ЛЕКЦІЯ № 3 Характеристика руху рідин

Змістовий модуль 1 “Основи гідравліки”

Тема: Характеристика руху рідин

Мета: Вивчити основне рівняння гідродинаміки (Рівняння Бернуллі), його геометричну і фізичну (енергетичну) інтерпретації. Рівнянням нерозривності потоку. Ознайомитися з видами руху рідин, елементами потоку.

План

1.Види руху рідин.
2. Потік рідин та його елементи.
3. Рівняння нерозривності потоку.
4. Рівняння Бернуллі, геометрична і фізична (енергетична) Інтерпретації.
5. Умови та приклади застосування рівняння Бернуллі.

Матеріал лекції

1. Види руху рідин

Гідродинаміка — розділ гідравліки, в якому вивчаються закони руху рідин і методи використання цих законів при розв’язанні інженерних задач.

Об’єктом вивчення в гідродинаміці є потік рідини. Рідини рухаються під впливом зовнішніх сил, таких як сила тяжіння, зовнішній тиск і т.д. Рух рідин характеризується швидкістю і гідродинамічним тиском. Враховуючи, що реальні рідини володіють рядом властивостей, в тому числі і в’язкістю, які важко врахувати при вивченні руху рідин, вивчення його починається з нев’язкої (ідеальної) рідини, тобто без врахування сил тертя, а потім в отримані теоретичні залежності вносяться уточнення. Існує два методи вивчення руху рідин: метод Ж. Лагранжа і метод Л. Ейлера.

Метод Лагранжа полягає в розгляді руху кожної частинки рідини, тобто траєкторії її руху. Із-за значної трудоємкості цей метод не набув широкого розповсюдження.

Метод Ейлера полягає в розгляді загального руху рідини в різних точках рідинного середовища в певний момент часу. Цей метод дозволяє визначити швидкість руху рідини в любій її точці в любий момент часу, тобто характеризується побудовою поля швидкостей, а тому широко застосовується при вивченні руху рідин.

По характеру зміни поля швидкостей за часом рух рідин ділиться на усталий і не усталиий.

Сталий рух – це такий рух рідини, при якому в любій точці потоку

швидкість і тиск з плином часу не змінюються, тобто:

$$u = f_1(x, y, z),$$
$$p = f_2(x, y, z). \quad (1)$$

Прикладами сталого руху є рух води в каналі з постійними площею поперечного перерізу і глибиною.

Несталий рух – це такий рух рідини, при якому в любій точці потоку швидкість і тиск з плином часу змінюються

$$u = f_1(x, y, z, t),$$
$$p = f_2(x, y, z, t). \quad (2)$$

Прикладом несталого руху є витікання рідини з бака при його спорожненні.

В інженерній практиці розповсюджений переважно сталий рух який ділиться на рівномірний і нерівномірний. При рівномірному русі живий переріз потоку і середня швидкість не змінюються вздовж течії, а при нерівномірному - ці параметри непостійні.

Потоки рідини діляться на напірні, безнапірні і гідравлічні струмені. Напірні потоки не мають вільної поверхні рідини, тобто потік торкається твердих стінок з усіх боків. Прикладом напірного є рух води в водопровідних трубопроводах (під напором). Безнапірні потоки мають вільну поверхню, тобто вони торкаються твердих стінок лише на частині периметра. Прикладом такого руху є рух води в каналах. Він здійснюється завдяки нахилу дна канала, дії сили тяжіння та текучості рідин. В гідравлічних струминах потік з усіх боків оточений вільною поверхнею. Прикладами гідравлічних струмин є струмини дощувальної техніки, пожежних брандспойтів. Рух рідини в цьому випадку здійснюється за рахунок напору на вихідному насадку.

При вивченні руху рідин найбільшого поширення здобула ***струминкова модель*** їх руху, яка базується на методі Ейлера. Згідно з цим шлях руху окремої частинки рідини за певний проміжок часу називається ***траєкторією руху*** цієї частинки (рис. , а).

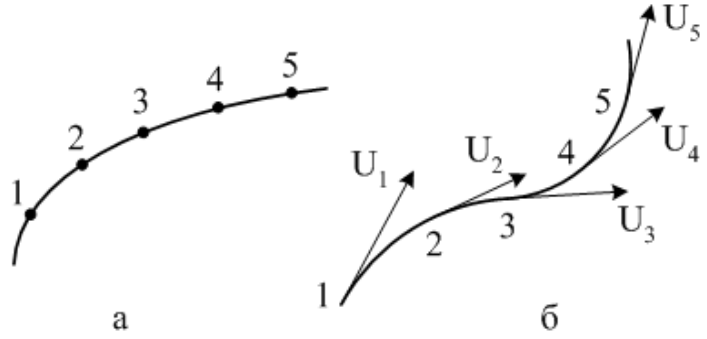


Рис. 1 Схема руху частинок рідини: а – траєкторія частинок рідини (1, 2, 3 і т.д. – положення частинки в певні моменти часу); б – лінія течії (1,2,3 – точки в рідині; u_1, u_2, u_3 … - вектори швидкості в точках).

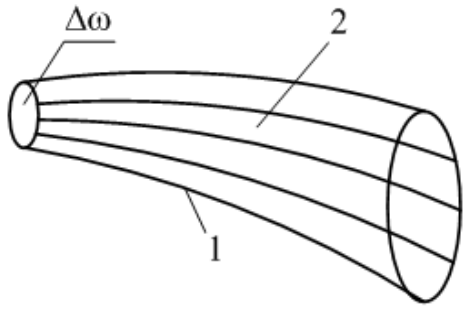


Рис. 2 Схема струминкової моделі руху рідини: 1 – трубка течії; 2 – елементарна струминка рідини.

Якщо в рухомій рідині провести лінію через ряд точок таким чином, що в кожній з них вектор швидкості в даний момент часу буде дотичною до цієї лінії, то отримаємо ***лінію течії*** (рис. 1, б).

Підкреслимо, що різниця між траєкторією руху частинки і лінією течії полягає в тому, що траєкторія руху зображає шлях пройдений частинкою рідини за певний проміжок часу, а лінія течії — це миттєва характеристика потоку, яка зв'язує різні частинки рідини, що лежать на лінії течії в даний момент, і показує напрямок вектора швидкості частинки в цей момент. При сталому русі рідини траєкторія руху частинки рідини співпадає з лінією течії.

Якщо в рухомій рідині провести замкнутий контур, що обмежує елементарну площу $\Delta\omega$, і через усі точки цього контуру провести лінії течії, то утвориться ***трубка течії*** (рис. 2). Рідина, яка знаходиться усередині трубки течії, у вигляді пучка ліній течії, називається ***елементарною струминкою рідини.***

2. Потік рідини та його елементи

Потік рідини характеризується рядом геометричних та гідравлічних його параметрів, якими користуються при конструюванні русл та гідравлічному розрахунку потоків. Основними елементами потоків рідини є русло, живий переріз, змочений периметр, гідравлічний радіус, витрата рідини, середня швидкість руху рідини.

Русло потоку – це тверді поверхні, які обмежують потік рідини знизу (дно, схили).

Живий переріз ω**,** м^2 - це площа перерізу потоку перпендикулярна до загальної повздовжньої його течії (рис.3)

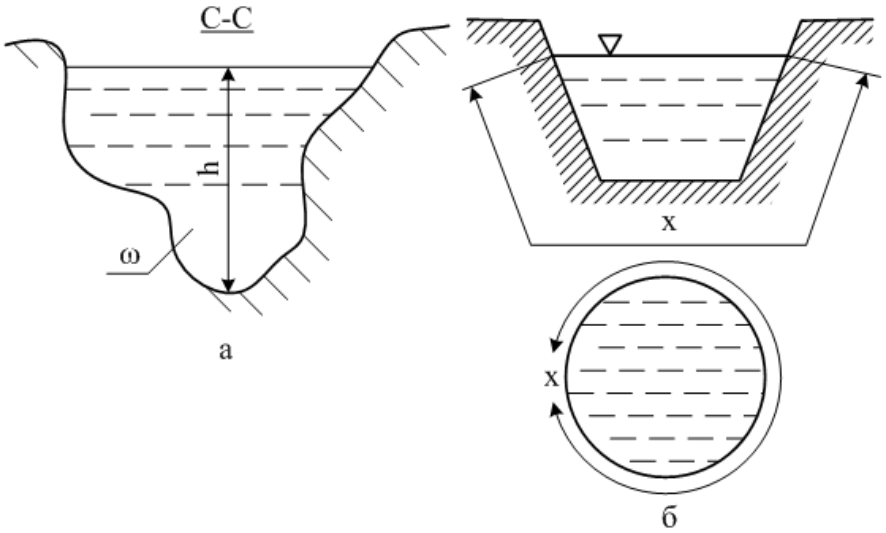


Рис. 3 Схеми: а – живого перерізу потоку; б – змоченого периметра трапеціїдальної і круглої форм перерізу потоку.

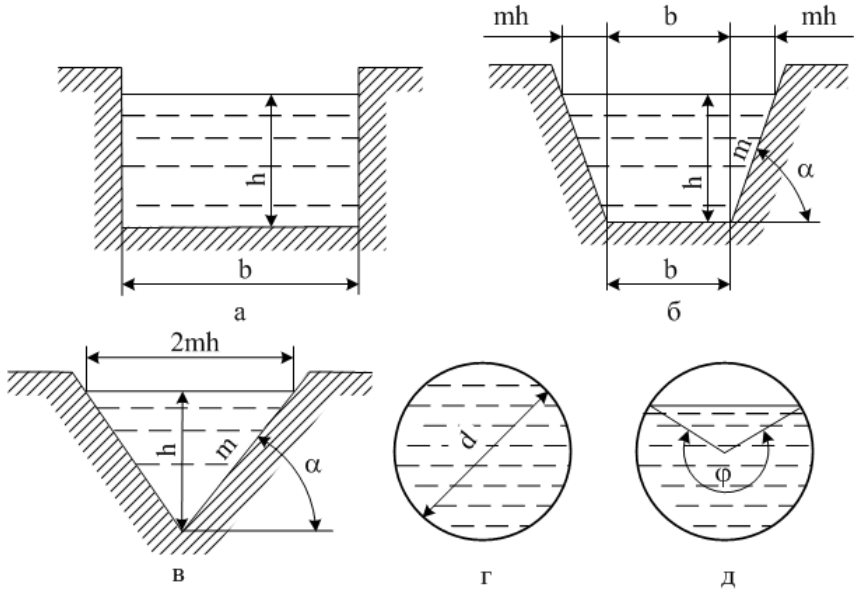


Рис. 4. Схеми до визначення гідравлічних характеристик потоків з поперечним перерізом: а – прямокутним; б – трапецеїдальним; в – трикутним; г - круглим; д – сегментним.

Площа живого перерізу найбільш розповсюджених його форм визначається за формулами, що наводяться в таблиці 1.

Таблиця 1 - Формули для визначення гідравлічних елементів потоку рідини (ω , χ, R)* [1]

Форма поперечного перерізу	Схема, рис. 26	Площа поперечного перерізу, ω , м^2	Довжина змоченого периметра, χ, м	Гідравлічний радіус, R, м
Прямокутна	а	$b \cdot h$	$2h + b$	$\frac{bh}{2h+b}$
Трапецеїдальна	б	$(b + mh)h$	$b + 2h\sqrt{1+m^2}$	$h(mh + b)$
Трикутна	в	mh^2	$2h\sqrt{1+m^2}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1+m^2}}$
Кругла	г	πr^2, або $\frac{\pi d^2}{4}$	$2\pi r$	$\frac{r}{2}$
Не повна кругла (сегментна)	д	$\frac{d^2}{8}\left(\frac{\varphi\pi}{180} - \sin\varphi\right)$	$\frac{\varphi\pi d}{360}$	$\frac{d}{4}\left(1 - \frac{180\sin\varphi}{\varphi\pi}\right)$

*Примітка: в формулах наведено: h – глибина рідини; b – ширина дна; $m = ctg\alpha$ - коефіцієнт закладання схилу; φ - центральний кут; d - внутрішній діаметр труби; r - внутрішній радіус труби.

Змочений периметр χ, м — це та частина периметра живого перерізу

потоку, на якій рідина торкається твердих стінок (тобто це довжина лінії перерізу поверхні русла) (рис. 3, б). Чим більше змочений периметр потоку, тим більше гідравлічні опори при його русі, а значить більші втрати енергії. Довжина змоченого периметра найбільш розповсюджених форм поперечного перерізу (рис. 4) визначається за формулами, що наводяться в таблиці 2.

Гідравлічний радіус R, м - це відношення площі живого перерізу ω до змоченого периметра χ

$$R = \omega / \chi . \tag{3}$$

Формули для визначення гідравлічного радіусу найбільш розповсюджених форм поперечного перерізу (рис. 4) наводяться в таблиці 1.

Витрата рідини Q, м³/с – це об'єм рідини, яка протікає через живий переріз потоку за одиницю часу.

Теоретично сказане обґрунтовується, якщо прийняти, що витрата рідини в елементарній струминці $dQ = \frac{dW}{t}$, тоді загальна витрата $Q = \int_{\omega} \frac{dW}{t}$, що в кінцевому результаті дає формулу

$$Q = \frac{W}{t}, \tag{4}$$

де W – об'єм рідини; t – час.

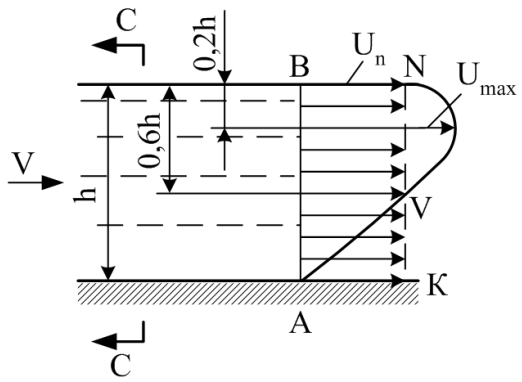


Рис. 5 Схема епюр дійсної і середньої швидкостей руху рідини у відкритому руслі (наприклад, в річці).

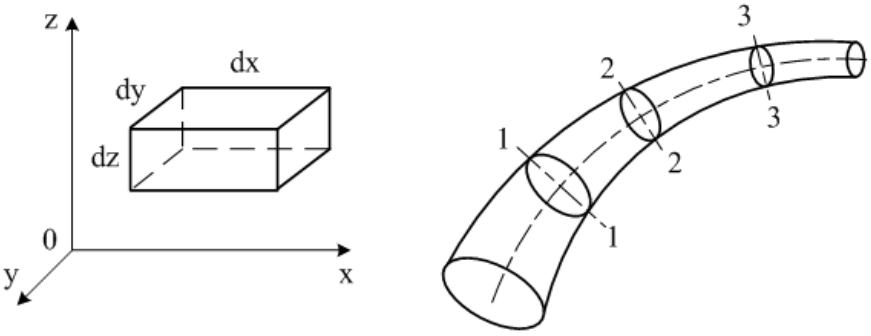
Середня швидкість руху рідини V, м/с – це фіктивна швидкість, з якою всі частинки рідини рухаються так, що кількість рідини, яка протікає через живий переріз, що розглядається, дорівнює дійсній кількості рідини, яка протікає через той же переріз при дійсних швидкостях руху. Дійсна швидкість руху рідини, наприклад в живому перерізі каналу, змінюється від поверхневої швидкості до максимальної на деякій глибині і далі до ноля біля дна каналу. На рисунку 5 показана епюра дійсних швидкостей (суцільна крива) і епюра середньої швидкості течії (пунктирна вертикальна лінія). Середня швидкість згідно з її визначенням буде

$$V = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega} \tag{5}$$

де Q - витрата рідини; ω - площа живого перерізу.

3. Рівняння нерозривності потоку рідини

Для обґрунтування рівняння нерозривності потоку рідини скористуємося такими міркуваннями. Будемо вважати, що розглядається потік нестискуючої рідини суцільний за структурою, а значить з плином часу зміни (збільшення або зменшення) її маси в об'ємі, який розглядається, не буде мати місця. Прослідкуємо за масою рідини, яка протікає через грані елементарного паралелепіпеда, виділеного у середині рухомої рідини (рис. 6, а).



а б

Рис. 6 Схеми до обґрунтування нерозривності потоку рідини: а – схема до виведення рівняння нерозривності потоку рідини; б – схема, яка ілюструє нерозривність потоку рідини.

Розпочнемо розгляд питання з напрямку, який співпадає з напрямком вісі OX.

Припустимо зворотнє, тобто, що при протіканні рідини через грані паралелепіпеда кількість маси рідини зміниться. Тоді через ліву грань паралелепіпеда рідина втікає в нього з швидкістю u_x, а через праву грань витікає з швидкістю $u_x + \partial U_x dx / \partial x$.

Величина зміни кількості маси за одиницю часу в паралелепіпеді в напряму, який співпадає з віссю OX, складе

$$dM_x = \rho u_x dydz - \rho(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx)dydz = -\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dxdydz. \quad (6)$$

Аналогічно з цим, зміна кількості маси за одиницю часу по другим напрямкам складе

$$dM_y = -\rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dxdydz; \;\; dM_z = -\rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dxdydz. \quad (7)$$

Але за умовою нерозривності $dM = dM_x + dM_y + dM_z = 0$

$$dM = -\rho dxdydz(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}) = 0. \quad (8)$$

Величини ρ, dx, dy, dz не дорівнюють нулю. Отже

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Рівняння (9) називається рівнянням ***нерозривності в диференціальному вигляді*** (рівняння Л.Ейлера) для довільного руху нестиснуючої рідини.

Для потенціального руху нестискуючої рідини існує функція φ (x, y, z), яка називається ***потенціалом швидкості,*** частинні похідні якої по координатним вісям дорівнюють відповідним проекціям швидкості:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (10)$$

З врахуванням цього рівняння нерозривності (99) можна записати так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (11)$$

Рівняння (11) називається ***рівнянням Лапласа***.

Якщо в потоці рідини взяти перерізи 1-1, 2-2 і 3-3 , то для кожного з них буде справедливим рівняння (11) розв'язане відносно витрати рідини $Q = \omega V$, тобто:

$$Q_1 = \omega_1 V_1,\ Q_2 = \omega_2 V_2;\ Q_3 = \omega_3 V_3, \qquad (12)$$

Так як для усіх живих перерізів потоку, який розглядається, величина *Q* постійна, то $Q_1 = Q_2 = Q_3$, а

$$\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2 = \omega_3 V_3, \qquad (13)$$

що справедливо при нерозривності потоку нестискуючої рідини.

Таким чином в любому перерізі потоку рідини її витрата *Q* визначається залежністю

$$Q = \omega V, \qquad (14)$$

де ω - площа живого перерізу; V - середня швидкість руху рідини.

4. Рівняння Бернуллі, геометрична і фізична (енергетична) інтерпретації

Рівняння, про яке йтиметься нижче, є теоретичним обґрунтуванням руху рідин, а тому і вважається основним рівнянням гідродинаміки. Воно встановлює зв'язок між висотним положенням потоку рідини відносно площини порівняння, тиском і швидкістю руху рідини в любому перерізі потоку. Рівняння називається ім'ям Д. Бернуллі (швейцарця за походженням), так як ним було вперше встановлено зв'язок між тиском і швидкістю рідини в потоці. Вперше було опубліковано в 1738 р.

В тому вигляді, в якому ми будемо розглядати, рівняння було сформовано пізніше, але Д. Бернуллі було віддано належне і рівняння на його честь назване його ім'ям.

За уже усталеною методикою, спочатку розглянемо рівняння стосовно елементарної струминки ідеальної (нев'язкої), а потім реальної (в'язкої) рідини.

Для цього виділимо в рухомій рідині нескінченно малих розмірів паралелепіпед (рис. 7) Складемо рівняння руху паралелепіпеда вздовж вісі

OX скориставшись при цьому методом Ейлера. (Згідно з рисунком 7 на паралелепіпед зліва діє сила *p*dydz, а справа - $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$ і масова сила $\rho dxdydzX$. Якщо до названих сил добавити силу інерції зі зворотним знаком, то згідно принципу Даламбера можна вважати, що паралелепіпед знаходяться в стані рівноваги.

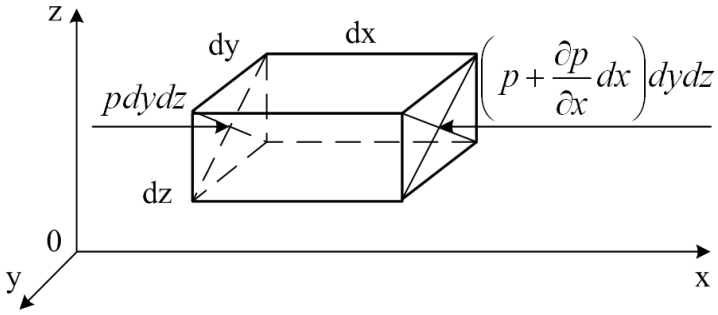


Рис. 7 Схема до виведення рівняння Д. Бернуллі.

Складові сил інерції по координатним вісям описуються так

$$\rho dxdydz \frac{du_x}{dt}; \quad \rho dxdydz \frac{du_y}{dt}; \rho dxdydz \frac{du_z}{dt}. \tag{15}$$

Якщо рівняння (15) віднести до одиниці маси, розділивши їх на $\rho dxdydz$, то отримаємо:

$$-1\frac{du_x}{dt}; -1\frac{du_y}{dt}; -1\frac{du_z}{dt}. \tag{16}$$

Добавивши до рівнянь рівноваги сили інерції одержимо диференціальні рівняння руху нев'язкої рідини (рівняння Ейлера)

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{dt}; \; Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{dt}; \; Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{dt}. \tag{17}$$

Помножимо складові рівнянь (107) відповідно на *dx, dy, dz* і складемо їх

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{-\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{dp}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz, \tag{18}$$

Спростимо отримане рівняння (18) таким чином:

Вираз (*Xdx* +*Ydy* + *Zdz*) – будемо вважати повним диференціалом якоїсь функції П, тобто:

$$d\Pi = Xdx + Ydy + Zdz \tag{19}$$

2. Вважаючи рух сталим, тобто *p = f(x, y, z)*, можна записати

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \tag{20}$$

3. Так як $u_x = \frac{dx}{dt}$, то

$$\frac{du}{dt}dx = \frac{du_x}{dt}u_x dt = u_x du_x = d\left(\frac{u_x^2}{2}\right).$$

Аналогічно можна записати і для вісей *Y* і *Z*

$$\frac{du_y}{dt}dy = d\left(\frac{u_y^2}{2}\right) \qquad \text{і} \qquad \frac{du_z}{dt}dz = d\left(\frac{u_z^2}{2}\right). \qquad (21)$$

Підставивши отримані вирази в рівняння (108) одержимо:

$$d\Pi - \frac{1}{\rho}dp = \frac{1}{2}d(u^2), \text{ або } \frac{1}{\rho}dp + \frac{1}{2}d(u^2) - d\Pi = 0. \quad (22)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Pi = const. \qquad (113)$$

Якщо рідина рухається тільки під дією зовнішньої сили тяжіння, то dП = Zdz = - gdz. Звідсіль П = - gZ. Підставивши цей вираз в рівняння (23), отримаємо

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = const. \qquad (24)$$

Розділимо рівняння (24) на g, віднісши його до одиниці ваги рідини, отримаємо:

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = const = H_Г, \qquad (25)$$

де $H_г$ - гідродинамічний напір, м.

Для нев'язкої рідини рівняння (25) , для двох перерізів 1-1- і 2-2, можна записати у вигляді рівності гідродинамічних напорів в цих перерізах $H_{г1} = H_{г2}$, або:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u^2{}_1}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2{}^2}{2g}. \qquad (26)$$

Отримане рівняння є рівнянням Бернуллі для елементарної струминки нев'язкої рідини.

Для в'язкої (реальної) рідини напір в любому вищерозташованому перерізі завжди буде більше напору в нижчерозташованому, за течією, перерізі, так як частина енергії витрачається на подолання сил опору і рівняння (26) прийме вигляд

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u^2{}_1}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2{}^2}{2g} + h_B, \qquad (27)$$

де $h_В$ - втрати напору на подолання усіх опорів (сил в'язкості і сил тертя рідини об поверхню русла) $h_в = Н_{г1} – Н_{г2}$.

Для потоку в'язкої (реальної) рідини рівняння (27) можна застосувати при умові, якщо рух рідини буде сталим і плавнозмінним, тобто таким при

якому кут розходження між сусідніми елементарними струминками буде настільки малим, що складовими швидкості в поперечному напрямку можна знехтувати. Тоді буде справедливим основний закон гідростатики, тобто величина

Z = p/γ однакова в усіх точках перерізу.

Як говорилося вище при русі рідини її швидкість досягає максимального значення в центральній частині потоку і зменшується до ноля біля дна русла. Нерівномірний розподіл швидкостей означає неоднакове сковзання елементарних струминок одних по одним. Враховуючи все це в рівняння Бернуллі вводиться середня швидкість руху рідини V. Для приведення результатів розрахунків по середній швидкості у відповідність з дійними швидкостями вводиться коефіцієнт α, який характеризує нерівномірність розподілу швидкостей по живому перерізу потоку і який є відношенням кінетичної енергії, вирахуваної за дійсними швидкостями руху, до енергії вирахуваної за середньою швидкістю руху рідини в тому ж перерізі, тобто:

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^2 dm}{MV^2}, \qquad (28)$$

де m - маса рідини; u і V - відповідно дійсна і середня швидкості руху рідини.

Таким чином, для двох перерізів в потоці в'язкої (реальної) рідини, з врахуванням вищенаведених положень, рівняння Бернуллі буде мати такий вигляд

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_в, \qquad (29)$$

де Z_1, Z_2 - висотне положення перерізів відносно площини порівняння; p_1, p_2 - гідростатичний тиск, відповідно, в першому і другому перерізах; γ - питома вага рідини ($\gamma = \rho g$); α - коефіцієнт, який враховує нерівномірність розподілу швидкостей по живому перерізу потоку (α = 1,05…1,1); V_1, V_2 - середня швидкість руху рідини, відповідно в першому і другому перерізах; g - прискорення вільного падіння; $h_в$ - втрати напору при русі рідини від першого до другого перерізу.

Кожна з величин, які входять до рівняння Бернуллі (29) може змінюватися, але їх сума в кожному перерізу є постійною, тобто:

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} = const. \qquad (30)$$

Геометричне зображення (інтерпретація) рівняння Бернуллі

Геометричне зображення рівняння Бернуллі полягає в тому, що величини, які відповідають значенням його членів зображаються відрізками ліній, оскільки всі члени рівняння мають лінійну розмірність. В потоці

рідини, на відстані *l* один від одного намітимо два перерізи 1-1 (вище за течією) і 2-2 (нижче за течією) (рис. 8).

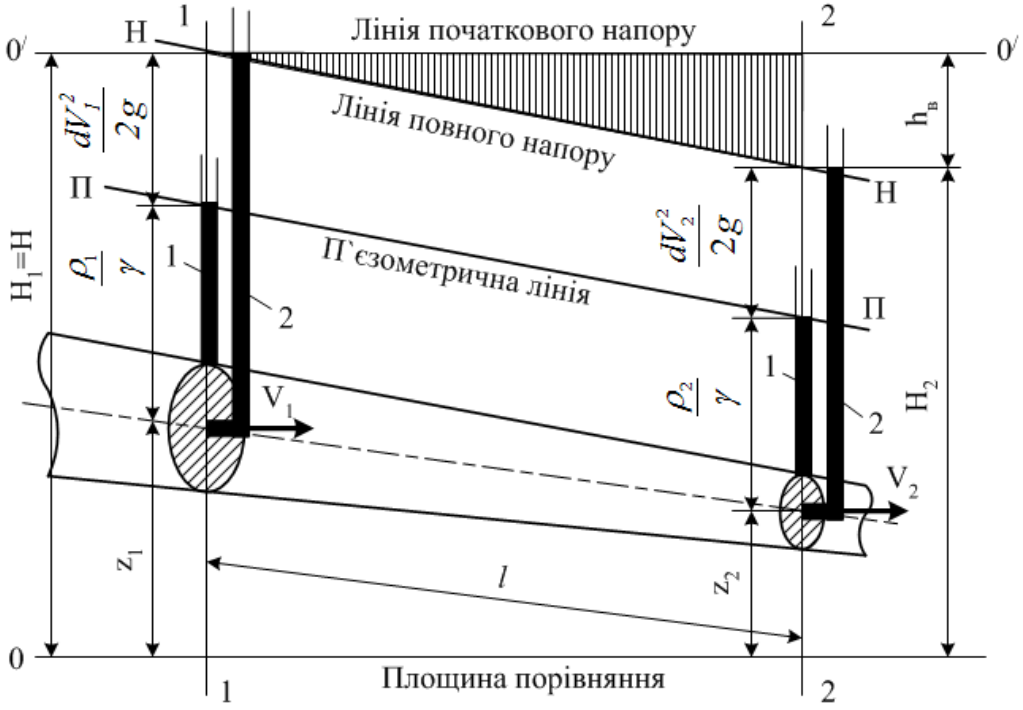


Рис. 8 Графічне зображення рівняння Д. Бернуллі: 1 – пьезометри; 2 – трубки Піто.

У відповідності з цим величини в першому перерізі позначимо індексами 1, а в другому – 2. Якщо за площину порівняння взяти довільну площину 0-0 то відстань від неї до центра тяжіння живих перерізів, відповідно, буде Z_1 і Z_2, тобто буде зображати перший член рівняння Бернуллі. Встановимо в перерізах п'єзометри, рідина в них підніметься, відповідно, на висоту p_1/γ і p_2/γ, , що в свою чергу, є п'єзометричною висотою в цих перерізах, яка відповідає гідростатичному тиску в них. Таким чином геометрично зображається другий член рівняння Бернуллі. Встановимо в перерізах швидкісні трубки (трубки Піто) з загнутими, під прямим кутом, нижніми відкритими кінцями напрямленими проти течії. Рідина в них підніметься вище ніж в п'єзометрах на висоту, яка відповідатиме третьому члену рівняння Бернуллі, а саме $V_1^2/2g$ і $V_2^2/2g$. Різниця рівнів рідини в трубках Піто в першому і другому перерізах дорівнює втратам повного напору $h_в$. З урахуванням цього рівняння Бернуллі (119) можна записати у такому вигляді

$$H_{Г_1} = H_{Г_2} + h_в = H_Г, \qquad (31)$$

тобто для любого потоку величина $H_Г$ – залишається постійною.

Лінія проведена через рівні рідини в першому і другому п'єзометрах називається ***п'єзометричною лінією*** П-П. Падіння (зниження) п'єзометричної лінії на одиницю довжини потоку називається п'єзометричним нахилом, який описується таким рівнянням:

$$I_p = \frac{\left(Z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)}{l} = \frac{h_{B_P}}{l}, \qquad (32)$$

де l – відстані між першим і другим перерізами (довжина потоку); h_{Bp} - втрати п'єзометричного напору.

П'єзометричний нахил може бути як позитивним так і негативним. Сума $\left(Z + \frac{p}{\gamma}\right)$ називається ***п'єзометричним (потенціальним) напором***. Лінія проведена через рівні рідини в першій і другій трубках Піто називається ***лінією повного, або гідродинамічного напору Н-Н.*** Її падіння на одиницю довжини потоку називається ***гідравлічним нахилом*** і виражається рівнянням

$$I = \frac{\left(Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha V_1^2}{2g}\right) - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha V_г^2}{2g}\right)}{l}, \qquad (33)$$

або скорочено можна записати

$$I = \frac{H_{Г1} - H_{Г2}}{l} = \frac{h_в}{l}, \qquad (34)$$

де $h_в$ - втрати повного напору при русі рідини від першого до другого перерізу.

Лінія повного напору Н-Н може тільки знижуватися, так як повна енергія при русі потоку рідини постійно витрачається.

При рівномірному русі рідини лінія повного напору Н-Н буде паралельною п'єзометричній лінії П-П і гідравлічний нахил буде дорівнювати п'єзометричному $I = I_p$. Для нев'язкої (ідеальної) рідини лінія повного напору Н-Н буде паралельна площині порівняння і співпадати з лінією початкового напору (див. рис. 30) тобто $h_в = 0$.

Фізична суть рівняння Бернуллі

Фізична суть рівняння Бернуллі полягає в тому, що воно описує той чи інший вид питомої енергії, в поперечному перерізі рухомої рідини, тобто енергії, яка припадає на одиницю ваги рідини, що нами було обґрунтовано при виведені рівняння .З рівняння Бернуллі видно, що повна питома енергія потоку рідини складається з питомої енергії положення Z, питомої енергії тиску p/γ і питомої кінетичної енергії $\alpha V^2/(2)$, а також що повна енергія зменшується по довжині потоку в напрямку руху рідини із-за подолання сил тертя.

Два перших члени рівняння Бернуллі $Z + p/\gamma = H_Г$ зображають потенціальну питому енергію $E_П$, третій член $V^2/(2g)$ – кінетичну питому енергію $E_к$, що не складає труднощів обґрунтувати це.

Візьмемо масу рідини М, яка рухається зі швидкістю V. Вага її буде $G = mg$.

Кінетична енергія, як відомо, описується рівнянням $E_к = mV^2/2$. Так як нашою метою є довести, що енергія $E_к$ є питомою, тобто $E_{к.пит.}$, то віднесемо її до ваги, тобто

$$E_{к.пит} = \frac{E_к}{G} = \frac{mV^2/2}{mg} = \frac{V^2}{2g}. \qquad (35)$$

Таким чином, $V^2/(2g)$ є питома кінематична енергія.

Повний напір Н являє собою суму потенціального і швидкісного напорів, або повну питому енергію рухомої рідини, тобто

$$H = E_{пит.положж} + E_{пит.тиску} + E_{пит.кін} = E_{пит.пов.}. \qquad (36)$$

Таким чином, у відповідності з рівнянням Бернуллі повна питома енергія, яку несе потік рідини, в сумі з енергією, яка втрачається при її русі є постійною. Окремі види енергії, вздовж потоку, можуть змінюватися, але їх сума залишається незмінною в любому його перерізі. Це дає змогу зробити висновок, що рівняння Бернуллі виражає відомий закон збереження енергії, стосовно руху рідини.

5. Умови та приклади застосування рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі широко застосовується при дослідженні гідравлічних явищ, наприклад, таких як витікання рідини через отвори і насадки і ін. та при розв’язанні багатьох інженерних задач.

Перша умова, що до застосування рівняння Бернуллі витікає з допущень, які робилися при його виведенні. Рівняння застосовується для сталого плавнозмінного руху рідини, тобто руху, при якому швидкість і напір (тиск) залежать лише від координат точки в рідині і незмінні з течією часу, а швидкість частинок рідини постійна вздовж їх траєкторій при незначній крутизні ліній течії. Цим вимогам відповідають потоки рідин в трубопроводах, каналах і в інших гідравлічних системах.

Другою умовою, можна вважати те, що рівняння Бернуллі застосовується до поперечного перерізу потоку рідини в цілому, а не до окремих його точок. Це правило обґрунтовується гідростатичним законом розподілу тиску в любому перерізі рухомої рідини, тобто $Z + p/\gamma = \text{const}$.

Третьою умовою слід вважати деякі обмеження (поради) що до вибору поперечних перерізів. Саме в вибраних перерізах повинна витримуватись вимога що до плавно змінності руху рідини, а між ними рух може бути і різко змінним. Поперечні перерізи та площину порівняння слід призначати таким чином, та в тих місцях, щоб найбільша кількість величин були відомими, їх значення дорівнювали б нулю, або були пошуковими.

Як приклад, розглянемо випадок, коли рідина з відкритого резервуара з постійним її рівнем в ньому витікає через горизонтальну трубу d = 100 мм (рис. 9). Напір над віссю труби H = 4 м, витрата рідини Q = 25 л/с. Необхідно знайти втрати напору $h_в$.

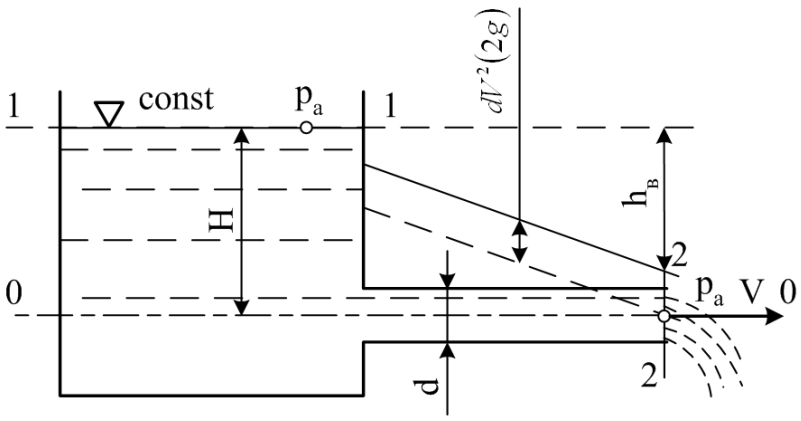


Рис 9 Схема до прикладу застосування рівняння Бернуллі поверхні рідини.

Розв'яжемо задачу з застосуванням рівняння Бернуллі в такій послідовності. Виберемо площину порівняння і два живих перерізи з врахуванням вищенаведених рекомендацій. В нашому випадку площину порівняння О-О доцільно прийняти по вісі труби, а перший переріз доцільно прийняти на вільній поверхні рідини. Тоді Z_1 = H, $P_1 = P_a$, $V_1 \approx 0$ (тому що в порівнянні зі швидкістю рідини в трубі швидкість в резервуарі буде незначною). Другий переріз приймемо на виході з труби. Тоді $Z_2 = 0$, $P_2 = P_a$; V_2 = V. Підставивши значення величин в рівняння Бернуллі одержимо

$$h_в = H - \frac{\alpha V^2}{2g} = H - \frac{\alpha Q^2 \cdot 16}{2g\pi^2 d^4} = H - \frac{8\alpha Q^2}{g\pi^2 d^4} = 4 - \frac{8 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}025^2}{9{,}81 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}14} = 3{,}432 м$$

Питання для самоконтролю до лекції №3.

1. Що вивчається в розділі гідравліки – гідродинаміці?
2. Якими елементами характеризується потік рідини?
3. Як формулюється й записується рівняння нерозривності потоку рідини?
3. Напишіть і поясніть рівняння Бернуллі.
4. Проілюструйте геометричне зображення рівняння Бернуллі.
5. Поясніть фізичну сутність (зміст) рівняння Бернуллі.
6. Поясніть правила застосування рівняння Бернуллі.