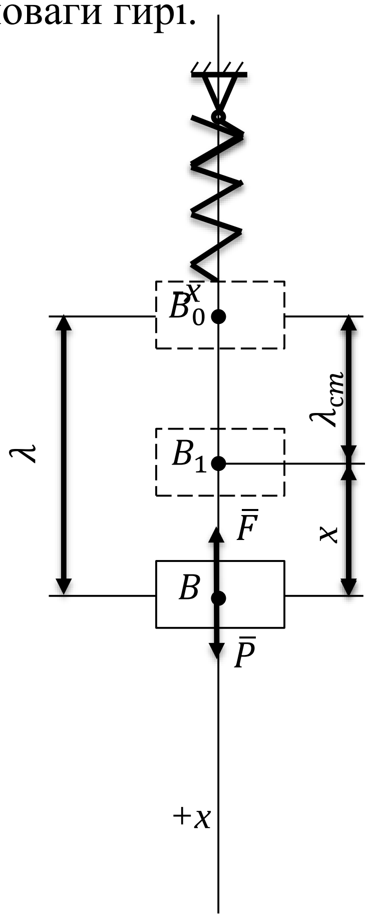


Рисунок 5.4 – Розрахункова схема

Розв’язання.

Розглянемо гирю, як матеріальну точку. Вибираємо за початок осі точку B_1, де знаходиться центр ваги гирі при її статичній рівновазі, і напрямляємо вісь x по вертикалі вниз (рисунок 5.4). Позначимо через λ_{cm} подовження пружини в положенні B_1 статичної рівноваги гирі через x – переміщення гирі від цього положення. Тоді загальне положення пружини в довільному положенні B гирі при її русі буде:

$$\lambda = \lambda_{cm} + x.$$

Оскільки сила пружності $\bar{F}$ пружини пропорціональна її загальному подовженню, то величина цієї сили становитиме:

$$F = c\lambda = c(\lambda_{cm} + x)$$

де с – коефіцієнт жорсткості пружини $c = 20\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Напрямлена сила пружності пружини завжди проти її деформації, тому при положенні гирі в точці B, коли λ додатне, сила пружності спрямована вгору, а проекція її на вісь x буде від'ємною. На гирю діють сила ваги $\bar{P}$ та сила $\bar{\mathrm{F}}$ пружності пружини.

Складаємо диференціальне рівняння руху гирі по осі x, для чого використовуємо основний закон динаміки.

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k, \tag{5.20}$$

Спроектуємо векторне рівняння (5.20) на вісь x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \tag{5.21}$$

де $\sum F_{kx}$ – сума проекцій всіх сил на вісь x.

$$\sum F_{kx} = -F + P, \tag{5.22}$$

Підставляємо вираз (5.22) у праву частину рівняння (5.21)

$$m\ddot{x} = P - F,$$

або

$$m\ddot{x} = P - c(\lambda_{cm} + x), \tag{5.23}$$

Враховуючи, що в положенні статичної рівноваги гирі $P = F_{cm}$, а F_{cm} в свою чергу дорівнює $c\lambda_{cm}$, рівняння приймає вид:

$$m\ddot{x} = -cx, \tag{5.24}$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (5.24) на m.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \text{ або } \ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{5.25}$$

де $k^2 = \frac{c}{m}$

Рівняння (5.25) – це диференціальне рівняння гармонічних коливань, його загальний розв'язок має вигляд:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \tag{5.26}$$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування, які знаходяться з початкових умов.

Початкові умови мають наступний вигляд: при $t = 0 \begin{cases} x_0 = \lambda_{cm}; \\ \dot{x}_0 = 0. \end{cases}$

Щоб ці умови використати, знаходимо також загальний вираз швидкості:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt, \tag{5.27}$$

Підставляючи початкові дані в рівняння (5.26) та (5.27) знаходимо:

$$c_1 = x_0 = -\lambda_{cm}; \;\; c_2 = \dot{x}_0 = 0.$$

Таким чином розв'язання диференціального рівняння (5.25) остаточно буде мати вигляд:

$$x = -\lambda_{cm} \cos kt, \tag{5.28}$$

де $\lambda_{cm} = \frac{P}{c} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ м;

$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{20 \times 9{,}8}{1}} = 14\ c^{-1}$

Визначаємо амплітуду та період коливань:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}} = 0{,}05 \text{ м}; \;\; T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}45 \text{ с}.$$

5.2 Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянемо загальну схему прямолінійного руху точки M під дією відновлюючої сили $\bar{F}$ та сили опору середовища $\bar{R}$ (рисунок 5.5). В загальному випадку опір середовища залежить від багатьох факторів, основним з яких є швидкість руху. Припустимо, що сила опору середовища пропорційна першому степеню швидкості:

$$\bar{R} = -\mu\bar{V} \,, \tag{5.29}$$

Від'ємний знак свідчить про те, що сила опору спрямована у протилежний бік швидкості руху.

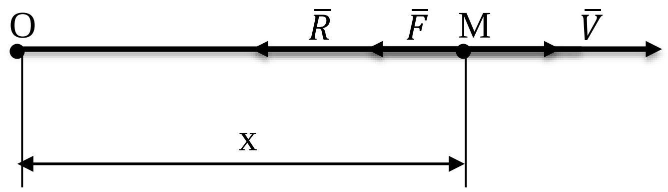


Рисунок 5.5 – Згасаючі коливання

Початкові умови руху у загальному випадку мають наступний вигляд:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0. \end{cases}$$

Складемо диференціальне рівняння згасаючих коливань, для чого використовуємо основний закон динаміки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k, \tag{5.30}$$

Спроектуємо векторне рівняння (5.30) на вісь x.

$$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \tag{5.31}$$

де $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}$ – сума проекцій всіх діючих сил на вісь x.

$$\sum F_{kx} = -R_x - F_x = -\mu\dot{x} - cx, \qquad (5.32)$$

З кінематики відомо, що $a_x = \ddot{x}$, тоді з врахуванням виразу (5.32) рівняння (5.31) приймає вид:

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x} - cx, \qquad (5.33)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (5.33) на масу m:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{m}\dot{x} - \frac{c}{m}x,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0, \qquad (5.34)$$

Введемо позначення:

$$\frac{\mu}{m} = 2b, \qquad b = \frac{\mu}{2m}, \qquad \frac{c}{m} = k^2,$$

тоді

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad (5.35)$$

де b − коефіцієнт згасання,

k − колова частота.

Підставимо позначення (5.35) в рівняння (5.34) і в результаті отримаємо наступне рівняння:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + kx = 0, \qquad (5.36)$$

Рівняння (5.36) являє собою однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Для розв’язання диференціального рівняння необхідно скласти характеристичне рівняння. У нашому випадку це квадратне рівняння виду:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0, \qquad (5.37)$$

Розв’яжемо характеристичне рівняння (5.37). Його розв’язок має вид:

$$n_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2} \quad \text{та} \quad n_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}, \qquad (5.38)$$

В залежності від конкретних умов можливі три випадки:

перший випадок:

n_1 і n_2 комплексні числа, це можливо при умові, що $b < k$, тобто опір малий порівняно з відновлювальною силою.

другий випадок:

n_1 і n_2 дійсні і різні між собою числа $(n_1 \neq n_2)$, це можливо при $b > k$, тобто опір більший порівняно з відновлювальною силою.

третій випадок:

n_1 і n_2 дійсні і рівні числа $(n_1 \neq n_2)$, це буває у тому випадку, коли сила опору дорівнює відновлювальній силі.

Розглянемо кожний випадок окремо.

Перший випадок, корні характеристичного рівняння комплексні. Тоді загальний розв’язок диференціального рівняння (5.36) набуває вигляду:

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t), \qquad (5.39)$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$,

c_1 i c_2 – сталі інтегрування.

Другий випадок – корні характеристичного рівняння дійсні і різні. Загальний розв'язок диференціального рівняння (5.36) має вид:

$$y = c_1 e^{n_1 t} + c_2 e^{n_2 t}\,, \tag{5.40}$$

З врахуванням виразів (5.37) рівняння (5.39) набуває виду:

$$y = c_1 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-k^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-k^2}\right)t}\,, \tag{5.41}$$

Для спрощення виразу (5.40) можна ввести позначення $r = \sqrt{b^2 - k^2}$ і тоді загальний розв'язок рівняння (5.36) буде мати вид:

$$y = c_1 e^{(-b+r)t} + c_2 e^{(-b-r)t}\,, \tag{5.42}$$

Третій випадок – корні характеристичного рівняння дійсні і рівні. Загальний розв'язок рівняння (5.36) має вид:

$$x = e^{-bt}(c_1 + c_2 t), \tag{5.43}$$

З фізичної точки зору перший випадок розв'язання диференціального рівняння (5.36), вираз (5.43) є математичним описом згасаючих коливань, у загальному вигляді. Для визначення сталих інтегрування використовуємо початкові умови.

Підставимо $t = 0$ та $x = x_0$ в рівняння (5.38):

$$x_0 = e^{-b\times 0}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = c_1$$

Ми визначили, що $c_1 = x_0$. Для визначення сталої інтегрування c_2 необхідно знайти похідну за часом від рівняння (5.38)

$$\dot{x} = be^{-bt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) +$$
$$+e^{-bt}(-c_1 k_1 \sin k_1 t + c_2 k_1 \cos k_1 t), \qquad (5.44)$$

Підставимо в вираз (5.43) $t = 0$ та $\dot{x} = \dot{x}_0 = V_0$.

Отримаємо:

$$V_0 = -be^{-b0}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^{-b0}(-c_1 k_1 \sin 0 + c_2 k_1 \cos 0);$$

$$V_0 = -bc_1 + c_2 k_1;$$
$$c_2 = \frac{V_0 + bc_1}{k_1}, \qquad (5.45)$$

Враховуючи, що $c_1 = x_0$ вираз (5.44) набуває вигляду:

$$c_2 = \frac{V_0 + bx_0}{k_1}, \qquad (5.46)$$

Після підстановки сталих інтегрування c_1 та c_2 у рівняння (5.38) отримаємо з**акон згасаючих коливань** у остаточному вигляді:

$$x = e^{-bt}\left(x_0 \cos k_1 t + \frac{V_0 + bx_0}{k_1} \sin k_1 t\right), \qquad (5.47)$$

Якщо ввести сталі a і α, такі, що $c_1 = a \sin \alpha$ та $c_2 = a \cos \alpha$, то рівняння (5.38) набуває виду:

$$x = ae^{-bt}(\sin \alpha \cos k_1 t + \cos \alpha \sin k_1 t) = ae^{-bt}(\sin k_1 t + \alpha), \qquad (5.48)$$

Підставимо c_1 і c_2 у введені сталі і в результаті отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a \sin \alpha \\ \frac{V_0 + bx_0}{k_1} &= a \cos \alpha \end{aligned}\right\}, \qquad (5.49)$$

Величини a і α визначається з рівнянь (5.48), для чого піднесемо обидва рівняння до квадрату:

$$\left.\begin{aligned} x_0^2 = a^2 \sin^2 \alpha \\ \frac{(V_0+bx_0)^2}{k_1^2} = a^2 \cos^2 \alpha \end{aligned}\right\}, \tag{5.50}$$

Додамо ліві та праві частини першого та другого рівнянь виразу (5.49).

$$x_0^2 + \frac{(V_0 + bx_0)^2}{k_1^2} = a^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha);$$

або

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0+bx_0)^2}{k_1^2}}, \tag{5.51}$$

Якщо поділити перше рівняння на друге в системі (5.48), то отримаємо:

$$g\ \alpha = \frac{x_0 k_1}{V_0 + bx_0};$$

або

$$\alpha = arctg\ \frac{x_0 k_1}{V_0+bx_0}, \tag{5.52}$$

Коливання, які відбуваються за законом $x = ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha)$ називається згасальними, так як завдяки множнику e^{-bt} амплітуда з часом зменшується, наближаючись до нуля.

Графік згасаючих коливань наведений на рисунку 5.6, де він розташований між пунктирними кривими: $x_1 = ae^{-bt}$, $x_2 = -ae^{-bt}$.

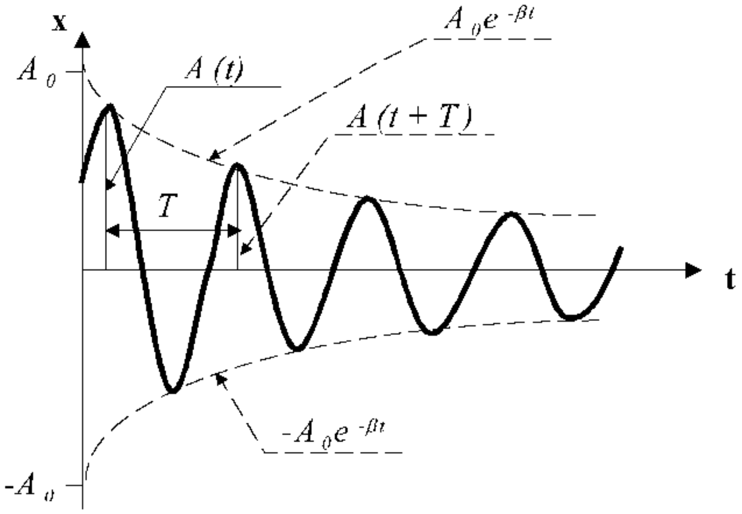


Рисунок 5.6 – Графік згасаючих коливань

Проміжок часу Т, який дорівнює періоду функції $\sin(k_1 t + \alpha)$, називають **періодом згасаючих коливань**.

$$T = \frac{2\pi}{k_1}, \qquad (5.53)$$

де $k_1 -$ колова частота згасаючих коливань,

$\alpha -$ початкова фаза коливань.

Амплітуда згасаючих коливань з кожним розмахом зменшується. Відношення амплітуд двох розмахів – наступного до попереднього називається **декрементом згасаючих коливань**.

$$q = e^{-\frac{bt}{2}}, \qquad (5.54)$$

Величина $\ln q = -\frac{bt}{2}$ називається **логарифмічним декрементом згасаючих коливань.**

Якщо опір середовища буде настільки суттєвим, що $b > k$ або $b = k$ (другий та третій випадки розв'язку диференціального рівняння(5.36)) то коливань точки не буде, а рух буде мати аперіодичний характер.

Розглянемо наступний приклад.

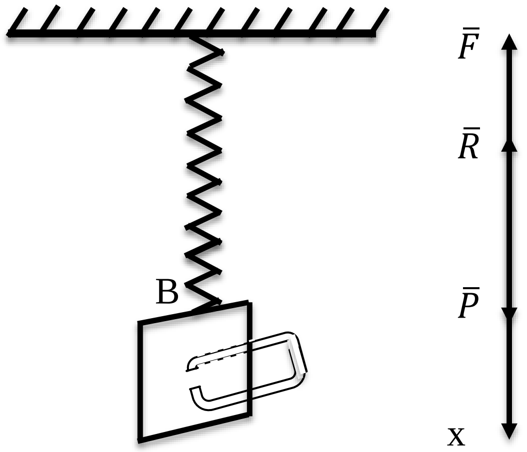


Рисунок 5.7 – Розрахункова схема

Розв’язання.

Початок координат візьмемо в положенні статичної рівноваги точки В і направимо вісь х вертикально вниз (рисунок 5.7). На пластинку діють сила $\bar{P}$ ваги сила опору $\bar{R}$, напрямлена в бік, протилежний рухові пластинки, і сила $\bar{F}$ пружності пружини, напрямлена до зрівноваженого положення кінця пружини тобто до точки В.

Пластинка D вагою 1 н підвішена на пружній пружині AB в нерухомій точці А, рухається між полюсами магніту. Внаслідок вихрових струмів рух гальмується силою, пропорціональною швидкості. Сила опору руху дорівнює μV (де $\mu = 0{,}51\frac{\text{сн}}{\text{м}}$, V – швидкість у $\frac{\text{м}}{\text{с}}$)

В початковий момент швидкість пластинки дорівнює нулю і пружина не розтягнута; подовження її на 0,01м виникає при статичній дії сили в 0,2Н. Знайти закон руху пластинки.

Нехай в даний момент пластинка, яка знаходиться на віддалі x від початку координат, рухається від зрівноваженого положення вниз. Тоді сила пружності пружини $\bar{F}$ і сила опору $\bar{R}$ будуть напрямлені вгору.

На підставі основного закону динаміки складаємо диференціальне рівняння руху пластинки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} F_k, \tag{5.55}$$

Спроектуємо на вісь x векторне рівняння (5.55):

$$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \tag{5.56}$$

Знайдемо суму проекцій всіх сил на вісь x:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = P - R - F - F_{\text{ст}}, \tag{5.57}$$

де P – величина сили ваги,
R – величина сили опору,
$F_{\text{ст}}$ – величина сили пружності статична,
F – величина сили пружності динамічна.

Визначимо кожну з діючих сил.

Сила ваги: $P = mg$.

Сила пружності статична:

$$F_{\text{ст}} = \lambda_{\text{ст}} \times c_1\ , \tag{5.58}$$

де $\lambda_{\text{ст}}$ – статична деформація пружини, тобто деформація, яка виникає під дією сили ваги,
c – жорсткість пружини.

Сила ваги та сила пружності статична врівноважують друг друга, тобто $\bar{P} = \bar{F}_{\text{ст}}$ і тому їх можна не враховувати при складанні диференціального рівняння.

Сила опору визначається за формулою:

$$R = \mu V = \mu\dot{x}, \tag{5.59}$$

де μ – коефіцієнт пропорційності $\mu = 0{,}51\ \frac{\text{с}\times\text{Н}}{\text{м}}$.

Сила пружності динамічна пропорційна деформації пружини і визначається з залежності:

$$F = cx\,, \tag{5.60}$$

де с – жорсткість пружини, $c = 20\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Підставимо формули (5.59) та (5.60) у вираз (5.57).

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -\mu\dot{x} - cx\,, \tag{5.61}$$

Враховуючи, що $a_x = \ddot{x}$, а також вираз (5.61) після перетворень отримаємо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0, \tag{5.62}$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (5.62) на масу m і одержимо рівняння:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0\,, \tag{5.63}$$

Введемо позначення: $2b = \frac{\mu}{m}$ та $k^2 = \frac{c}{m}$. Тоді рівняння згасаючих коливань матиме вигляд:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0\,, \tag{5.64}$$

Для розв’язання цього диференціального рівняння складемо характеристичне рівняння:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0, \tag{5.65}$$

З метою визначення коренів цього рівняння необхідно обчислити величини b і k.

Коефіцієнт опору:

$$b = \frac{\mu}{2m} = \frac{\mu g}{2P} = \frac{0{,}51 \times 10}{2 \times 1} = 2{,}55\ c^{-1}$$

Колова частота коливань пружини:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{gc}{P}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 20}{1}} = 14\ c^{-1}$$

Розв'язуємо характеристичне рівняння $n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2} = -2{,}55 \pm \sqrt{2{,}55^2 - 14^2} = -2{,}55 \pm$ і 13,77

Через те що корені характеристичного рівняння комплексні, то розв'язання диференціального рівняння матиме такий вигляд:

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t), \tag{5.66}$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$.

Сталі інтегрування визначаються за початковими умовами.

За вихідними даними початкова швидкість $V_0 = 0$ м/с. Для визначення положення точки B в початковий момент часу розглянемо залежність

$$\lambda = \lambda_{\text{ст}} + x, \tag{5.67}$$

де $\lambda -$ загальна деформація пружини;

$\lambda_{\text{ст}} -$ статична деформація пружини;

$x -$ динамічна деформація пружини.

В початковий момент часу $t = 0$ рівняння (5.67) приймає вид

$$\lambda_0 = \lambda_{\text{ст}} + x_0, \tag{5.68}$$

Враховуючи, що $\lambda_0 = 0$ залежність (5.68) можна записати наступним чином $x_0 = -\lambda_{\text{ст.}}$;

Статичну деформацію пружини $\lambda_{\text{ст}}$ визначимо з виразу:

$$P = F_{\text{ст}} \quad \text{або} \quad mg = \lambda_{\text{ст}} \times c\,, \tag{5.69}$$

З залежності (5.69) знаходимо $\lambda_{\text{ст}}$

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{c} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ м.}$$

Таким чином $x_0 = -0{,}05$ м.

Підставимо початкові умови в рівняння (5.66)

$$x_0 = e^{-b0}(c_1 \cos k_1 0 + c_2 \sin k_1 0)$$

Звідки $c_1 = x_0 = 0{,}05$ м.

Для знаходження c_2 необхідно продиференціювати за часом рівняння, і в отриманий вираз підставити початкові умови.

$$\dot{x} = -be^{-bt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) + e^{-bt}(-c_1 k_1 \sin k_1 t + c_2 k_1 \cos k_1 t)$$

$$V_0 = -be^{-b0}(c_1 \cos k_1 0 + c_2 \sin k_1 0) + e^{-b0}(-c_1 \sin k_1 0 + c_2 k_1 \cos k_1 0)$$

$$V_0 = -bc_1 + c_2 k_1 => c_2 = \frac{V_0 + bc_1}{k_1}$$

Після підстановки даних отримаємо, що

$$c_2 = \frac{0 + 2{,}55 \times 0{,}05}{13{,}77} = 0{,}009 \text{ м}$$

Таким чином закон руху точки B і разом з тим пластинки буде мати такий вигляд:

$$x = e^{-2{,}55t}(0{,}05 \cos 13{,}77t + 0{,}09 \sin 13{,}77t),$$

5.3 Змушені коливання без врахування сил опору середовища

Коливальний рух точки М називається змушеним, коли на неї, крім відновлювальної сили $\bar{F}$ діє ще збурювальна сила $\bar{Q}$.

$$Q = Q_0 \sin pt, \tag{5.70}$$

де Q_0 − максимальне значення збурювальної сили, $[H]$;

p − колова частота збурювальної сили $\left[\frac{\text{рад}}{c}\right]$;

t − час $[c]$.

Розглянемо рух матеріальної точки масою m, на яку діють дві сили відновлювальна $F = cx$ та збурювальна $Q = Q_0 \sin pt$ (рисунок 5.8)

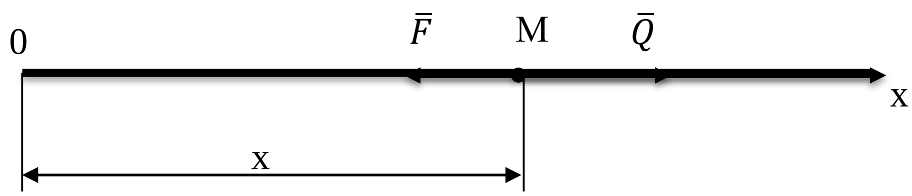


Рисунок 5.8 – Рух матеріальної точки

Складемо диференціальне рівняння змушених коливань, для чого використовуємо основний закон динаміки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k, \tag{5.71}$$

Спроектуємо векторне рівняння (1.5.68) на вісь x:

$$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \tag{5.72}$$

Визначаємо суму проекцій всіх сил на вісь x

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = Q - F = Q_0 \sin pt - cx, \tag{5.73}$$

Враховуючи, що $a_x = \ddot{x}$, а також вираз (5.73) отримаємо диференціальне рівняння

$$m\ddot{x} = Q_0 \sin pt - cx, \tag{5.74}$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння 5.74 на m

$$\ddot{x} = \frac{Q_0}{m}\sin pt - \frac{c}{m}x\,, \tag{5.75}$$

Введемо позначення

$$\frac{c}{m} = k^2 \quad , \; \frac{Q_0}{m} = p_0\,, \tag{5.76}$$

де p_0 − стала, одиниця виміру якої $\left[\frac{\text{м}}{c^2}\right]$.

Після перетворень та введених позначень отримуємо диференціальне рівняння змушених коливань у остаточному вигляді:

$$\ddot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt, \tag{5.77}$$

Рівняння (5.77) – це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, його розв’язок має вид:

$$x = x_1 + x_2, \tag{5.78}$$

де x_1 - загальне розв’язання однорідного диференційного рівняння $\ddot{x} + k^2 = 0$;

x_2 − частичний розв′язок неоднорідного рівняння (5.77)

Загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд

$$x = A\sin\,(kt + \alpha), \tag{5.79}$$

де A − амплітуда гармонічних коливань;

α − початкова фаза гармонічних коливань.

Формули для визначення амплітуди та початкової фази гармонічних коливань були отримані раніше, вони мають наступний вигляд:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{R^2}}\ , \tag{5.80}$$

Частинний розв’язок рівняння (5.77) шукаємо у вигляді:

$$x_2 = B\sin pt, \tag{5.81}$$

де $B -$ стала величина.

Вважаємо, що $p \neq k$.

Визначимо B, для чого двічі продиференцюємо x_2

$$\dot{x_2} = Bp\cos pt, \tag{5.82}$$

$$\ddot{x_2} = -Bp^2\sin pt, \tag{5.83}$$

Підставимо x_2 та $\ddot{x}_2$ в рівняння (5.77)

$$-Bp^2\sin(pt) + k^2B\sin(pt) = P_0\sin(pt), \tag{5.84}$$

Згрупуємо члени рівняння (5.84) наступним чином:

$$B(k^2 - p^2)\sin pt = p_0\sin pt, \tag{5.85}$$

Прирівняємо коефіцієнти при синусах, вони повинні бути однакові.

$$B(k^2 - p^2) = p_0\ , \tag{5.86}$$

Звідки B визначиться з виразу

$$B = \frac{P_0}{k^2 - p^2}\,, \tag{5.87}$$

Тоді частинний розв'язок рівняння (5.77) буде мати вигляд:

$$x_2 = \frac{p_0}{k^2 - p^2} \sin pt, \qquad (5,88)$$

Загальний розв'язок рівняння (5.77) буде мати вид:

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt, \qquad (5.89)$$

де A $і$ $\alpha -$ сталі інтегрування визначаються з допомогою початкових умов.

Вираз (5.89) показує, що коливання точки складаються з двох частин:

– коливань з амплітудой А (яка залежить від початкових умов і частотой k);

– коливань з амплітудой В (яка не залежить від початкових умов та частотой р).

Перший тип коливань – це власні коливання, другий тип – вимушені коливання.

Таким чином точка здійснює складний рух, який є результатом накладання двох коливань вимушених та власних.

Резонанс при відсутності опорів настає тоді, коли частота р змушених коливань або (що теж саме) частота збурювальної сили дорівнює частоті k вимушених коливань $p = k \left(\text{або} \frac{p}{k} = 1\right)$.

Амплітуди змушених коливань з часом необмежно зростають і можуть досягати недопустимо великих, небезпечних для механічної системи значень.

Розглянемо наступний приклад.

Кінець пружини D, який з'єднано з кулісним механізмом, що приводиться в дію кривошипом ОЕ, здійснює гармонічні коливання по вертикальній прямій з амплітудою R та кутовою швидкістю ω за законом

$$x_E = R\sin\omega t \;\; (x_E\ і\ R - \text{в м}; t - c).$$

До другого кінця пружини підвішений тягар М вагою $P = 4\ H$. Визначити рух тягаря М відносно куліси, якщо під дією сили 0,4 Н пружина подовжується на 0,01 м;

$$OE = R = 0{,}02\ \text{м};\ \omega = 7\ c^{-1}$$

Розв'язання.

Рух тягаря М поступальний, тому достатньо дослідити рух однієї його точки – центра ваги В, вважаючи, що в ній зосереджена вся маса тягаря.

Візьмемо початок нерухомої системи координат в точці О (центрі обертання кривошипа ОЕ) та напрямимо нерухому вісь x вертикально вниз зв'яжемо з кулісою рухому систему координат, початок якої візьмемо в точці O_r перетину осей симетрії куліси, і напрямимо рухому вісь x_r також вертикально вниз.

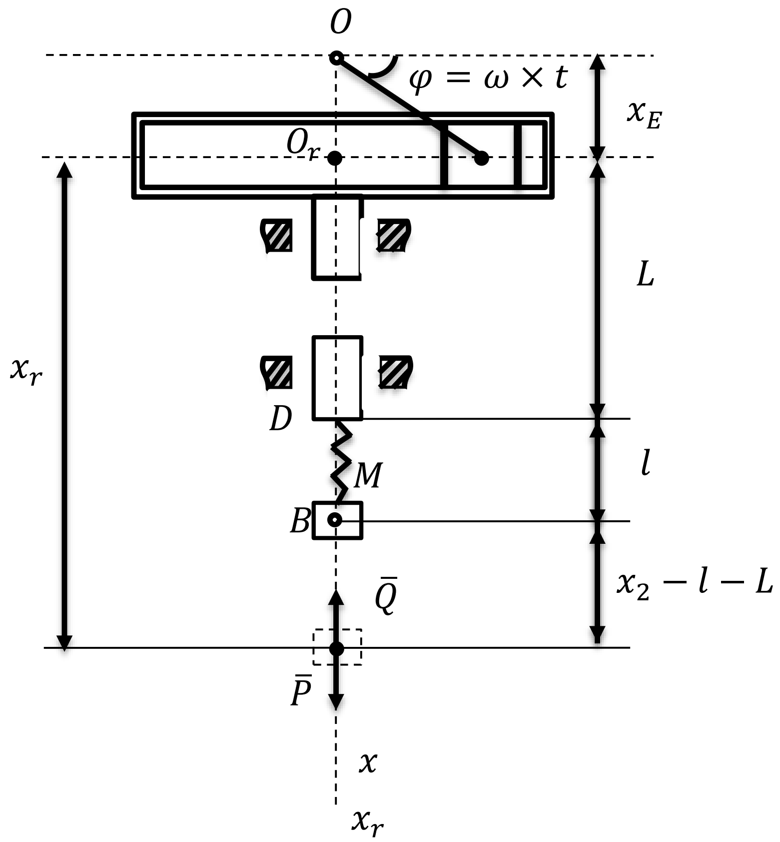


Рисунок 5.9 – Розрахункова схема

Абсолютний рух точки B складається з її руху відносно рухомої осі x_r, тобто відносно куліси (відносний рух) та руху разом з початком 0_r цієї осі, тобто з кулісою (переносний рух). Відзначимо, що довжина пружини в ненапруженому стані - l_0, статична деформація пружини під дією ваги тягаря – f_{cm} та стала довжина $L = DO_r$ не змінюється при роботі механізму. Тому абсолютне переміщення точки В залежить лише від її переносного та відносного переміщень.

Переносне переміщення тягаря x_e дорівнює переміщенню куліси x_E тому:

$$x_e = x_E = R\sin\omega t$$

Відносне переміщення, яке невідомо, назначимо через x_r. Абсолютне переміщення тягаря дорівнює сумі його переносного та відносного переміщень:

$$x = x_e + x_r, \tag{5.90}$$

Для того щоб знайти відносне переміщення x_r, можна скористатися двома способами.

Перший полягає в тому, що ми складаємо диференціальне рівняння абсолютного руху точки B і, розв'язавши його, знаходимо відносний рух. Потім визначимо відносний рух точки В як різницю між її абсолютним та переносним рухами, які будуть відомі. Саме за цим способом і будемо розв'язувати задачу

Другий спосіб полягає в складанні і розв'язанні диференціального рівняння відносного руху В.

Отже, складемо диференціальне рівняння абсолютного руху тягаря, розглядаючи його як точку.

На тягар діють дві сили: сила ваги $\bar{P}$ та сила пружності пружини $\bar{Q}$. Тому рівняння руху в векторній формі буде:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k, \tag{5.91}$$

Проєктуючи вектори, що входять в рівняння (5.91) на нерухому вісь x, одержимо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} = P - Q\ , \tag{5.92}$$

Величина сили пружності пропорціональна загальній деформації пружини, враховуючи статичну деформацію f_{cm} під дією ваги тягаря і деформацію внаслідок його нерівномірного руху; остання деформація є відносним переміщенням тягаря в його русі відносно куліси, тобто x_r. Тому:

$$Q = c(f_{cm} + x_r)\ , \tag{5.93}$$

де c — коефіцієнт жорсткості пружини.

З врахуванням виразу (5.93) рівняння (5.92) приймає вид:

$$m\ddot{x} = P - c(f_{cm} + x_r), \tag{5.94}$$

Але відносне переміщення $x_r = x - x_e$, а переносне $x_e = R \times \sin \omega t$, тоді:

$$m\ddot{x} = P - c(f_{cm} + x - R \times \sin \omega t), \tag{5.95}$$

Враховуючи, що $P = cf_{cm}$, одержумо рівняння:

$$m\ddot{x} + cx = cR \times \sin \omega t, \tag{5.96}$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (5.96) на m

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{c}{m}\ R \times \sin \omega t, \tag{5.97}$$

Введемо позначення $k^2 = \frac{c}{m}$

$$\ddot{x} + k^2x = k^2R \times \sin \omega t, \tag{5,98}$$

Позначимо $k^2R = P_0$. Це стала, яка має розмірність прискорення. Тоді рівняння (5.98) приймає вигляд:

$$\ddot{x} + k^2 = P_0 \sin \omega t, \tag{5.99}$$

Рівняння (5.99) це є диференціальне рівняння змушених коливань.

Розв'язання цього рівняння складається з двох частин:

$$x = x_1 + x_2, \tag{5.100}$$

де x_1 – являє собою гармонічні коливання тягаря на пружині;

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда гармонічних коливань;

α – початкова фаза гармонічних коливань.

Амплітуда та початкова фаза гармонічних коливань визначаються з початкових умов його руху. Оскільки останні з умови задачі невідомі, то ж можна визначити A $і$ α.

Розглянемо другу складову виразу (5.100) x_2, яка являє собою змушені коливання. Амплітуда цих коливань визначається за формулою:

$$B = \frac{P_0}{k^2 - \omega^2}, \tag{5.101}$$

Після підстановки даних у вираз (5.101) отримаємо, що амплітуда змушених коливань дорівнює 0,04 м.

Таким чином рівняння змушених коливань в його абсолютному русі буде мати вигляд:

$$x_2 = 0{,}04 \sin 7t, \tag{5.102}$$

Щоб знайти рівняння відносного руху тягоря відносно куліси необхідно з рівняння абсолютного руху $x = x_1 + x_2$ відняти рівняння переносного руху $x_e = R \sin \omega t$

$$x_r = x - x_e = x_1 + x_2 - x_e;$$
$$x_r = A\sin\omega t + B\sin\omega t - R\sin\omega t =$$
$$= A\sin(kt + \alpha) + 0{,}02\sin 7t\ , \tag{5.103}$$

Це і є рівняння відносного руху тягаря. Воно складається з власних та змушених коливань у відносному русі.

5.4 Змушені коливання з врахуванням сили опору типу в’язкого тертя

Розглянемо рух точки, на яку діють відновлювальна сила $\bar{F}$, сила опору $\bar{R}$ та збурювальна гармонічна сила Q (рисунок 5.10).

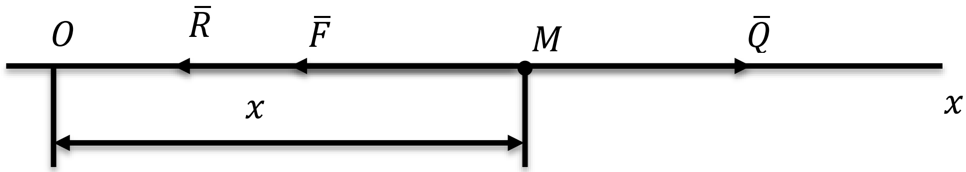


Рисунок 5.10 – Розрахункова схема

Складемо диференціальне рівняння руху точки М для чого використовуємо основний закон динаміки:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k\ , \tag{5.104}$$

Спроєктуємо векторне рівняння (5.104) на вісь x:

$$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \tag{5.105}$$

Сума проекцій всіх сил на вісь x дорівнює:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = Q - F - R, \tag{5.106}$$

В свою чергу

$$a_x = \ddot{x}\ , \tag{5.107}$$

Підставимо вирази (5.106) та (5.107) в рівняння (5.105) і отримаємо диференціальне рівняння виду:

$$m\ddot{x} = Q - F - R, \tag{5.108}$$

Визначимо сили, які діють на матеріальну точку М.

Збурювальна гармонічна сила Q визначається з залежності:

$$Q = Q_0 \sin pt, \tag{5.109}$$

Відновлювальна сила F дорівнює:

$$F = -cx\ , \tag{5.110}$$

Сила опору пропорційна швидкості $\bar{R} = -\mu\bar{V}$, а її проекція на вісь x дорівнює:

$$R_x = -\mu\dot{x}\ , \tag{5.111}$$

Підставимо формули (5.109,...,5.111) у праву частину рівняння (5.108):

$$m\ddot{x} = Q_0 sinpt - cx - \mu\dot{x}, \tag{5.112}$$

Поділимо рівняння (5.112) на масу точки

$$\ddot{x} = \frac{Q_0}{m}\sin pt - \frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x}\ , \tag{5.113}$$

Введемо позначення:

$$\frac{c}{m} = k^2,\ \ k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$
$$\frac{\mu}{m} = 2b,\ \ b = \frac{\mu}{2m}, \tag{5.114}$$

$$\frac{Q_0}{m} = P_0.$$

З урахуванням позначень (5.114) рівняння (5.113) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt\,, \tag{5.115}$$

Рівняння 5.115 є диференціальним рівнянням змушених коливань точки при наявності сил опору. Його загальний розв'язок має вигляд:

$$x = x_1 + x_2, \tag{5.116}$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного рівняння $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$;

x_2 – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння.

Знайдемо розв'язок однорідного диференціального рівняння $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$, для чого складаємо характеристичне рівняння, яке має вид:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0, \tag{5.117}$$

У випадку $k > b$ корні характеристичного рівняння будуть комплексними і загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння буде мати вид:

$$x_1 = e^{-bt}(c_1 \sin k_1 t + c_2 \cos k_1 t), \tag{5.118}$$

або

$$x_1 = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha), \tag{5.119}$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$

Але гармоніка x_1 досить швидко згасає, нею, як правило нехтують.

Частинний розв'язок x_2 будемо шукати у вигляді

$$x_2 = B\sin(pt - \beta), \tag{5.120}$$

де B і β – сталі, які треба підібрати таким чином щоб рівність (5.115) обернулось у тотожність.

Продиференцюємо за часом двічі вираз (5.120)

$$\dot{x} = Bp\cos(pt - \beta); \quad \ddot{x} = -Bp^2\sin(pt - \beta), \tag{5.121}$$

Підставимо вирази (5.121) та (5.120) у ліву частину рівняння (5.115).

$$-Bp^2\sin(pt - \beta) + 2bpB\cos(pt - \beta) + k^2B\sin(pt - \beta) = P_0\sin pt, \tag{5.122}$$

Позначимо

$$pt - \beta = \psi, pt = \psi + \beta \tag{5.123}$$

Підставимо позначення (5.123) у вираз (5.122).

$$-B(-p^2 + k^2)\sin\psi + 2bpb\cos\psi + k^2B\sin\psi = P_0\sin(\psi + \beta)$$

або

$$B(-p^2 + k^2)\sin\psi + 2bpB\cos\psi = P_0\,(\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi), \tag{5.124}$$

Для того, щоб вираз (5.124) був тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти при $\sin\psi$ та $\cos\psi$ ліворуч і праворуч були однакові,

Тобто

$$\left.\begin{aligned} B(k^2 - p^2) = P_0\cos\beta\,, \\ 2Bbp = P_0\sin\beta\,. \end{aligned}\right\}, \tag{5.125}$$

Поділимо друге рівняння (5.125) на перше, отримаємо:

$$tg\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}.$$

Звідки

$$\beta = arctg\,\frac{2bp}{k^2-p^2}, \tag{5.126}$$

З рівнянь (5.125) визначимо амплітуду В, для чого ці рівняння спочатку піднесемо до квадрату і потім почленно додамо

$$\left.\begin{aligned} B^2(k^2-p^2)^2 = p^2\cos^2\beta, \\ B^2b^2p^2 = P_0^2\sin^3\beta\,. \end{aligned}\right\}$$

$$B^2[(k^2-p^2)^2 + 4B^2b^2p^2] = P_0^2\cos^2\beta + P_0^2\sin^2\beta,$$

або

$$B^2[(k^2-p^2)^2 + 4b^2p^2] = P_0^2.$$

Звідки

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)+4b^2p^2}}, \tag{5.127}$$

Коливання, які відбуваються за законом $x = B\sin(pt-\beta)$ називаються **змушеними.**

Вони є незгасаючими гармонічними коливаннями з амплітудою В, яка визначається рівністю (5.127) та частотою р, яка дорівнює частоті збурювальної сили.

Куб β характеризує – кут зсуву за фазою.

Введемо позначення:

$$z = \frac{p}{k},\; h = \frac{b}{k},\; \frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0 m}{c\times m} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_{cm}, \tag{5.128}$$

де z – відношення частот;

h – коефіцієнт демпфірування;

λ_{cm} – деформація пружного елементу під дією сили Q_0;

c – коефіцієнт жорсткості пружного елементу [н/м];

b – коефіцієнт згасання;

p – колова частота збурювальної сили.

Поділимо чисельник та знаменник рівності (5.127) на k^2 отримаємо:

$$B = \frac{\frac{P_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{P^2}{k^2}\right) + \frac{4b^2p^2}{k^2}}}, \qquad (5.129)$$

З врахуванням позначень (5.128) отримаємо:

$$B = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{(1 - z^2) + 4h^2z^2}}, \qquad (5.130)$$

Як видно з виразу (5.130) амплітуда В залежить від двох параметрів Z та h.

Проаналізуємо зміну амплітуди коливань в залежності від значень частоти збурювальної сили та частоти власних коливань.

а) Якщо частота збурювальної сили значно менша, ніж частота власних коливань $p \ll k$, то амплітуда змушених коливань наближається до статичного значення, і коливання відбуваються з амплітудою, яка дорівнює статичній деформації пружного елементу.

б) Якщо $p \gg k$ (тобто частота збурювальної сили значно більша, ніж частота власних коливань), то $\mathrm{B} = \frac{\lambda_{cm}}{z^2} = \frac{P_0}{P^2}$

в) Якщо $p = k$, то частота збурювальної сили дорівнює частоті власних коливань. У цьому випадку амплітуда досягає максимальних значень. Наступає явище механічного резонансу. Максимум амплітуди залежить від коефіцієнта демпфірування.

Введемо поняття коефіцієнта динамічності $\eta = \frac{B}{\lambda_{cm}}$, який показує в скількі раз амплітуда В більше λ_{cm}.

Побудуємо графік залежності коефіцієнта динамічності від відношення частот z при різних значеннях коефіцієнта демпфірування (рисунок 5.11)

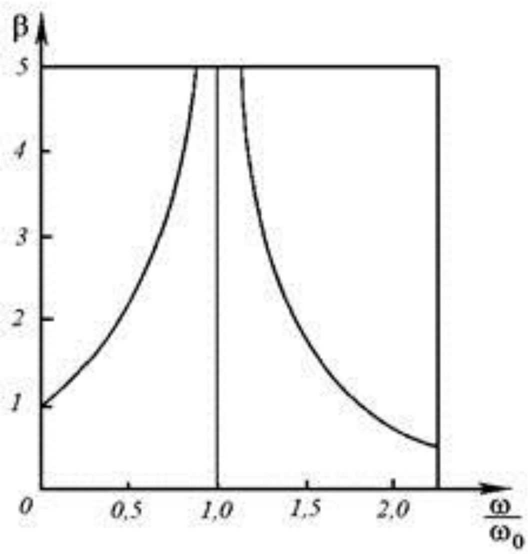


Рисунок 5.11 - Графік залежності коефіцієнта динамічності від відношення частот z

Загальні властивості змушених коливань:

1) амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов;

2) змушені коливання і при наявності сил опору не згасають;

3) частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили і від характеристик системи не залежить;

4) навіть при великих значеннях збурювальної сили можна досягти технічними засобами, щоб змушені коливання були досить малими, якщо частота збурювальної сили значно відрізняються від частоти власних коливань;

5) навіть при малій збурювальній силі можна отримати інтенсивні змушені коливання, якщо опір малий, а частота збурювальної сили наближається до частоти власних коливань (механічний резонанс).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Булгаков В.М. Інженерна механіка. (Частина 1. Теоретична механіка) / В.М. Булгаков, О.І. Литвинов, Д.Г. Войтюк ; за заг. редакцією В.М. Булгакова. Підручник – Вінниця: Нова Книга, 2006. – 504 с.

2. Булгаков В.М. Теоретична механіка. Посібник для практичних занять / В.М. Булгаков, В.В. Бурлака, В.С. Лукач, Ю.М. Дроннік, С.І. Кучеренко, Д.І. Мазоренко, Л.М. Тіщенко; за заг. редакцією С.І. Кучеренка – Ніжин: “Мілані” ПП Лисенко М.М., 2009. – 639 с.

3. Путята Т.В. Методика розв’язування задач з теоретичної механіки / Т.В. Путята, Б.Н. Фрадлін. – К.: Рад. шк., 1955. – 391 с.

4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1973. – 448с.

5. Воронков И.М. Курс теоретической механики / И.М. Ворнков. Учебник. – М.: Наука, 1965 – 596с.

6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. Учебник для втузов. – 10е изд., перераб. и дон. – М.: Высш. школа., 1986. – 416 с.

7. Лабораторний практикум з механіки матеріалів і конструкцій: навч. посіб. / Л.Ю. Бондаренко, О.О. Вершков, Г.В. Антонова; Таврійський державний агротехнологічний університет.– Мелітополь: ТДАТУ,2017. – 183с. (затверджений вченою радою ТДАТУ, протокол № 5 від 26 грудня 2017р.)

8. Прикладна механіка: навч. посіб. / Г.В. Антонова, Л.Ю. Бондаренко, О.О. Вершков; Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного. - Мелітополь: ТДАТУ імені Дмитра Моторного, 2019. – 202 с.(затверджений вченою радою ТДАТУ, протокол № 11 від «28» грудня 2019 р.)

9. Випробування елементів деталей машин: навчально – методичний посібник для виконання лабораторних робіт

(Частина 2) / Г.В. Антонова, О.Є. Мацулевич, І.В. Пихтєєва, О.В. Івженко, В.М. Щербина, А.П. Чаплінський, С.В. Галько. Рекомендовано до друку Вченою радою факультету агротехнологій та екології ТДАТУ. Протокол № 3 від 10 листопада 2020 року – Мелітополь: ТДАТУ, 2020. – 109с.

10. Механіка матеріалів і конструкцій: навч.- метод. посібник до виконання курсової роботи для студентів денної та заочної форми навчання зі спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» та 131 «Прикладна механіка». Рекомендовано до друку вченою радою механіко-технологічного факультету ТДАТУ. Протокол № 2 від 13 жовтня 2020 року – Мелітополь: ВПЦ «Люкс», 2020. – 164с. / Бондаренко Л.Ю., Чаплінський А.П., Вершков О.О., Антонова Г.В.

11. Інженерна механіка: практикум / Г.В. Антонова, О.Є. Мацулевич, О.Ю. Михайленко, І.В. Пихтєєва, О.В. Івженко, Ю.В. Холодняк, В.М. Щербина, Ю.О. Дмітрієв. Рекомендовано до друку вченою радою факультету енергетики і компютерних технологій ТДАТУ. Протокол № 9 від 26 травня 2021 року – Мелітополь: ВПЦ «Люкс», 2021. – 147 с.

Додаток А

(обов'язковий)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота №1

Вантаж *D* масою *m,* одержавши в точці *A* початкову швидкість V_o, рухається у гнутій трубі *ABC*, яка розташована у вертикальній площині; ділянки труби похилі, або одна горизонтальна, а інша похила (рисунки 0 - 9, таблиця 1).

На ділянці *AB* на вантаж крім сили ваги діють постійна сила $\overline{Q}$ (її напрямок показаний на рисунках) і сила опору середовища $\overline{R}$, яка залежить від швидкості $\overline{V}$ вантажу (спрямована проти руху); тертям вантажу об трубу на ділянці *AB* зневажити.

У точці *B* вантаж, не змінюючи швидкості, переходить на ділянку *BC* труби, де на нього крім сили ваги діють сила тертя (коефіцієнт тертя вантажу об трубу f = 0,2) і змінна сила $\overline{F}$, проекція якої F_x на вісь *x* задана в таблиці.

Вважаючи вантаж матеріальною крапкою і знаючи відстань AB = l або час t_1 руху вантажу від точки *A* до точки *B,* знайти закон руху вантажу на ділянці *BC,* тобто $x = f(t)$, де $x = BD$.

Таблиця 1 – Вихідні дані

№	m, кг	V_o,м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t, с	F_x, Н
0	2,4	12	6	$0{,}8V^2$	1,5	-	$6t$
1	4,5	18	9	$0{,}5V$	-	3	$3\sin(2t)$
2	6	14	22	$0{,}6V^2$	5	-	$-3\cos(2t)$
3	1,6	18	4	$0{,}4V$	-	2	$4\cos(4t)$
4	8	10	16	$0{,}5V^2$	4	-	$-6\sin(2t)$
5	1,8	24	5	$0{,}3V$	-	2	$9t^2$
6	4	12	12	$0{,}8V^2$	2,5	-	$-8\cos(4t)$
7	3	22	9	$0{,}5V$	-	3	$2\cos(2t)$
8	4,8	10	12	$0{,}2V^2$	4	-	$-6\sin(4t)$
9	2	20	6	$0{,}4V$	-	2,5	$2\sin(4t)$

Вказівки. Задача 1 - на інтегрування диференційних рівнянь руху точки (рішення основної задачі динаміки). Рішення задачі розбивається на дві частини. Спочатку потрібно скласти і проінтегрувати методом розділення змінних диференційне рівняння руху точки (вантажу) на ділянці *AB*, врахувавши початкові умови. Потім, знаючи час руху вантажу на ділянці *AB* або довжину цієї ділянки, визначити швидкість вантажу в точці *B*. Ця швидкість буде початковою для руху вантажу на ділянці *BC*. Після цього потрібно скласти і проінтегрувати диференційне рівняння руху вантажу на ділянці *BC* теж з врахуванням початкових умов, ведучи відлік часу від моменту, коли вантаж знаходиться в точці *B,* і приймаючи в цей момент t=0. При інтегруванні рівняння руху на ділянці *AB* у випадку, коли задана довжина l ділянки, доцільно перейти до змінної x, врахувавши, що: $\frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}$.

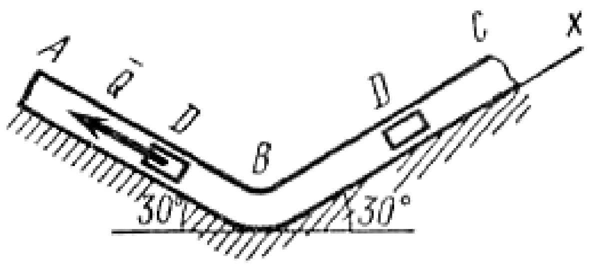


Рисунок 0

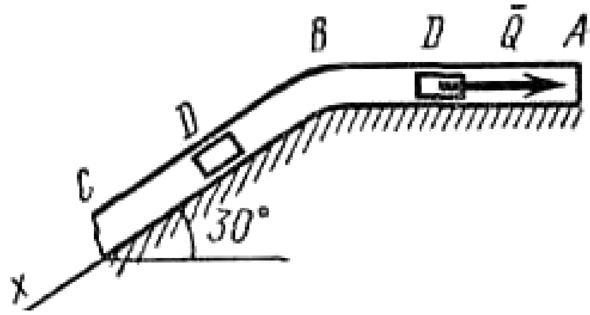


Рисунок 1

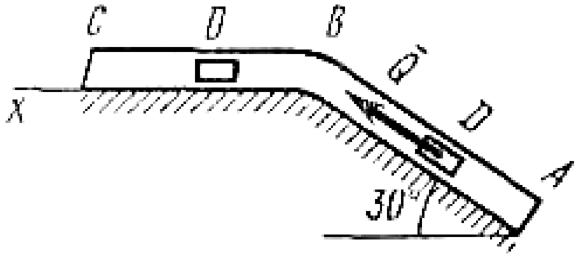


Рисунок 2

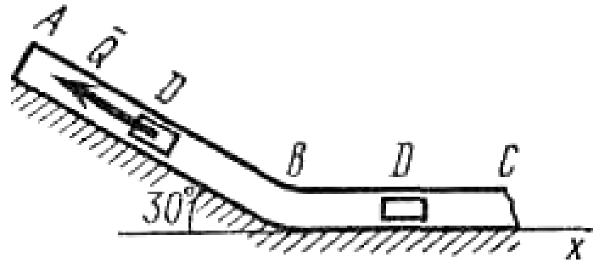


Рисунок 3

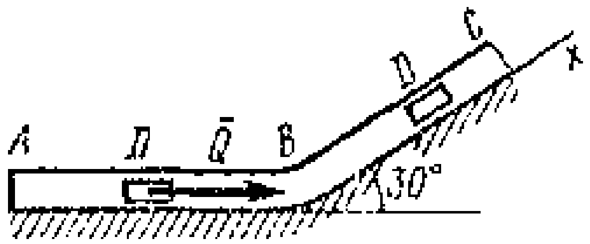


Рисунок 4

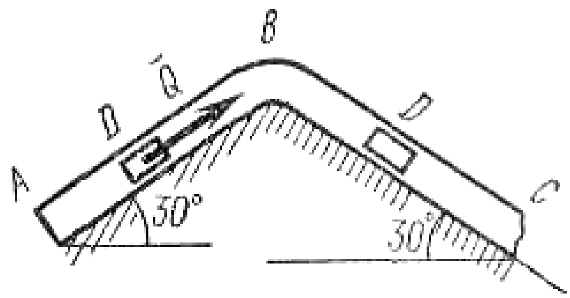


Рисунок 5

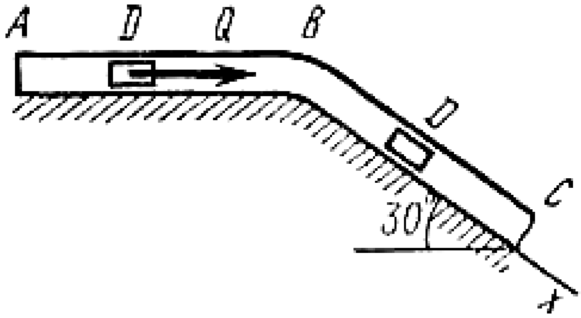


Рисунок 6

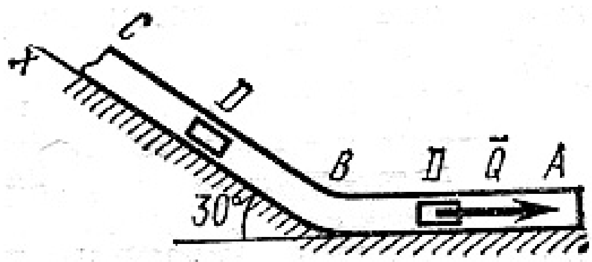


Рисунок 7

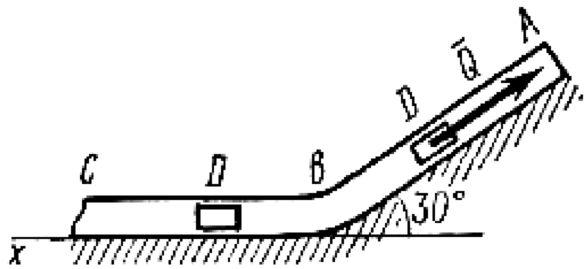


Рисунок 8

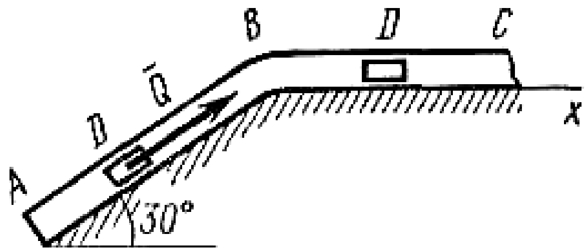


Рисунок 9

Рисунок 0 – 9 – Розрахункові схеми

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №1

Приклад 1. На вертикальній ділянці *AB* труби (рисунок 1) на вантаж *D* масою *m* діють сила ваги і сила опору $\overline{R}$; рух від точки *A*, де $V_o = 0$, до точки *B* триває t_1 с. На похилій ділянці *BC* на вантаж діють сила тертя (коефіцієнт тертя вантажу об трубу дорівнює f) і змінна сила $F = F(t)$, задана в ньютонах.

Визначити $x = f(t)$ - закон руху вантажу на ділянці BC.

Дано:
m=8 кг
$R=\mu V^2$
μ=0,2 кг/м,
V_o=0
t_1=2с
f=0,2
F_x=16sin(4t)
α=30°
$x=f(t)$ - ?

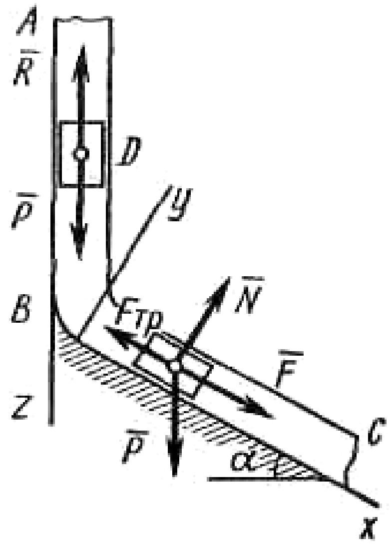


Рисунок 1

Розв'язання

1. Розглянемо рух вантажу на ділянці *AB*, вважаючи вантаж матеріальною точкою. Зображуємо вантаж (у довільному положенні) і діючі на нього сили $\overline{P} = m\overline{g}$ і $\overline{R}$. Проводимо вісь Az і складаємо диференційне рівняння руху вантажу в проекції на цю вісь:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz} \quad \text{або} \quad m\frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z. \tag{1}$$

Далі знаходимо: $P_z=mg$, $R_z=-R=-\mu V^2$; підкреслюємо, що в рівнянні всі змінні сили треба обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать.

Врахувавши, що $V_z = V$, одержимо:

$$m\frac{dV}{dt} = mg - \mu V^2 \quad \text{або} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - V^2\right). \tag{2}$$

Уведемо для скорочення записів позначення:

$$n^2 = \frac{mg}{\mu} = 400, \qquad (n = 20\text{м/с}), \tag{3}$$

де при розрахунку прийнято $g \approx 10$ м/с^2. Тоді, розділяючи в рівнянні (2) змінні і взявши потім від обох його частин інтеграли, одержимо:

$$\int \frac{dV}{n^2 - V^2} = \int \frac{\mu}{m} dt \quad => \quad \frac{1}{2n} \ln \frac{n+V}{n-V} = \frac{\mu}{m} t + C_1. \tag{4}$$

По початковим умовам при t=0: $V = V_o = 0$, визначимо: C_1 =(1/2n)$\cdot \ln$ 1=0. Увівши ще одне позначення:

$$k = n \frac{\mu}{m} = 0{,}5\text{с}^{-1}. \tag{5}$$

одержимо з (4):

$$\ln \frac{n+V}{n-V} = 2kt \quad \text{і} \quad \frac{n+V}{n-V} = e^{2kt}.$$

Звідси знаходимо, що:

$$V = n \frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}. \tag{6}$$

Підставив t=2с і змінюючи n та k їхніми значеннями (3) і (5), визначимо швидкість $V_В$ вантажу в точці B (число е=2,7):

$$V_B = 20 \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}.=15{,}2 \text{ м/с}. \tag{7}$$

2. Розглянемо рух вантажу на ділянці *BC*; знайдена швидкість $V_В$ буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($V_о = V_В$). Зображуємо вантаж (у довільному положенні) і діючі на нього сили $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{тр}$ і $\bar{F}$. Проводимо з точки B осі Bx і By і складаємо диференційне рівняння руху вантажу в проекції на вісь Bx:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{тр} + F_x \quad \text{або} \quad m\frac{dV_x}{dt} = mg\sin\alpha F_{тр} + F_x, \tag{8}$$

де $F_{тр} = fN$.

Для визначення N складемо рівняння в проекції на вісь By. Так як a_y=0, одержимо:

$0=N\text{-}mg\cos\alpha$,

звідки:

$N=mg\cos\alpha$.

Отже, $F_{тр}=fmg\cos\ \alpha$; крім того, F_x=16sin(4*t)* і рівняння (8) прийме вид:

$$m\frac{dV_x}{dt}=mg(\sin\alpha-f\cos\alpha)+16\sin(4t). \qquad (9)$$

Розділивши обидві частини рівняння на *m*, обчислимо:

$g(\sin\alpha\text{-}f\cos\alpha)$= g(sin30°-0,2cos30°)=3,2; 16/*m*=2,

і підставимо ці значення в (9). Тоді одержимо:

$$\frac{dV_x}{dt}=3{,}2+2\sin(4t). \qquad (10)$$

Множачи обидві частини рівняння (10) на *dt* і інтегруючи, знайдемо:

$$V_x=3{,}2t-\frac{1}{2}\cos(4t)+C_2. \qquad (11)$$

Будемо тепер відраховувати час від моменту, коли вантаж знаходиться в точці *B,* вважаючи в цей момент *t*=0. Тоді при *t*=0: $V=V_0=V_в$, де $V_в$ визначено рівнянням (7). Підставляючи ці величини в (11), одержимо:

$C_2=V_в$+0,5cos0º=15,2+0,5=15,7 м/с.

При знайденому значенні C_2 рівняння (11) дає:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=3{,}2t-0{,}5\cos(4t)+15{,}7. \qquad (12)$$

Множачи тут обидві частини на *dt* і знову інтегруючи, знайдемо:

$$x=1{,}6t^2-0{,}13\sin(4t)+15{,}7t+C_3. \qquad (13)$$

Так як при *t*=0: *x*=0, то C_3=0 і остаточно шуканий закон руху вантажу буде:

$$x=1{,}6t^2+15{,}7t-0{,}13\sin(4t), \qquad (14)$$

Відповідь: $x=1{,}6t^2+15{,}7t-0{,}13\sin(4t)$.

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2 МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2.1 ПОРЯДОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1. Зобразити матеріальну точку у проміжному положенні.
2. Розкласти абсолютний рух матеріальної точки на відносний і переносний, вибрати нерухому систему координат, пов'язану з тілом, яке здійснює переносний рух.
3. Записати початкові умови відносного руху матеріальної точки.
4. Зобразити на рисунку активні сили, які прикладені до точки.
5. Визначити переносне і коріолісове прискорення і переносну та коріолісову сили інерції, додати їх до активних сил, які діють на матеріальну точку.
6. Записати рівняння відносного руху у векторній формі.
7. Спроектувати векторне рівняння на осі вибраної рухомої системи координат.
8. Проінтегрувати одержані диференціальні рівняння, визначити сталі інтегрування за допомогою початкових умов.
9. Визначити величини, які шукаються.

2.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача №1

Куля *M* масою $m = 0{,}2$ *кг* рухається зі швидкістю $V_{від} = 19{,}62$ *м/с* відносно вертикальної трубки, яка на відстані l = 0,5 *м* прикріплена до вертикального валу 1 (рисунок 1). Вал обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 5$ *рад/с*.

Визначити переносну силу інерції кулі.

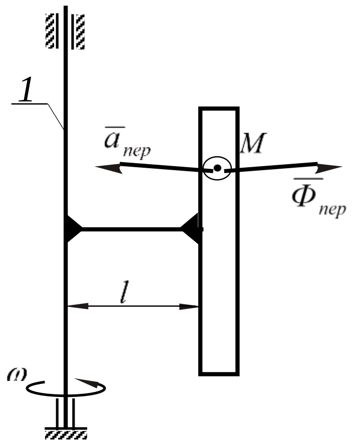


Рисунок 1

Розв'язання

Спочатку визначимо, що відносним рухом точки *M* буде її рух відносно труби, а переносним рухом буде обертання вертикального валу 1, тобто, можна позначити його кутову швидкість $\omega_{пер}$ замість ω. *У* загальному випадку переносна сила інерції дорівнює:

$$\bar{\Phi}_{пер} = -m\bar{a}_{пер},$$

де m - маса матеріальної точки,

$\bar{a}_{пер}$ - переносне прискорення.

Оскільки рухома система координат, яка пов'язана з тілом, здійснює обертальний рух, то переносне прискорення складається з нормального та тангенціального прискорень:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}^{\tau}_{пер}.$$

У цьому випадку

$$\bar{\Phi}_{пер} = \bar{\Phi}^{n}_{пер} + \bar{\Phi}^{\tau}_{пер},$$

де

$$\Phi^{n}_{пер} = ma^{n}_{пер} = m\omega^{2}_{пер} \cdot l,$$

$$\Phi^{\tau}_{пер} = ma^{\tau}_{пер} = m\varepsilon_{пер} \cdot l,$$

а l - відстань від точки до осі обертання.

Оскільки вал 1 обертається зі сталою кутовою швидкістю, то $\varepsilon_{пер}$ дорівнює нулю і $\bar{\Phi}^{\tau}_{пер} = 0$.

Таким чином, у даній задачі переносне прискорення точки складається тільки з нормального:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{n}_{пер}.$$

Нормальне прискорення точки M спрямовано ліворуч, до центру обертання точки (рисунок 1), а переносна сила інерції $\overline{\Phi}_{пер}$ - у сторону, протилежну $\overline{a}^{n}_{пер}$.

За модулем переносна сила інерції дорівнює:

$\Phi^{n}_{пер} = -ma_{пер} = m\omega^2_{пер} \cdot l = 0{,}2 \cdot 5^2 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$ H.

Відповідь : $\Phi^{n}_{пер} = 2{,}5$ H.

Задача №2

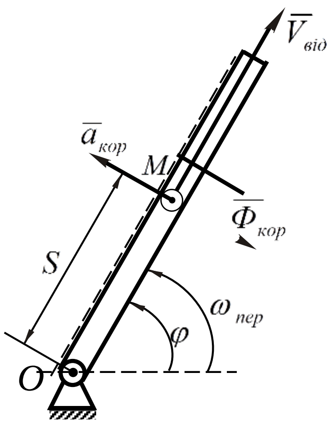


Рисунок 2

Трубка обертається навколо осі O (рисунок 2) за законом $\varphi = t^2$. У трубці рухається куля M масою $m = 0{,}1$ *кг* за законом $OM = S = 0{,}2t^3$.

Визначити модуль коріолісової сили інерції кулі у момент часу $t_1 = 1$ c.

Розв'язання

Коріолісова сила інерції за визначенням дорівнює:

$$\overline{\Phi}_{кор} = -m\overline{a}_{кор}, \qquad (1)$$

де $\overline{a}_{кор}$ - коріолісове прискорення точки.

Спрямована $\overline{\Phi}_{кор}$ у бік, протилежний коріолісову прискоренню.

В загальному випадку $a_{кор}$ за величиною дорівнює:

$$a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot V_{від} \cdot \sin\left(\overline{\omega}_{пер} \hat{,} \overline{V}_{від}\right). \qquad (2)$$

Обчислимо модуль коріолісового прискорення відповідно до умов даної задачі.

Обертання трубки навколо осі O є переносним рухом для кулі M. Закон обертального руху заданий:

$$\varphi = t^2,$$

отже, закон зміни кутової швидкості має вигляд:

$$\omega_{пер} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2\right) = 2t.$$

При $t_1 = 1\ c \quad \omega_{пер} = 2\ рад/c$.

Оскільки значення кутової швидкості додатне, то обертання трубки збігається з напрямом кута відліку φ (рисунок 2).

Переміщення кулі вздовж трубки є відносним рухом, рівняння якого задано у вигляді:

$$S = 0{,}2t^3.$$

Тоді, швидкість відносного руху кулі визначиться із виразу:

$$V_{від} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}2t^3\right) = 0{,}6t^2.$$

При $t_1 = 1\ c \ V_{від} = 0{,}6\, м/c$.

Оскільки вектор кутової швидкості $\overline{\omega}_{пер}$ є перпендикулярний площині, в якій обертається трубка, то кут між векторами $\overline{\omega}_{пер}$ і $\overline{V}_{від}$ дорівнює $90°$.

Таким чином, модуль коріолісового прискорення згідно з (2) дорівнює:

$$a_{кор} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}6 \cdot \sin 90^\circ = 2{,}4\ м/c^2,$$

а величина коріолісової сили інерції:

$$\varPhi_{кор} = m \cdot a_{кор} = 0{,}1 \cdot 2{,}4 = 0{,}24\, H.$$

Переходимо до визначення напрямку $\overline{\varPhi}_{кор}$.

Згідно з (1) $\overline{\varPhi}_{кор}$ спрямована у бік, протилежний коріолісову прискоренню $\overline{a}_{кор}$. Якщо (за правилом Жуковського) повернути вектор відносної швидкості $\overline{V}_{від}$ навколо точки M на 90° у бік переносного обертання (тобто, проти руху годинникової стрілки), то повернутий вектор вкажіть нам напрям $\overline{a}_{кор}$ (рисунок 2) і, таким чином, напрям коріолісової сили інерції $\overline{\varPhi}_{кор}$.

Відповідь: $\varPhi_{кор} = 0{,}24\ H$.

Задача №3

Тіло вагою 2 *Н* покладено на гладку грань тригранної призми, друга грань якої лежить на горизонтальній площині.

Визначити, яке горизонтальне прискорення повинна мати призма, щоб тіло не рухалось відносно призми, і який тиск спричиняє тіло на призму у цьому випадку, якщо $\alpha = 30^\circ$.

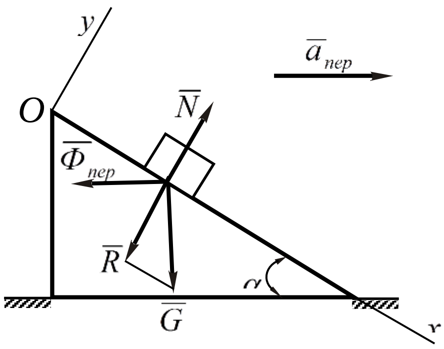


Рисунок 3

Розв'язання

Якщо тіло знаходиться у стані відносного спокою по відношенню до призми, яка рухається, то геометрична сума прикладених до тіла сил і переносної сили інерції дорівнює нулю.

До тіла прикладені сила тяжіння $\bar{G}$ і реакція гладенької поверхні $\overline{N}$ (рисунок 3). Умовно прикладемо до тіла переносну силу інерції $\overline{\Phi}_{пер}$ (модуль якої $\Phi_{пер} = ma_{пер}$, де m - маса тіла), спрямовану протилежно переносному прискоренню $\overline{a}_{пер}$, яке являє собою прискорення призми.

Тоді

$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{пер} = 0.$$

Спроектуємо це рівняння на осі Ox і Oy, які пов'язані з рухомою призмою:

$$G \sin\alpha - \Phi_{пер} \cos\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$N - G\cos\alpha - \Phi_{пер} \sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

З першого рівняння знайдемо модуль прискорення $\bar{a}_{пер}$:

$$mg\sin\alpha - ma_{пер}\cos\alpha = 0,$$

$$a_{пер} = g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = g\ tg\alpha..$$

З урахуванням числових значень:

$a_{пер} = 9{,}81 tg 30^{\circ} = 5{,}66 \ м/с^2$.

Визначимо переносну силу інерції:

$\Phi_{пер} = m a_{пер} = mg \ tg\alpha = G \ tg\alpha$.

Із другого рівняння визначимо модуль реакції призми:

$N = Gcos\alpha + \Phi_{пер} \sin\alpha = Gcos\alpha + G \ tg\alpha \sin\alpha = G \ cos\alpha \left(1 + tg^2\alpha\right).$

З урахуванням числових значень:

$N = 2cos 30^0 \left(1 + tg^2 30^{\circ}\right) = 2{,}3 \ Н.$

Тиск R тіла на призму за модулем дорівнює реакції N, але спрямований у протилежний бік.

Відповідь: $a_{пер} = 5{,}66 \ м/с^2$, $R = 2{,}3 \ Н.$

Задача №4

Горизонтальна трубка *CD* рівномірно обертається навколо вертикальної осі *AB* з кутовою швидкістю ω . Посередині трубки знаходиться тіло *M*.

Визначити швидкість v тіла відносно трубки у момент його вилітання з трубки, якщо у початковий момент $V_0 = 0, \quad x = x_0,$ довжина трубки l. Тертям знехтувати.

Розв'язання

Зобразимо тіло M у поточному положенні у трубці (рисунок 4).

Рух тіла M розкладемо на відносний (по відношенню до трубки *CD)* і переносний (разом з трубкою.) З трубкою пов'яжемо рухому систему координат: вісь x спрямуємо вздовж трубки CD , вісь y спрямуємо уздовж осі обертання.

Початкові умови руху по відношенню до рухомої системи координат мають вигляд: при $t_0 = 0, \quad V_{0x} = 0, \quad x = x_0 > 0.$

До тіла M прикладені наступні сили: сила тяжіння $m\bar{g}$ і реакції трубки $\bar{N}$ та $\bar{N}_1$, які лежать у площині І-І.

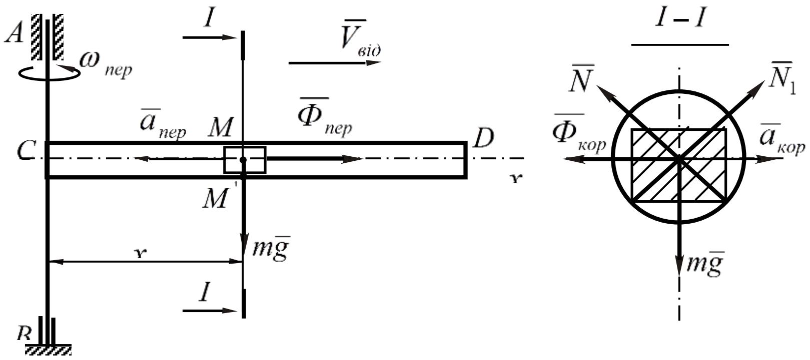


Рисунок 4

Скористаємося теорією відносного руху, для чого до сил, що діють, додамо переносну і коріолісову сили інерції.

Переносна сила інерції $\bar{\Phi}_{пер}$ дорівнює:

$$\bar{\Phi}_{пер} = -m\bar{a}_{пер} .$$

Переносне прискорення $\bar{a}_{пер}$ тіла M дорівнює прискоренню тієї точки M' рухомої системи координат, з якою співпадає у даний момент тіло M.

Переносне прискорення точки M' у загальному випадку дорівнює:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^n_{пер} + \bar{a}^\tau_{пер} .$$

Оскільки трубка CD обертається зі сталою кутовою швидкістю, тобто $\varepsilon_{пер} = 0$, то

$$a^\tau_{пер} = \varepsilon_{пер} x = 0; \qquad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^n_{пер} .$$

За модулем $a^n_{пер} = \omega^2 x$ і спрямоване до осі обертання.

Отже, переносна сила інерції дорівнює:

$$\Phi_{пер} = m\omega^2_{пер} x$$

і спрямована у сторону додатного напрямку осі x.

Коріолісове прискорення дорівнює:

$$\bar{a}_{кор} = 2\left(\bar{\omega}_{пер} \times \bar{V}_{від}\right).$$

Спрямоване $\bar{a}_{кор}$ перпендикулярно до площини рисунка від нас. Отже, коріолісова сила інерції спрямована до нас. На рисунку 4 праворуч показано переріз $I - I$, перпендикулярний до осі *x,* на якому зображені реакції $\bar{N}$ і $\bar{N}_1$ та коріолісова сила інерції $\bar{\Phi}_{кор}$.

За модулем

$$\Phi_{кор} = 2m\ \omega_{пер} V_{від} \sin 90^0 = 2m\omega_{пер} V_{від}.$$

Рівняння відносного руху з урахуванням сил $m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{N}_1$ і складових сили інерції має вигляд:

$$m\bar{a}_{від} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{N}_1 + \bar{\Phi}_{пер} + \bar{\Phi}_{кор}.$$

Для визначення швидкості тіла M відносно трубки CD спроектуємо це рівняння на вісь x:

$$m\frac{dV_x}{dt} = (\bar{\Phi}_{пер})_x = m\omega_{пер}{}^2 x; \qquad \text{або} \qquad \frac{dV_x}{dt} = \omega_{пер}^2 x.$$

Сили $m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{N}_1$ та $\bar{\Phi}_{кор}$ перпендикулярні до осі x і проектуються у точку. Для розв’язання останнього диференціального рівняння зробимо перетворення:

$$\frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dV_x}{dx} = V_x \frac{dV_x}{dx} = \omega_{пер}^2 \cdot x.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$V_x dV_x = \omega_{пер}^2 x dx, \qquad \int V_x dV_x = \omega_{пер}^2 \int x dx + C_1'$$

$$\frac{V_x^2}{2} = \omega_{пер}^2 \frac{x^2}{2} + C_1' \quad \Rightarrow \quad V_x{}^2 = \omega_{пер}^2 x^2 + C_1.$$

Сталу інтегрування C_1 визначаємо за початковими умовами: при $x = x_0$ $V_{0x} = 0$.

$$0 = \omega_{пер}^2 x_0^2 + C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\omega_{пер}^2 x_0^2.$$

Тоді

$$V_x{}^2 = \omega_{пер}^2 x^2 - \omega_{пер}^2 x_0^2 = \omega_{пер}^2 \left(x^2 - x_0^2\right),$$

відкіля

$$V_x = \omega_{\ пер} \sqrt{x^2 - x_0^2}\ .$$

У момент вилітання тіла M з трубки (при цьому $x = l$), швидкість тіла дорівнює:

$$V = \omega_{пер} \sqrt{l^2 - x_0^2}.$$

Відповідь: $V = \omega_{пер} \sqrt{l^2 - x_0^2}.$

Задача №5

Півколо BCD радіусом $R = 0{,}5\ м$ обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю $\omega_{пер} = 2\, рад/с$. По ньому із точки B, яка зміщена вправо від вісі Oy на малу величину, починає сковзати без тертя кільце M.

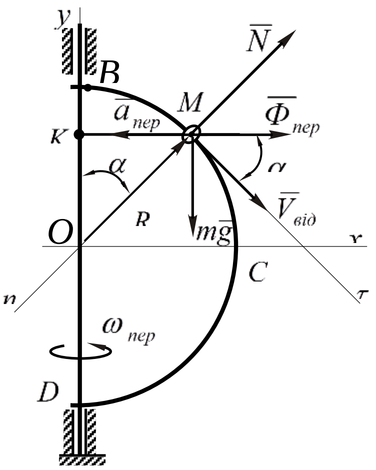


Рисунок 5

Визначити відносну швидкість $V_{від}$ у точці C, якщо початкова швидкість кільця $V_0 = 0$.

Розв'язання

Зобразимо кільце у довільному положенні на дузі BCD, яке визначається кутом α . Кільце M здійснює складний рух, який можна розкласти на відносний - по півколу $BCD,$ і переносний обертальний разом з півколом BCD навколо вертикальної осі Oy (рисунок 5).

Початкові умови відносного руху кільця M мають вигляд: при $t_0 = 0$ $V_0 = 0.$

На кільце діють наступні сили: сила тяжіння кільця $m\overline{g}$, нормальна реакція півкола - $\overline{N}$. Додамо силу інерції у переносному русі $\overline{\Phi}_{пер}$ і коріолісову силу інерції $\overline{\Phi}_{кор}$. Переносна сила інерції дорівнює:

$$\overline{\Phi}_{пер} = \overline{\Phi}_{пер}^{n} + \overline{\Phi}_{пер}^{\tau}.$$

$$\Phi_{пер}^{n} = ma_{пер}^{n} = m\omega_{пер}^{2} \cdot KM = m\omega_{пер}^{2} R\sin\alpha,$$

$$\Phi_{пер}^{\tau} = ma_{пер}^{\tau} = m\varepsilon_{пер} \cdot KM = m\varepsilon_{пер} R\sin\alpha,$$

де $\omega_{пер}, \varepsilon_{пер}$ - кутова швидкість і кутове прискорення переносного обертання;

KM - радіус обертання точки M навколо осі Oy.

Оскільки обертання рівномірне, то $\varepsilon_{пер} = 0$, і $\Phi_{пер}^{\tau} = 0$. Отже, переносна сила інерції $\overline{\Phi}_{пер}$ буде мати тільки одну складову - $\overline{\Phi}_{пер}^{n}$, яка спрямована у сторону, протилежну нормальному прискоренню $\overline{a}_{пер}^{n}$, і за модулем дорівнює:

$$\Phi_{пер} = m\omega_{пер}^{2} R\sin\alpha.$$

Коріолісова сила інерції спрямована у бік, протилежний коріолісовому прискоренню $\overline{a}_{кор}$:

$$\overline{\Phi}_{кор} = -m\overline{a}_{кор}, \qquad \overline{a}_{кор} = 2\left(\overline{\omega}_{пер} \times \overline{V}_{від}\right).$$

Відносна швидкість $\overline{V}_{від}$ спрямована за дотичною до дуги BC у бік руху. Тоді прискорення $\overline{a}_{кор}$ спрямоване перпендикулярно до площини рисунка від нас, $\overline{\Phi}_{кор}$ у протилежний бік, тобто, до нас.

Запишемо рівняння відносного руху кільця M:

$$m\overline{a}_{від} = \overline{mg} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{пер} + \overline{\Phi}_{кор}.$$

Оскільки траєкторія кільця M відома (коло), то з кільцем пов'яжемо природну систему координат τMn.

Складемо диференціальне рівняння відносного руху у проекції на дотичну до дуги BC у точці M:

$$ma_{від}^{\tau} = mg\sin\alpha + \Phi_{пер}^{n} \cdot \cos\alpha., \qquad (1)$$

Проекція $\overline{\Phi}_{кор}$ на вісь τ дорівнює нулю, оскільки коріолісова сила інерції перпендикулярна до площини, у якій лежить вісь τ.

Визначимо відносну швидкість $V_{від}$ з рівняння (1).

$$ma^{\tau}_{від} = mg\sin\alpha + m\omega^2_{пер}R\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

$$a^{\tau}_{від} = g\sin\alpha + \frac{\omega^2_{пер}R}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\frac{dV_{від}}{dt} = g\sin\alpha + \frac{\omega^2_{пер}R}{2}\sin 2\alpha.$$

Перейдемо від змінної t до змінної α наступним чином:

$$\frac{dV_{від}}{dt} = \frac{dV_{від}}{dt}\frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{dV_{від}}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}.$$

Оскільки

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \frac{V_{від}}{R},$$

то

$$\frac{V_{від}}{R}\cdot\frac{dV_{від}}{d\alpha} = g\sin\alpha + \frac{\omega^2_{пер}R}{2}\sin 2\alpha. \qquad (2)$$

Розділимо змінні у рівнянні (2) і проінтегруємо:

$$V_{від}\cdot dV_{від} = Rg\sin\alpha\cdot d\alpha + \frac{\omega^2_{пер}R^2}{2}\sin 2\alpha\cdot d\alpha,$$

$$\int V_{від}\cdot dV_{від} = Rg\int\sin\alpha\cdot d\alpha + 0,5\omega^2_{пер}R^2\int\sin 2\alpha\cdot d\alpha + C_1,$$

$$\frac{V^2_{від}}{2} = -Rg\cos\alpha - \frac{1}{4}\omega^2_{пер}R^2\cdot\cos 2\alpha + C_1.$$

Визначимо сталу інтегрування C_1. Оскільки при $t_0 = 0$ $\alpha_0 = 0,\ V_{від} = 0$, то

$$0 = -Rg - \frac{1}{4}\omega^2_{пер}\cdot R^2 + C_1, \quad\Rightarrow\quad C_1 = Rg + \frac{1}{4}\omega^2_{пер}R^2.$$

Остаточно,

$$V^2_{від} = 2Rg + \frac{1}{2}\omega^2_{пер}R^2 - 2Rg\cos\alpha - \frac{1}{2}\omega^2_{пер}R^2\cos 2\alpha,$$

$$V_{від} = \sqrt{2Rg\left(1-\cos\alpha\right) + 0,5\omega^2_{пер}R^2\left(1-\cos 2\alpha\right)}.$$

Підрахуємо $V_{від}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$:

$$V_{від} = \sqrt{2Rg + \omega_{пер}^2 R^2} = \sqrt{2Rg\left(1 + \frac{\omega_{пер}^2 R}{2g}\right)}.$$

Підставивши $\omega_{пер} = 2c^{-1}$, $R = 0,5$ *м* дістанемо:

$$V_{від} = \sqrt{2\cdot 0,5\cdot 9,81\left(1+\frac{2^2\cdot 0,5}{2\cdot 9,81}\right)} = 3,3\,м/с.$$

Відповідь: $V_{від} = 3,3$ *м/с.*

Задача №6

Порожня трубка *AB* (рисунок 6) обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі *CD* та складає з нею незмінний кут $\alpha = 60^\circ$. В трубці знаходиться куля *M* вагою *G* = 4 *H*.

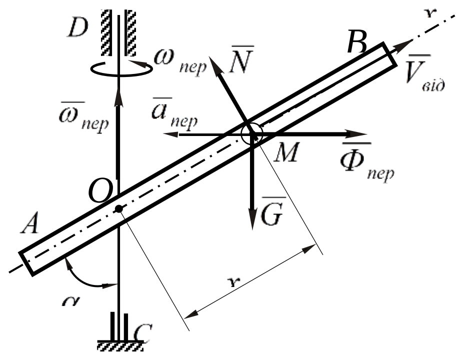


Рисунок 6

Визначити закон руху кулі *M* відносно трубки *AB*, якщо початкова швидкість кулі дорівнює нулю, початкова відстань від точки *O* дорівнює $l = 5$ *см,* кутова швидкість трубки $\omega = 3,14\,рад/с$. Тертям кулі об стінки трубки знехтувати.

Розв'язання

Зобразимо кулю, яку приймаємо за матеріальну точку, в довільному положенні в трубці *AB* (рисунок 6).

Виберемо початок рухомої системи відліку, яку пов'яжемо з трубкою *AB*, в точці *O* та ось *Ox* спрямуємо уздовж трубки від точки *O* до точки *B*.

Обертання цієї системи навколо осі *CD* є переносним рухом для кулі *M*.

Відносним рухом кулі *M* є її рух уздовж трубки.

На кулю *M* діє сила тяжіння $\overline{G}$ та реакція трубки $\overline{N}$, яка перпендикулярна осі *Ox*. До цих сил треба додати переносну $\overline{\Phi}_{пер}$ та коріолісову $\overline{\Phi}_{кор}$ сили інерції. З рівняння (2) витікає, що сила інерції $\overline{\Phi}_{кор}$ спрямована до нас перпендикулярно до площини рисунка (на рисунку 6 силу $\overline{\Phi}_{кор}$ не показано).

Оскільки переносне обертання рівномірне, то переносне прискорення складається тільки з нормального $\overline{a}^{n}_{пер}$, спрямованого до осі обертання *CD*, тобто $\overline{a}_{пер} = \overline{a}^{n}_{пер}$. Отже, переносна сила інерції спрямована праворуч, перпендикулярно *CD*.

За модулем $\overline{\Phi}_{пер}$ дорівнює:

$$\Phi_{пер} = ma^{n}_{пер} = m\omega^2 x \sin\alpha ,$$

де $x\sin\alpha$ - відстань від точки *M* до осі обертання *CD*,

$$\Phi_{пер} = \frac{G}{g}\omega^2 x \sin 60^\circ = \frac{4}{9{,}81}(3{,}14)^2 \cdot 0{,}866x = 3{,}5x , \qquad (1)$$

Запишемо рівняння відносного руху кулі *M* у векторній формі:

$$m\overline{a}_{від} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{пер} + \overline{\Phi}_{кор} , \qquad (2)$$

та спроектуємо вираз (2) на вісь *Ox*:

$$ma_{від} = -G\cos\alpha + \Phi_{пер}\sin\alpha .$$

Одержане рівняння можна переписати у вигляді:

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \cos 60^\circ + 3{,}5x\sin 60^\circ ,$$

або

$$\ddot{x} - 7{,}43x = -4{,}9 . \qquad (3)$$

Загальне рішення одержаного диференціального рівняння має вигляд:

$$x = x_1 + x_2 ,$$

де x_1 - загальне рішення відповідного однорідного рівняння;

x_2 - часткове рішення рівняння (3).

Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$n^2 - 7{,}43 = 0, \quad \Rightarrow \quad n_{1,2} = \pm\sqrt{7{,}43} \approx \pm 2{,}7.$$

Таким чином, загальне рішення однорідного диференціального рівняння є:

$$x_1 = C_1 e^{2{,}7t} + C_2 e^{-2{,}7t}.$$

Часткове рішення рівняння (3) знайдемо у формі:

$$x_2 = B.$$

Із диференціального рівняння (3):

$$-7{,}43 \cdot B = -4{,}9, \quad \text{відкіля} \quad B = 0{,}66.$$

Рішення диференціального рівняння (3) відносного руху кулі *M* має вигляд:

$$x = C_1 e^{2{,}7t} + C_2 e^{-2{,}7t} + 0{,}66, \tag{4}$$

Швидкість цього руху:

$$\dot{x} = 2{,}7 C_1 e^{2{,}7t} - 2{,}7 C_2 e^{-2{,}7t}, \tag{5}$$

Сталі C_1 та C_2 знайдемо, використавши початкові умови: при

$t_0 = 0 \ c \qquad x_0 = l = 0{,}05\,м, \qquad \dot{x}_0 = 0.$

Запишемо рівняння (4) та (5) при $t_0 = 0 \ c$:

$$0{,}05 = C_1 + C_2 + 0{,}66, \tag{4'}$$

$$0 = 2{,}7C_1 - 2{,}7C_2, \tag{5'}$$

Вирішуємо рівняння ($4'$) і ($5'$), та знаходимо

$$C_1 = C_2 = -0{,}305.$$

Остаточно, рівняння відносного руху кулі *M* буде мати вигляд:

$$x = -0{,}305 e^{2{,}7t} - 0{,}305 e^{-2{,}7t} + 0{,}66.$$

Відповідь: $x = -0{,}305 e^{2{,}7t} - 0{,}305 e^{-2{,}7t} + 0{,}66\,м.$

Самостійна робота №2

Вантаж 1 масою m укріплений на пружинній підвісці ліфта (рисунки 0 - 9, таблиця 1). Ліфт рухається вертикально за законом $\xi = 1/2(\alpha_1 t^2) + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(\omega t)$ (вісь ξ спрямована по вертикалі нагору; ξ виражено в метрах, t - у секундах). На вантаж діє сила опору середовища $R = \mu V$, де V - швидкість вантажу відносно ліфта.

Знайти закон руху вантажу стосовно ліфта, тобто $x = f(t)$; початок координат помістити в положенні статичної рівноваги вантажу при нерухомому ліфті (щоб уникнути помилок у знаках, направити вісь x убік подовження пружини, а вантаж зобразити в положенні, при якому $x>0$ і пружина розтягнута). При розрахунках можна прийняти $g \approx 10$м/с^2. Масою пружин і сполучної планки 2 зневажити.

У таблиці позначено: c_1, c_2, c_3 - коефіцієнти пружності пружин, λ_0 - подовження пружини з еквівалентною пружністю в початковий момент часу $t=0$, V_y - початкова швидкість вантажу стосовно ліфта (спрямована вертикально нагору). Прочерк у стовпцях c_1, c_2, c_3 означає, що відповідна пружина відсутня і на кресленні зображуватися не повинна. Якщо при цьому кінець однієї з пружин, яка залишилася, виявиться вільним, його варто прикріпити у відповідному місці або до вантажу або до стелі (підлоги) ліфта; те ж саме варто зробити, якщо вільними виявляться з'єднані планкою 2 кінці обох пружин, що залишилися. Умова $\mu = 0$ означає, що сила опору R відсутня.

Вказівки. Задача охоплює одночасно теми відносного руху і коливання матеріальної точки. Спочатку потрібно скласти диференційне рівняння відносного руху (відносно ліфта) розглянутого в задачі вантажу, для чого приєднати до діючих сил переносну силу інерції. При цьому замінити підвіску однією пружиною з пружністю, еквівалентною пружності підвіски.

Потім проінтегрувати отримане лінійне диференційне рівняння 2-го порядку, врахувавши початкові умови.

Таблиця 1 – Вихідні дані

№	m, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	α_1, м/с^2	α_2, м	α_3, м	ω, 1/с	μ, Н$\cdot$м/с	λ_0,м	V_0,м/с
0	0,8	-	240	120	-1,5g	0	0	-	8	0,1	0
1	0,5	-	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
2	1	240	-	160	0	0	0,5	6	0	0	0
3	0,5	80	120	-	-g	0	0	-	6	0,15	0
4	2	-	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
5	0,4	60	-	120	g	0	0	-	4	0	2
6	0,5	120	-	180	0	0,1	0	20	0	0	0
7	0,4	50	200	-	0	0	0,2	20	0	0,15	0
8	1	200	-	300	1,5g	0	0	-	20	0	3
9	1	300	150	-	0	0,1	0	15	0	0	0

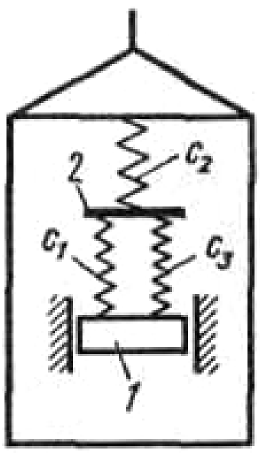


Рисунок 0

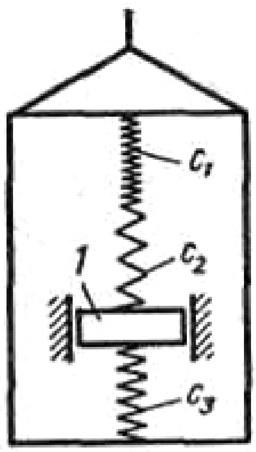


Рисунок 1

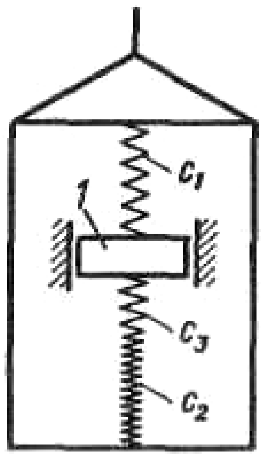


Рисунок 2

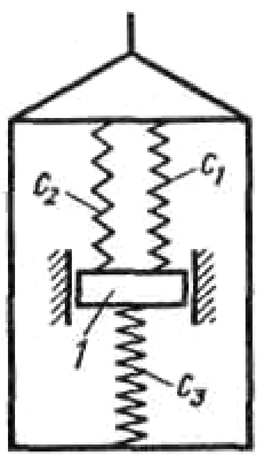


Рисунок 3

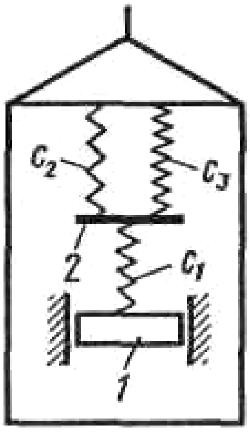


Рисунок 4

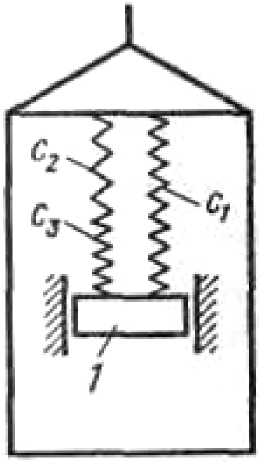


Рисунок 5

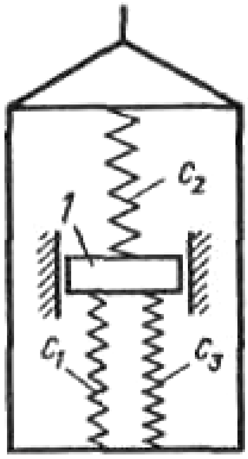


Рисунок 6

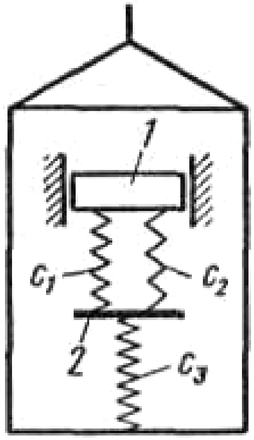


Рисунок 7

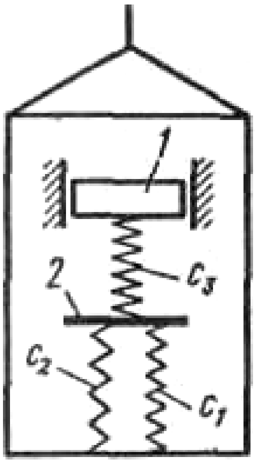


Рисунок 8

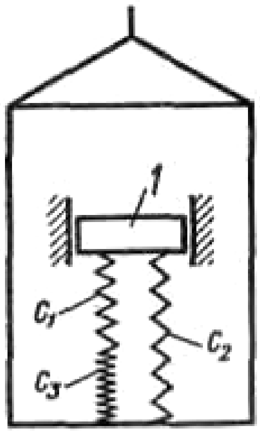


Рисунок 9

Рисунок 0 – 9 – Розрахункові схеми

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №2

Вантаж *D* масою *m*, прикріплений до двох послідовно з'єднаних пружин з коефіцієнтами пружності c_1 і c_2, переміщається по пазу *AB* призматичного візка (рисунок 1а). Візок рухається за законом $\xi = f_1(t)$.

Початкове подовження пружини з еквівалентною пружністю λ_0, а початкова швидкість вантажу відносно візка V_0 (спрямована від *D* до *B*).

Визначити закон руху вантажу $x = f(t)$ відносно візка.

Дано:
m=0,4кг c_1=200Н/м c_2=50Н/м λ_0=0,1м V_0=1м/с α=60° ξ=2t^2+0,4sin(4t)
x=f(t) - ?

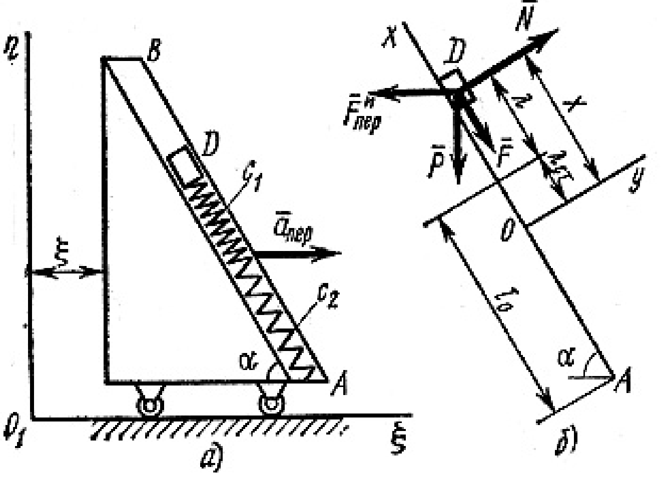


Рисунок 1

Розв'язання

1. Замінимо прикріплені до вантажу пружини однією еквівалентною пружиною з коефіцієнтом пружності $c_{эк}$=c. Значення $c_{эк}$ визначиться з умови, що при рівновазі під дією будь-якої прикладеної до вільного кінця пружин сили Q, зусилля в будь-якому поперечному перерізі пружин однакові і рівні Q.

Тоді якщо подовження пружин рівні відповідно λ_1 і λ_2, то подовження еквівалентної пружини $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ і повинно бути $c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2 = c\lambda = Q$, звідки:

$$\lambda_1 = Q/c_1,\ \lambda_2 = Q/c_2,\ \lambda = Q/c. \qquad (1)$$

Але так як $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ то:

$$\frac{Q}{c} = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} \quad \text{і} \quad c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 40 \text{ Н/м}. \qquad (2)$$

2. Складемо диференційне рівняння відносного руху вантажу (відносно візка). Спочатку помітимо, що при нерухомому візку в положенні статичної рівноваги вантажу еквівалентна пружина (довжину її в недеформованому стані позначимо l_0) під дією сили ваги $\bar{P}$ буде стиснута на величину $\lambda_{ст}$ (рисунок 1б). З умови рівноваги випливає, що:

$$c\lambda_{\text{ст}} = P\sin\alpha \quad \text{і} \quad \lambda_{\text{ст}} = \frac{mg\sin\alpha}{c} = 0{,}08\,\text{м}. \qquad (3)$$

Зв'яжемо тоді з візком рухому систему відліку *Oxy*, початок *O* якої помістимо в положенні статичної рівноваги вантажу, а вісь *Ox* направимо вздовж паза *AB* вбік подовження пружини (рисунок Д2,б). Розглянемо вантаж у положенні, при якому $x>0$ і пружина розтягнута; зобразимо діючі на вантаж сили: силу ваги $\overline{P}$, силу пружності $\overline{F}$ і реакцію паза $\overline{N}$. Для складання рівняння відносного руху вантажу приєднаємо до цих сил переносну силу інерції $\overline{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} = -m\overline{a}_{\text{пер}}$; кориолісова сила інерції тут дорівнює нулю, тому що переносний рух (рух візка) є поступальним. Тоді рівняння відносного руху у векторній формі буде мати вигляд:

$$m\overline{a}_{\text{от}} = \overline{P} + \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}.$$

Проектуючи обидві його частини на вісь *x,* одержимо:

$$m\ddot{x} = -P\sin\alpha - F + F^{\text{и}}_{\text{пер}}\cos\alpha. \qquad (4)$$

Знайдемо значення F і $F^{\text{и}}_{\text{пер}}$. Так як при положенні вантажу, обумовленому координатою $x>0$ (рисунок 1б), еквівалентна пружина має подовження $\lambda = x + \lambda_{\text{ст}}$, то:

$$F = c\lambda = c(x - \lambda_{\text{ст}}).$$

Далі $F^{\text{и}}_{\text{пер}} = ma_{\text{пер}} = m\ddot{\xi}$,

де $\ddot{\xi}$ - прискорення візка.

З рівняння $\xi = \xi(t)$ знаходимо, що $\ddot{\xi} = 4 - 6{,}4\sin(4t)$. Крім того, $\cos\alpha = 0{,}5$. Підставляючи всі ці величини в рівняння (4), одержимо:

$$m\ddot{x} = -P\sin\alpha - c(x - \lambda_{\text{ст}}) + m\left[2 - 3{,}2\sin(4t)\right].$$

Відповідно до рівняння (3) члени - $P\sin\alpha$ і $c\lambda_{\text{ст}}$ у правій частині скорочуються, і остаточно диференційне рівняння відносного руху вантажу прийме вид:

$$\ddot{x} + k^2 x = b_1 + b_2\sin(4t), \qquad (5)$$

де позначено:

$$k^2 = c/m = 100c^{-2}, \quad b_1 = 2\text{м/с}^2, \quad b_2 = -3{,}2\text{м/с}^2, \tag{6}$$

3. Для визначення закону відносного руху вантажу треба проінтегрувати рівняння (5). Його загальне рішення, як відомо з теорії диференційних рівнянь має вигляд:

$$x = x_1 + x_2, \tag{7}$$

де x_1- загальне рішення однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2 x = 0$, тобто:

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt), \tag{8}$$

x_2 - часткове рішення рівняння (5). Виходячи з виду правої і лівої частини цього рівняння, шукаємо x_2 у виді:

$$x_2 = A + B\sin(4t). \tag{9}$$

Для визначення постійних A і B знаходимо $\ddot{x}_2$=-16Bsin(4t), підставляємо значення $\ddot{x}_2$ й x_2 у рівняння (5) і дорівнюємо в його обох частинах вільні члени і коефіцієнти при sin(4t). У результаті, приймаючи в увагу позначення (6), одержимо:

$$A = \frac{b_1}{b_2} = 0{,}02\text{м}, \qquad B = \frac{b_2}{k^2 - 16} = -0{,}04\,\text{м}.$$

Тоді з рівнянь (7)-(9), з огляду на те, що k=10 с$^{-1}$, одержимо наступне загальне рішення рівняння (5):

$$x = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02, \tag{10}$$

Для визначення постійних інтегрування C_1і C_2 врахуємо що $V_x = \dot{x}$

$$V_x = 10C_1\cos(10t) - 10C_2\sin(10t) - 0{,}16\cos(4t), \tag{11}$$

За умовами задачі при t=0: $V_x = V_0$ =1м/с, $\lambda = \lambda_0$=0,1м. Тоді, як видно з рисунку 1б і рівняння (3), $x_0 = \lambda_0 + \lambda_{ст}$=0,18м. Підставивши ці початкові дані в рівняння (10) і (11), знайдемо з них, що C_1 = 0,12, C_2 = 0,16. У результаті рівняння (10) прийме остаточно вигляд:

$$x = 0{,}12\sin(10t) + 0{,}16\cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02, \tag{12}$$

Це рівняння і визначає шуканий закон відносного руху вантажу, тобто закон здійснюваних їм коливань.

Відповідь: x=0,12sin(10t)+0,16cos(10t)-0,04sin(4t)+0,02.

Примітки:

1. Якби вантаж був би прикріплений до двох паралельних пружин, то при рівновазі під дією деякої сили $\overline{Q}$ кожна з пружин і еквівалентна мали б однакові деформації λ. Тоді для двох пружин $c_1\lambda + c_2\lambda$=Q, а для еквівалентної пружини $c\lambda$=Q; звідси і визначається значення: $c_{эк} = c = c_1 + c_2$.

2. Якщо пружини були б прикріплені до візка в точці B (рисунок Д2,а), а вантаж D знаходився на іншому їхньому кінці, то в положенні статичної рівноваги еквівалентна пружина була б розтягнута на величину $\lambda_{ст}$, а не стиснута (у цьому випадку λ=x+ $\lambda_{ст}$).

ДОДАТОК Б
(довідковий)

1. Найпростіші алгебраїчні формули

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right);$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Формула коренів квадратного рівняння

Рівняння $ax^2 + bx + c = 0$,
де $a,\ b,\ c$ – дійсні числа і $a \neq 0$, має такі корені:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3. Градуси – радіани

Перехід від градусів у радіани: $\alpha(рад) = 0{,}0175 \cdot \alpha(град).$
Перехід від радіан у градуси: $\alpha(град) = 57{,}3 \cdot \alpha(рад).$

4. Формули подвійного кута

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;,$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

5. Формули ділення аргументу навпіл

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

6. Формули зниження степені

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

7. Формули додавання аргументу

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta};$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

8. Формули перетворення суми тригонометричних функцій в добуток

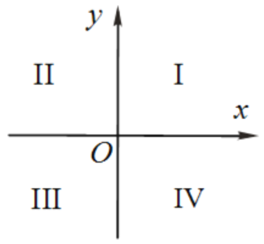
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

9. Знаки тригонометричних функцій по квадрантам

Функція	Квадрант			
	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tg	+	–	+	–
ctg	+	–	+	–



10. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α									
α	*град*	0	15	30	45	60	75	90	180
	рад	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$		0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1	0
$\cos\alpha$		1	0,97	0,87	0,71	0,50	0,26	0	−1
$tg\alpha$		0	0,27	0,58	1,00	1,73	3,73	∞	0
$ctg\alpha$		∞	3,73	1,73	1,00	0,58	0,27	0	∞

11. Формули зведення

Функція	Аргумент x				
	$-\alpha$	$\pi/2 \pm \alpha$ $(90^\circ \pm \alpha)$	$\pi \pm \alpha$ $(180^\circ \pm \alpha)$	$3\pi/2 \pm \alpha$ $(270^\circ \pm \alpha)$	$2\pi \pm \alpha$ $(360^\circ \pm \alpha)$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos x$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\, x$	$-tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$
$ctg\, x$	$-ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

12. Формули, які пов'язують функції одного і того ж аргументу

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

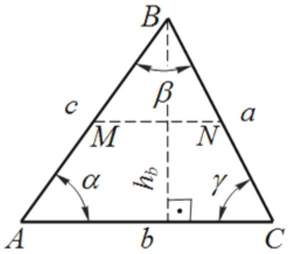
$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

13. Співвідношення в довільному та прямокутному трикутниках



a, b, c – сторони трикутника;

α, β, γ – внутрішні кути трикутника;

MN – середня лінія трикутника;

h_b – висота трикутника, що опущена на сторону b;

Сума кутів трикутника:

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Нерівності трикутника:

$b - c < a < b + c;$

$a - c < b < a + c;$

$a - b < c < a + b.$

Теорема синусів:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Теорема косинусів:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$

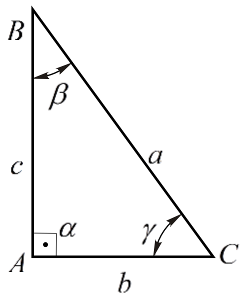
Площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\alpha;$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона),

де $p = (a+b+c)/2$ – півпериметр трикутника.

Прямокутний трикутник:



b і c – катети, a – гіпотенуза;

$\alpha = 90^\circ$, $\beta + \gamma = 90^\circ$;

$S = \frac{1}{2}bc$ – площа трикутника;

$a^2 = b^2 + c^2$ – теорема Піфагора.

Якщо $\beta = 30^\circ$ то $b = \frac{a}{2}$.

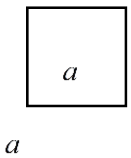
$\sin\gamma = \frac{c}{a}$; $\cos\gamma = \frac{b}{a}$; $tg\gamma = \frac{c}{b}$; $ctg\gamma = \frac{b}{c}$;

$\sin\beta = \frac{b}{a}$; $\cos\beta = \frac{c}{a}$; $tg\beta = \frac{b}{c}$; $ctg\beta = \frac{c}{b}$;

$c = a \cdot \sin\gamma = a \cdot \cos\beta$; $b = a \cdot \sin\beta = a \cdot \cos\gamma$.

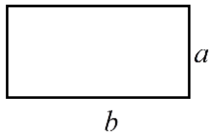
14. Площа (S) *геометричних фігур*

Квадрат



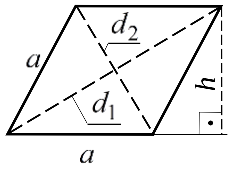
$$S = a^2.$$

Прямокутник



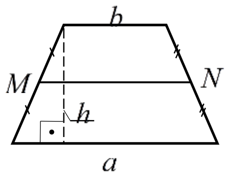
$$S = a \cdot b.$$

Ромб



$$S = h \cdot a = d_1 \cdot d_2 / 2.$$

Трапеція

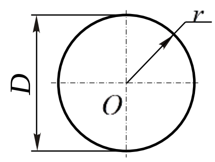


$$S = h \cdot (a + b)/2;$$

Середня лінія:

$$MN = (a + b)/2.$$

Коло і круг

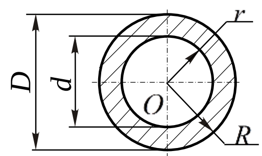


$$S = \pi r^2 = \pi D^2/4;$$

Довжина кола:

$$L = 2\pi r = \pi D.$$

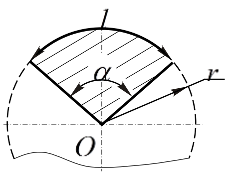
Кільце



$$S = \pi(R^2 - r^2) =$$

$$= \pi(D^2 - d^2)/4.$$

Сектор

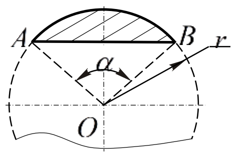


$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ};$$

Довжина дуги:

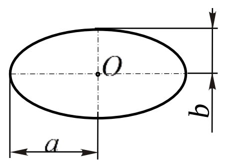
$$l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}.$$

Сегмент



$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} - S_{\Delta OAB}.$$

Еліпс



$$S = \pi \cdot a \cdot b.$$

15. Похідні та диференціали елементарних функцій

	Похідні	*Диференціали*
1.	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$dx^n = nx^{n-1}dx$
2.	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$
4.	$\left(e^x\right)' = e^x$	$de^x = e^x dx$
5.	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a,\ (a>0)$	$d\left(a^x\right) = a^x \ln a dx,\ (a>0)$
6.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$
7.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
9.	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
10.	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}$
11.	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
12.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$
15.	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(arcctgx) = -\frac{dx}{1+x^2}$

Додаток В

ТЕСТИ ДЛЯ САМОАНАЛІЗУ З РОЗДІЛУ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ»

1. Що вивчає динаміка?

а) механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла з врахуванням сил, що на них діють

б) загальні поняття о силах, а також умови рівноваги матеріальних тіл, що знаходяться під дією цих сил

в) геометричні властивості руху тіл без врахування їх інертності та діючих на них сил

г) механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла без врахування сил, що на них діють

2. Галілеєм встановлено, що поблизу Земної поверхні при вільному падіння усі тіла мають:

а) однакове прискорення

б) прискорення, що залежить від маси тіла

в) прискорення, що залежить від форми тіла

г) прискорення, що залежить від діючих сил

3. В основу класичної динаміки покладено:

а) закони Ісака Ньютона

б) принцип відносності Ейнштейна

в) міркування, що Земля стоїть на черепасі та чотирьох слонах

г) основні положення корпускулярно-хвилевої теорії

4. Масою матеріальної точки називається...

а) фізична величина, якає мірою її інертних і гравітаційних властивостей

б) кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл
в) векторна величина, яка є мірою інертних властивостей
г) величина, яка залежить від прискорення вільного падіння

5.Сформулюйте другу задачу динаміки матеріальної точки.
а) згідно заданим силам, які діють на матеріальну точку і початковим умовам руху визначити закон її руху
б) по заданій масі матеріальної точки та закону її руху визначити силу, яка діє на матеріальну точку або рівнодійну силу
в) визначити закон руху матеріальної точки, якщо відома її маса
г) згідно заданого закону руху матеріальної точки визначити її масу

6. Сформулюйте першу задачу динаміки матеріальної точки.
а) по заданій масі матеріальної точки та закону її руху визначити силу, яка діє на матеріальну точку
б) по заданому закону руху матеріальної точки визначити її масу
в) визначити закон руху матеріальної точки згідно заданих сил
г) по заданій масі та діючим силам визначити початкові умови

7. Перший закон Ньютона формулюється наступним чином:
а) ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан
б) прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї сили і спрямовано вздовж вектора сили
в) прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо

г) ізольована матеріальна точка рухається рівномірно до тих пір, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан

8. Другий закон Ньютона формулюється наступним чином:

а) прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї сили і спрямоване вздовж вектора сили
б) прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо
в) кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла
г) прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямоване протилежно вектору сили

9. Третій закон Ньютона формулюється наступним чином:

а) кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямом протидії другого тіла
б) прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо
в) прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї сили і спрямоване протилежно вектору сили
г) патеріальна точка рухається рівномірно до тих пір, поки прикладені сили не примусять їй змінити цей стан

10. Четвертий закон Ньютона формулюється наступним чином:

а) прискорення яке отримує матеріальна точка від дії системи сил дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо

б) кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла
в) прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї сили і спрямоване вздовж вектора сили
г) ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки прикладені сили не примусять її змінити цей стан

11. В системі одиниць СІ за одиницю довжини прийнято
а) [м]
б) [см]
в) [мм]
г) [км]

12. В системі одиниць СІ за одиницю часу прийнято
а) [с]
б) [год.]
в) [хв.]
г) [рік]

13. В системі одиниць СІ за одиницю вимірювання маси прийнято
а) [кг]
б) [г]
в) [т]
г) [мг]

14. Дайте визначення сили.
а) сила – це векторно-кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл
б) сила – це фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей

в) сила – це скалярна величина, яка характеризує міру механічної взаємодії тіл
г) сила – це величина, яка дорівнює добутку маси тіла на прискорення

15. Інерційними називають системи відліку:
а) які рухаються рівномірно та прямолінійно відносно нерухомих зірок
б) які рухаються з прискоренням відносно нерухомих зірок
в) пов’язані зі спостерігачем
г) пов’язані з рухаючимся об’єктом

Навчальне видання

Леженкін Олександр Миколайович
Антонова Галина Володимирівна
Вершков Олександр Олександрович
Бондаренко Лариса Юріївна
Мацулевич Олександр Євгенович
Смєлов Андрій Олександрович
Михайленко Олена Юріївна

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Навчально – методичний посібник

Надруковано з оригіналів макетів замовника

Підписано до друку 26.06.2021 р. формат 60х84 1/16

Папір офсетний. Наклад 100 примірників.

Замовлення №

Видано ПП Верескун В.М.

Видавничо – поліграфічний цент «Люкс»

м. Мелітополь, вул. М. Грушевського, 10 тел.: т. 0619 (44-45-11)

свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до Державного реєстру видавців, виробників

і розповсюджувачів видавничої продукції від 11.06.2002 р. серія ДК №1125