Практична робота №3
ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОГО НЕОБХІДНОГО ЧИСЛА ВИМІРЮВАНЬ, РОЗПОДІЛЕНИХ ЗА НОРМАЛЬНИМ ЗАКОНОМ

Мета роботи – придбання навиків планування експерименту й визначення мінімального необхідного числа вимірювань, розподілених за нормальним законом, за наслідками попереднього експерименту.

1 Вказівки з самопідготовки до роботи

1.1 Завдання для самостійної підготовки

Вивчити:

- основні характеристики нормального розподілу
- ймовірність безвідмовної роботи
- ймовірність відмови.

Скласти звіт по роботі:

- номер, найменування та мета роботи;
- основні характеристики нормального розподілу
- ймовірність безвідмовної роботи
- ймовірність відмови.

1.2 Питання для самопідготовки

1.2.1 Основні характеристики нормального розподілу.

1.2.2 Що таке ймовірність безвідмовної роботи?

1.2.3 Що таке ймовірність відмови?

1.3 Рекомендована література

1. Адаменко М. І., Бейлін М. В. Основи наукових досліджень. Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. 188 с.

2. Бобилєв В. П., Іванов І. І., Пройдак Ю. С. Методологія та організація наукових досліджень: навчальний посібник. Дніпропетровськ: Системні технології, 2008. 264 с.

3. Кислий В. М. Організація наукових досліджень: навчальний посібник. Суми: Університетська книга, 2011. 224 с.

ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ

1 Нормальний закон розподілу випадкових величин

Основні характеристики нормального розподілу

Одним із найбільш універсальних, зручних і широко застосовуваних для практичних розрахунків законів розподілу випадкових величин є закон розподілу Гаусса (рис. 1). Універсальність цього закону полягає в тому, що його вважають граничним законом, з якого випливають інші (показниковий, Релея, Вейбулла, Пуассона, біноміальний тощо).

Нормальний розподіл проявляється тоді, коли зміна випадкової величини зумовлена багатьма причинами рівнозначного впливу. Йому підпорядковуються напрацювання до відмови і на відмову більшості відновлюваних і невідновлюваних виробів, які спрацьовуються і кородують, похибки вимірювань тощо.

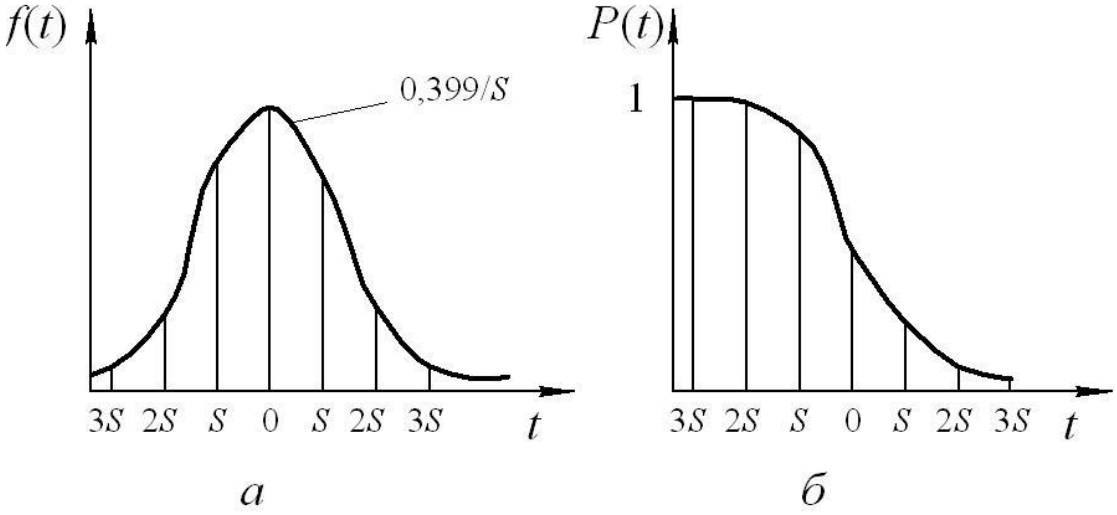

Рис. 1 – Щільність ймовірності (а) та інтегральна функція імовірності (б) нормального розподілу

Функцію щільності розподілу розраховують за формулою:

$$f(t) = \frac{1}{S_t\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(t-m_t)^2}{2S_t^2}} \qquad (1)$$

Цей розподіл має два незалежних параметри: математичне сподівання m_t і середнє квадратичне відхилення S. Значення цих параметрів оцінюють за такими формулами:

$$m_t \approx \bar{t} = \sum t_i / N \quad ; \tag{2}$$

$$S \cong s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (t_i - \bar{t})^2} \quad , \tag{3}$$

де $\bar{t}$, S – статистичні оцінки відповідно математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення (наприклад, часу напрацювання об‘єкта до відмови або на відмову).

Математичне сподівання в цьому законі розподілу визначає положення центра кривої на осі абсцис, а середнє квадратичне відхилення – ширину фігури, описаної цією кривою (рис. 1, *а*). При деякому напрацювання t імовірність відмови *Q(t)=F(t)* наближається до 1,0, а імовірність безвідмовної роботи *P*(*t*) падає до нуля (рис. 1, *б*).

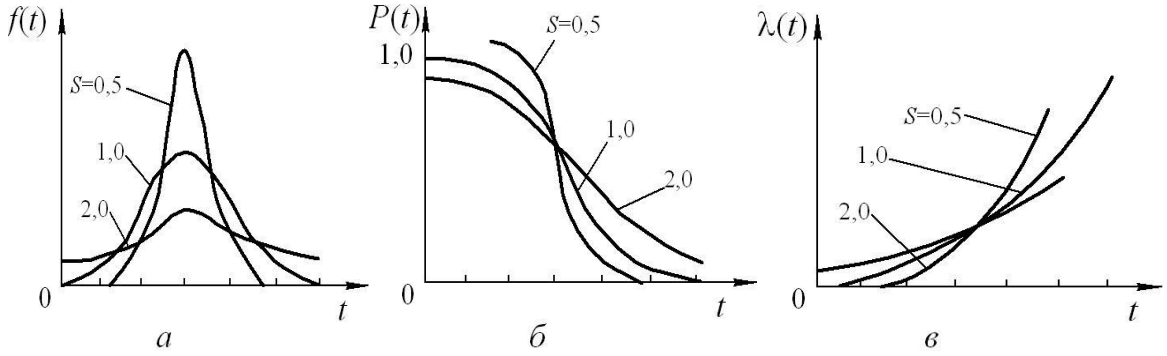

Рис. 2 – Основні характеристики нормального розподілу за різних значень середнього квадратичного відхилення:
а – щільність імовірності f(t); *б* – імовірність безвідмовної роботи P(t); *в* – інтенсивність відмов λ(t)

Крива щільності розподілу випадкової величини тим гостріша і вища, чим менше значення *S* (рис. 2). Вона поширюється в межах значень аргументу *t* від –∞ до +∞. Це не дуже вагомий її недолік, оскільки площа, окреслена кінцями кривої, що прямують до нескінченності, відображає дуже малу ймовірність відмови об‘єкта. Так,

імовірність відмови за період до m_t – 3S становить лише 0,135 % і може не враховуватись у розрахунках.

Для періоду m_t – 2S ймовірність відмови також низька і не перевищує 2,175 %. Найбільша ордината кривої щільності розподілу дорівнює 0,399/S. Інтегральна функція розподілу

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt .$$

Імовірність відмови та імовірність безвідмовної роботи становить відповідно: $Q(t)=F(t)$; $P(t)=1-F(t)$.

Вирахування інтегралів замінюють застосуванням таблиць, а для спрощення користуються невеликими таблицями для нормального розподілу, який має $m_x=0$; $S_x=1$.

Функція щільності ймовірності для цього розподілу

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

і залежить лише від однієї змінної x (рис. 3).

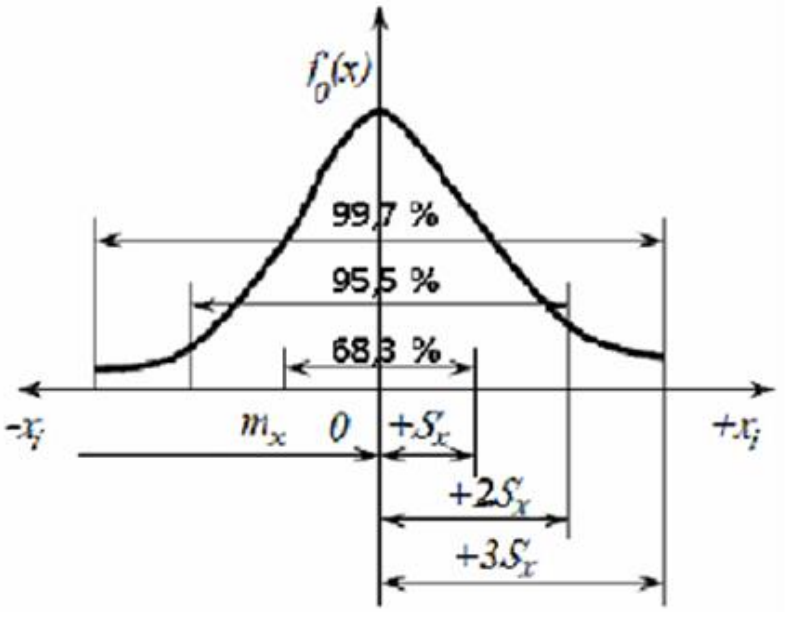

Рис. 3 – Диференціальна функція нормованого нормального розподілу випадкової величини

Величина x є центрованою, оскільки m_x=0, і нормованою, адже S_x=1.

У цьому разі інтегральну функцію описують формулою:

$$F_0(t) = \int_{-\infty}^{x} f_0(x)dx \qquad (4)$$

Очевидно, що

$$F_0(x) + F_0(-x) = 1; \qquad (5)$$

$$F_0(-x) = 1 - F_0(x) \qquad (6)$$

Для використання таблиць потрібно робити підстановку $x=(t-m_t)/S$. При цьому x називається квантилем нормованого нормального розподілу і позначається $U_\text{р}$.

Щільність розподілу, ймовірність відмови та імовірність безвідмовної роботи відповідно визначають так:

$$f(t) = \frac{f_0(x)}{S}; \quad Q(t) = F_0(x); \quad P(t) = 1 - F_0(x) \qquad (7)$$

Значення $f_0(x)$ і $F_0(x)$ беруть із таблиць (наприклад, табл. 1).

Таблиця 1

Вихідні дані для розрахунку показників надійності

x	0	1	2	3	4
$f_0(x)$	0,3989	0,2420	0,0540	0,0044	0,0001
$F_0(x)$	0,5	0,8413	0,9772	0,9986	0,9999

В інших таблицях наведено безпосередньо значення $P(t)$ залежно від квантиля:

$$x = U_\text{р} = \left(t - m_t\right)/S. \qquad (8)$$

Ймовірність безвідмовної роботи – це ймовірність того, що у межах заданого напрацювання відмова об'єкта не виникає. Ймовірність безвідмовної роботи застосовується як кількісний критерій надійності об'єктів для відновлених та невідновлених об'єктів.

Для режимів зберігання та транспортування використовується аналогічний термін – «ймовірність невиникнення відмови». Ймовірність безвідмовної роботи визначається у частках одиниці або у відсотках і змінюється від одиниці до нуля. Наприклад (рис. А.4), до напрацювання t_1 ймовірність безвідмовної роботи дорівнює 1, а при напрацюванні t_4 – 0,1.

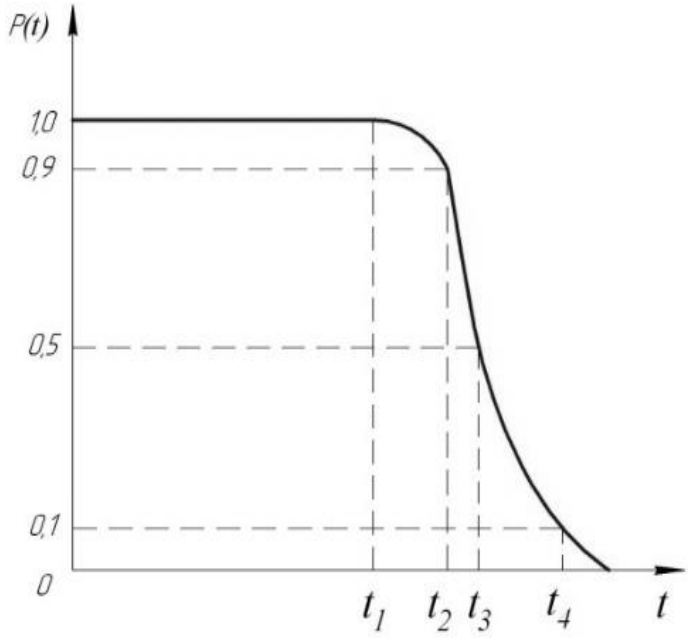

Рис. 4 – Функція ймовірності безвідмовної роботи залежно від напрацювання об'єкта

Ймовірність безвідмовної роботи являє собою безумовну ймовірність того, що в інтервалі від 0 до t відмови не буде, і визначається за формулою:

$$P(t) = 1 - F(t), \tag{9}$$

де $F(t)$ – функція розподілу напрацювання до відмови.

Ймовірність безвідмовної роботи – безрозмірний показник, при його призначенні або визначенні необхідно вказувати час t або напрацювання, протягом якого його значення повинно бути не нижче наведеної величини.

Аналітичний, вираз для визначення $P(t)$:

$$P(t_0) = 1 - F_0\left(\frac{\overline{T} - t_0}{\sigma}\right), \qquad (10)$$

де $\overline{T}$ – середнє арифметичне значення напрацювання;

t_0 – задане значення напрацювання.

Ймовірність безвідмовної роботи за статистичними даними про відмови оцінюється виразом:

$$\hat{P}(t) = 1 - \frac{n(t)}{N_0}, \qquad (11)$$

де $\hat{P}(t)$ – статистична оцінка ймовірності безвідмовної роботи;

N_0 – кількість об'єктів на початку випробування;

$n(t)$ – кількість об'єктів, що відмовили протягом певного часу.

При великій кількості об'єктів N_0 статистична оцінка практично збігається з ймовірністю безвідмовної роботи $P(t)$:

$$P(t) = \lim_{n \to N_0} \hat{p}(t).$$

На практиці в деяких випадках зручніше користуватись характеристикою ймовірності відмови.

Ймовірність відмови – ймовірність того, що за певних умов експлуатації у заданому інтервалі часу або у межах заданого напрацювання виникає хоча б одна відмова.

Ймовірність відмови $Q(t)$ при $t = 0$ дорівнює 0, змінюється від 0 до 1 і обчислюється до формулою:

$$Q(t) = 1 - P(t) \qquad (12)$$

Для статистичного визначення ймовірності відмови користуються формулою:

$$Q(t) = 1 - \left(1 - \frac{n(t)}{N_0}\right) = \frac{n(t)}{N_0}, \qquad (13)$$

де $n(t)$ – кількість об'єктів, що відмовили за час t.